DM de Mathématiques n° 1

On considère $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toute la même loi de Bernoulli de paramètre $p\in\,]0,1[$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note :

$$A_n=\begin{pmatrix} Z_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & Z_2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & Z_n \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On pose $T_n=tr(A_n)$, $D_n=\det(A_n)$, $R_n=rg(A_n)$ et $\chi_n=\det(XI_n-A_n)$.

1) Justifier que T_n est une variable aléatoire. Donner sa loi, son espérance et sa variance.
2) Pour un entier $n\geq 3$, donner une relation entre D_n, D_{n-1} et D_{n-2}, puis entre χ_n, χ_{n-1} et χ_{n-2}.
3) Calculer $E(D_n)$. ☺ *On pourra établir une relation de récurrence double.*
4) Montrer que χ_n est un polynôme aléatoire unitaire de degré *n*.

Dans la suite, on prend $n=3$.

5) Calculer D_3. Donner son espérance et sa variance, sans déterminer la loi de probabilité de D_3.
6) Déterminer la loi de probabilité de D_3 et retrouver son espérance et sa variance.
7) Calculer la probabilité que A_3 soit inversible.
8) Donner la loi de R_3. Calculer son espérance et sa variance.
9) Calculer χ_3 et montrer que χ_3 admet 3 racines réelles.
10) Calculer la probabilité que A_3 soit semblable à $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

    ☺ *On pourra prouver que si deux matrices M et N de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *sont semblables, alors elles vérifient* $\det(XI_n-M)=\det(XI_n-N)$.