Corrigés des exercices du stage de pré-rentrée

***Exercice 1** : Symboles Σ et Π*

1) On a :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\ldots+\cancel{\frac{1}{n-1}}-\cancel{\frac{1}{n}}+\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.$$

Ou bien :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}=\frac{1}{1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.$$

Donc :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}}$$

2) On a :

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{a(k+1)(k+2)+bk(k+2)+ck(k+1)}{k(k+1)(k+2)}=\frac{(a+b+c)k^2+(3a+2b+c)k+2a}{k(k+1)(k+2)}.$$

Par identification :

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}+\frac{c}{k+2}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}a+b+c=0\\3a+2b+c=0\\2a=1\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}a=c=\dfrac{1}{2}\\b=-1\end{cases}$$

Donc, $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{2}{k+1}+\dfrac{1}{k+2}\right)$ et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)}\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\cancel{\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k+1)}}-\cancel{\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k+1)}}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\frac{(n+1)(n+2)-2}{4(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}}$$

3) Avec $u_n = (-2)^n$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison -2.

a. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (-2)^k = \frac{1-(-2)^{n+1}}{1-(-2)} = \frac{1-(-2)^{n+1}}{3}$.

b. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (-2)^k = -2\,\frac{1-(-2)^{n}}{1-(-2)} = -2\,\frac{1-(-2)^{n}}{3}$.

c. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} u_k = \sum_{k=0}^{2n} (-2)^k = \frac{1-(-2)^{2n+1}}{1-(-2)} = \frac{1+2^{2n+1}}{3}$.

d. $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} u_k = \sum_{k=n}^{2n} (-2)^k = (-2)^n\,\frac{1-(-2)^{n+1}}{1-(-2)} = \frac{(-2)^n + 2^{2n+1}}{3} = \frac{(-1)^n + 2^{n+1}}{3}\,2^n$.

e. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_{2k} = \sum_{k=0}^{n} (-2)^{2k} = \sum_{k=0}^{n} 4^k = \frac{4^{n+1}-1}{4-1} = \frac{4^{n+1}-1}{3}$.

f. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (u_k + n) = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} n = \sum_{k=0}^{n} (-2)^k + n(n+1) = \frac{1-(-2)^{n+1}}{3} + n(n+1)$.

g. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k + n = \sum_{k=0}^{n} (-2)^k + n = \frac{1-(-2)^{n+1}}{3} + n$.

h. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (u_k + k) = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} (-2)^k + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1-(-2)^{n+1}}{3} + \frac{n(n+1)}{2}$.

i. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_{k+n} = \sum_{k=n}^{2n} u_k = \frac{(-1)^n + 2^{n+1}}{3}\,2^n$.

j. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_{nk} = \sum_{k=0}^{n} (-2)^{nk} = \sum_{k=0}^{n} \left((-2)^n\right)^k = \frac{1-\left((-2)^n\right)^{n+1}}{1-(-2)^n} = \frac{1-(-2)^{n(n+1)}}{1-(-2)^n} = \frac{1+2^{n(n+1)}}{1-(-2)^n}$.

4) $\displaystyle P_n = \prod_{k=1}^{n} (1+v_k)$.

a. $\displaystyle P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k+1}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\ldots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

b. $\displaystyle P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} = \frac{\left(\prod_{k=1}^{n} k\right)\times\left(\prod_{k=1}^{n} (k+2)\right)}{\left(\prod_{k=1}^{n} (k+1)\right)^2} = \frac{\left(\prod_{k=1}^{n} k\right)\times\left(\prod_{k=3}^{n+3} k\right)}{\left(\prod_{k=2}^{n+1} k\right)^2}$

$\displaystyle = \frac{n!\times\frac{1}{2}(n+3)!}{\left((n+1)!\right)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{n!}{(n+1)!}\,\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = \frac{(n+3)(n+2)}{2(n+1)}$.

c. $\displaystyle P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{2}{(k+1)(k+2)}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)} = \frac{n!\times\frac{(n+3)!}{6}}{(n+1)!\times\frac{(n+2)!}{2}} = \frac{n+3}{3(n+1)}$.

<u>Problème 1</u> : *Un problème d'analyse*

Partie A : ***Etude de fonction***

1) On a $e^x - 1 = 0$ si et seulement si $x = 0$, donc la fonction *f* est bien définie sur $\mathbb{R}$. Elle est de plus continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de telles fonctions.

Enfin, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} e^x = 1$, donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$ et *f* est continue en 0.

Finalement :

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

2) a. La fonction *h* est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de telles fonctions et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h'(x) = (1+x)e^{-x} - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 e^{-x} = 0.$$

Ainsi, h' est nulle, donc *h* est constante. Comme $h(0) = e^0 - 1 + \frac{1}{2}\int_0^0 t^2 e^{-t}dt = 0$:

$$\boxed{\text{La fonction } h \text{ est nulle.}}$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)e^{-x} - 1 + \frac{1}{2}\int_0^x t^2 e^{-t}dt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\int_0^x t^2 e^{-t}dt = 1 - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}e^x \int_0^x t^2 e^{-t}dt = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$$

Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}e^x \int_0^x t^2 e^{-t}dt}$$

b. On a donc $e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}e^x \int_0^x t^2 e^{-t}dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $t \in [0, x]$, $0 < e^{-t} \le 1$, donc $0 \le t^2 e^{-t} \le t^2$. Par croissance de l'intégrale, on obtient (avec $0 \le x$) :

$$0 \le \int_0^x t^2 e^{-t}dt \le \int_0^x t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{3} \quad \Rightarrow \quad 0 \le \frac{1}{2}e^x \int_0^x t^2 e^{-t}dt \le \frac{x^3}{6}e^x.$$

  D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$0 \le e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \le \frac{x^3}{6}e^x.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_-$ et pour tout $t \in [x, 0]$, $0 < e^{-t} \le e^{-x}$, donc $0 \le t^2 e^{-t} \le t^2 e^{-x}$ et par croissance de l'intégrale, on obtient (avec $x \le 0$) :

$$0 \le \int_x^0 t^2 e^{-t} dt \le \int_x^0 t^2 e^{-x} dt = e^{-x} \int_x^0 t^2 dt = -e^{-x} \frac{x^3}{3} \quad \Rightarrow \quad e^{-x} \frac{x^3}{3} \le \int_0^x t^2 e^{-t} dt \le 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^3}{6} \le \frac{1}{2} e^x \int_0^x t^2 e^{-t} dt \le 0.$$

D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}_-$:

$$\frac{x^3}{6} \le e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \le 0.$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \le e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2} \le \dfrac{x^3}{6} e^x\ ; \\ \bullet \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_-,\ \dfrac{x^3}{6} \le e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2} \le 0. \end{array}}$$

c. Avec $\frac{|x|^3}{6} \le \frac{|x|^3}{6} e^{|x|}$, le résultat de la question précédente peur s'écrire plus simplement pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \le \left| e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \right| \le \frac{|x|^3}{6} e^{|x|} = \frac{x^2 |x|}{6} e^{|x|}.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$0 \le \left| \frac{e^x - 1 - x}{x^2} - \frac{1}{2} \right| \le \frac{|x|}{6} e^{|x|}.$$

Comme $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{6} e^{|x|} = 0$, le théorème des gendarmes donne $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1 - x}{x^2} - \frac{1}{2} \right) = 0$, soit :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

Or, quand $x \to 0$, on a $-x \to 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{-x} - 1 + x}{x^2} \underset{t = -x}{=} \lim\limits_{t \to 0} \frac{e^t - 1 - t}{t^2}$, soit :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} - 1 + x}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

d. Pour tout réel x non nul, on a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\dfrac{x e^x}{e^x - 1} - 1}{x} = \frac{x e^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} = \frac{x e^x}{e^x - 1} \frac{x - 1 + e^{-x}}{x^2} = f(x) \frac{e^{-x} - 1 + x}{x^2}.$$

Avec $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{-x} - 1 + x}{x^2} = \frac{1}{2}$, on obtient finalement :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ avec } f'(0) = \frac{1}{2}.}$$

e. Comme *f* est dérivable en 0, $\mathscr{C}$ admet bien une tangente au point d'abscisse 0 et son équation réduite est :

$$\boxed{y = f'(0)x + f(0) = \frac{1}{2}x + 1}$$

3) La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de telles fonctions et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)(e^x - 1) - xe^x(e^x)}{(e^x - 1)^2}.$$

Soit :

$$\boxed{f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1 - x)}{(e^x - 1)^2}}$$

4) La fonction f' est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de telles fonctions.

De plus, on a vu que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{-x} - 1 + x}{x^2} = \frac{1}{2}$ et $f'(0) = \frac{1}{2}$. Alors :

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x(e^x - 1 - x)}{(e^x - 1)^2} = \lim_{x \to 0} \left[e^x \left(\frac{x}{e^x - 1} \right)^2 \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \right] = 1 \times 1^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = f'(0).$$

Donc, f' est continue en 0 et ainsi :

$$\boxed{f' \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

5) Posons $h(x) = e^x - 1 - x$.

La fonction *h* est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de telles fonctions et $h'(x) = e^x - 1$.

- Sur $]0, +\infty[$, $h'(x) > 0$, donc *h* est strictement croissante et $h(x) > h(0) = 0$.
- Sur $]-\infty, 0[$, $h'(x) < 0$, donc *h* est strictement décroissante et $h(x) > h(0) = 0$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $h(x) > 0$ et $h(0) = 0$, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{h(x) = e^x - 1 - x \geq 0 \text{, avec égalité seulement en 0.}}$$

On a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1 - x)}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} h(x)$ et, d'après ce qui précède, on a $f'(x) > 0$.

Comme $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$, on a finalement, $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc :

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

6) On a :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^{x} = 0$ par croissances comparées, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x e^{x}}{e^{x} - 1} = 0$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x e^{x}}{e^{x} - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{1 - e^{-x}} = +\infty$.

On obtient ainsi le tableau :

x	$-\infty$		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

7) Comme $\lim\limits_{-\infty} f = 0$:

$\mathscr{C}$ admet l'axe des abscisses (Ox) pour asymptote horizontale en $-\infty$.

8) Pour tout $x \in \mathbb{R}^{*}$, $g(x) = f(x) - x = \dfrac{x e^{x}}{e^{x} - 1} - x = \dfrac{x e^{x} - x(e^{x} - 1)}{e^{x} - 1} = \dfrac{x}{e^{x} - 1} = \dfrac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}}$.

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$ par croissances comparées, donc :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - x \right] = 0}$$

On en déduit immédiatement que :

La droite $\Delta : y = x$ (la première bissectrice) est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

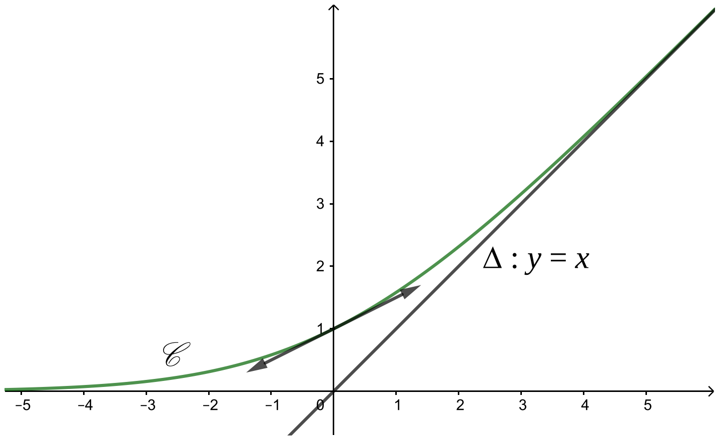
9) On construit le tableau de signes de g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x e^{-x}$		$-$	0	$+$	
$1 - e^{-x}$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$+$	1	$+$	

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$, soit $f(x) > x$ et donc :

$\mathscr{C}$ est toujours au-dessus de Δ.

10) Avec les asymptotes et la tangente en 0, on obtient la courbe :



Partie B : ***Etude d'une suite récurrente***

1) Comme la fonction *f* est définie sur $\mathbb{R}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie quel que soit $u_0 \in \mathbb{R}$.

Dans la question 9 de la partie A, on a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > x$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = f(u_n) > u_n.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } u \text{ est strictement croissante.}}$$

2) Si u converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors $f(\ell) = \ell$ car *f* est continue sur $\mathbb{R}$. Or, on vient de rappeler que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > x$, donc $f(x) \neq x$ et l'équation $f(x) = x$ n'admet pas de solution. Ceci montre que la suite *u* ne peut pas converger, et ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne converge pas.}}$$

3) Comme *u* est croissante, soit elle converge (si elle est majorée), soit elle diverge vers + ∞. On vient de voir qu'elle ne converge pas, donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

Partie C : ***Etude d'une suite implicite***

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc $n \in \mathbb{N}^*$

D'après la partie, la fonction *f* est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de $\lim\limits_{-\infty} f = 0$ à $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

D'après le théorème de la bijection continue (théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones), tout réel strictement positif est atteint exactement une fois pas *f*.

Ainsi, il existe un unique réel a_n tel que $f(a_n) = n$ et :

$$f(nx) = n \quad \Leftrightarrow \quad f(nx) = f(a_n) \quad \Leftrightarrow \quad nx = a_n.$$

Ainsi, $x_n = \dfrac{a_n}{n}$ est l'unique solution de $f(nx) = n$ dans $\mathbb{R}$ et donc :

$$\boxed{\text{L'équation } f(nx) = n \text{ admet une unique solution dans } \mathbb{R}.}$$

x_1 est l'unique solution de $f(x)=1=f(0)$, donc :

$$\boxed{x_1=0}$$

2) Remarquons que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f(nx_n)=n\geq 1=f(0)$ et comme *f* est strictement croissante, on a $x_n\geq 0$ avec égalité si et seulement si $n=1$.

On a $1-e^{-x_1}=0=x_1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $n\geq 2$:

$$f(nx_n)=\frac{nx_n\,e^{nx_n}}{e^{nx_n}-1}=\frac{nx_n}{1-e^{-nx_n}}=n \quad\Leftrightarrow\quad x_n=1-e^{-nx_n}.$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{x_n=1-e^{-nx_n}}$$

On a vu que $x_n\geq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, donc $0<e^{-nx_n}\leq 1$ et $0\leq x_n=1-e^{-nx_n}<1$, donc :

$$\boxed{x_n\in[0,1[}$$

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$n+1>n \quad\Leftrightarrow\quad f\left((n+1)x_{n+1}\right)>f(nx_n).$$

Comme *f* est strictement croissante, on obtient :

$$\boxed{(n+1)x_{n+1}>nx_n}$$

4) D'après les deux questions précédentes, on a alors, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$nx_n<(n+1)x_{n+1} \quad\Leftrightarrow\quad e^{-nx_n}>e^{-(n+1)x_{n+1}} \quad\Leftrightarrow\quad 1-e^{-nx_n}<1-e^{-(n+1)x_{n+1}} \quad\Leftrightarrow\quad x_n<x_{n+1}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement croissante.}}$$

5) Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante, soit elle converge (si elle est majorée), soit elle diverge vers + ∞.

Or, si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n=+\infty \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to+\infty} nx_n=+\infty \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to+\infty} e^{-nx_n}=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to+\infty} x_n=\lim_{n\to+\infty}(1-e^{-nx_n})=1.$$

Ceci est absurde, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $\ell\in\mathbb{R}$.

Comme $x_n\geq x_2>0$ pour tout entier $n\geq 2$, on a $\ell\geq x_2>0$ et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} nx_n=+\infty.$$

Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty}(1-e^{-n x_n}) = 1.$$

Et ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers 1.}}$$

***Exercice 2* : La série harmonique**

1) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Pour tout réel $t\in[k,k+1]$, on a $\frac{1}{k+1}\le\frac{1}{t}\le\frac{1}{k}$, et par croissance de l'intégrale :

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}dt = \frac{1}{k+1}\int_k^{k+1}dt \le \int_k^{k+1}\frac{dt}{t} \le \int_k^{k+1}\frac{1}{k}dt = \frac{1}{k}\int_k^{k+1}dt .$$

Soit :

$$\boxed{\frac{1}{k+1}\le \ln(k+1)-\ln k \le \frac{1}{k}}$$

2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tout entier k compris entre 1 et n, on a $\frac{1}{k+1}\le \ln(k+1)-\ln k\le\frac{1}{k}$ et en sommant de $k=1$ à $k=n$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\le\sum_{k=1}^{n}\left[\ln(k+1)-\ln k\right]\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Or :

- $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}=\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\frac{1}{1}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-1$;
- $\sum_{k=1}^{n}\left[\ln(k+1)-\ln k\right]=\ln(n+1)-\ln 1=\ln(n+1)$.

Donc :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-1\le\ln(n+1)\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$$

La double inégalité ci-dessus donne pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} H_{n+1}-1\le\ln(n+1) \\ \ln(n+1)\le H_n \end{cases}.$$

Ceci donne entre autres $H_{n+1}\le 1+\ln(n+1)$ pour tout entier $n\ge 1$, soit $H_n\le 1+\ln n$ pour tout entier $n\ge 2$.

Comme $H_1=1=1+\ln 1$, l'inégalité est aussi vraie pour $n=1$ (c'est même une égalité) et donc, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\ln(n+1)\le H_n\le 1+\ln n}$$

3) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n+1)=+\infty$ et $\ln(n+1)\le H_n$, on obtient par théorème de comparaison :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}H_n=+\infty}$$

De plus, pour tout entier $n\ge 2$, on a $\ln n>0$, donc :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\le\frac{H_n}{\ln n}\le\frac{1+\ln n}{\ln n}\iff\frac{\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\le\frac{H_n}{\ln n}\le\frac{1}{\ln n}+1\iff 1+\frac{1}{\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\le\frac{H_n}{\ln n}\le 1+\frac{1}{\ln n}.$$

Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\ln n}\right)=1$, le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{H_n}{\ln n}=1}$$

4) a. On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\sum\limits_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$ et :

$$S_{n+1}-S_n=\sum_{k=n+2}^{2n+2}\frac{1}{k}-\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{k=n+2}^{2n}\frac{1}{k}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\sum_{k=n+2}^{2n}\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Donc, $S_{n+1}-S_n>0$ et ainsi :

$$\boxed{\text{La suite }(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\text{ est strictement croissante.}}$$

b. En repartant de $\frac{1}{k+1}\le\ln(k+1)-\ln k\le\frac{1}{k}$ et en sommant de $k=n+1$ à $k=2n$, on obtient :

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k+1}\le\sum_{k=n+1}^{2n}\left[\ln(k+1)-\ln k\right]\le\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\iff S_n+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n+1}\le\ln(2n+1)-\ln(n+1)\le S_n.$$

Soit :

$$\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)\le S_n\le\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)-\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{n+1}.$$

Comme $\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)=\ln\left(2-\frac{1}{n+1}\right)$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)-\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{n+1}\right]=\ln 2$, et d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}S_n=\ln 2}$$

5) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1}-u_n=H_{n+1}-\ln(n+1)-H_n+\ln n=H_{n+1}-H_n-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\left[\ln(n+1)-\ln n\right].$$

Or, d'après la question 1, $\frac{1}{n+1}\le\ln(n+1)-\ln n$, donc $u_{n+1}-u_n\le 0$ et ainsi :

$$\boxed{\text{La suite }(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\text{ est décroissante.}}$$

D'après la question 2, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$, soit :

$$0 < \ln(n+1) - \ln n \leq u_n \leq 1.$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, et comme elle est décroissante :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge.}}$$

<u>Exercice 3</u> : Equations différentielles

1) a. Comme f et $x \mapsto e^{ax}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, $g : x \mapsto e^{ax} f(x)$ l'est aussi en tant que produit de telles fonctions et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = e^{ax} f'(x) + a\, e^{ax} f(x) = e^{ax}\left(f'(x) + a\, f(x)\right).$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{ax} \neq 0$, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) + a\, f(x) = h(x) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ e^{ax}\left(f'(x) + a\, f(x)\right) = e^{ax} h(x) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ g'(x) = e^{ax} h(x) \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{f \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ si et seulement si pour tout } x \in \mathbb{R},\ g'(x) = e^{ax} h(x).}$$

b. Toutes solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car (E) est d'ordre 1).

Alors, si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, on a avec les notations précédentes :

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ g'(x) = e^{ax} h(x) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x) = e^{ax} f(x) = k + \int_0^x e^{at} h(t)\, dt \quad \text{avec } k \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = k e^{-ax} + e^{-ax} \int_0^x e^{at} h(t)\, dt \quad \text{avec } k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{R}$, $x \mapsto k e^{-ax} + e^{-ax} \int_0^x e^{at} h(t)\, dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et finalement :

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions } x \mapsto k e^{-ax} + e^{-ax} \int_0^x e^{at} h(t)\, dt \text{ avec } k \in \mathbb{R}.}$$

2) a. L'équation $r^2 - 3r + 2 = 0$ est une équation du second degré dont 1 est racine évidente.

Comme le produit des deux racines vaut 2 :

$$\boxed{\text{Les solutions de } r^2 - 3r + 2 = 0 \text{ sont 1 et 2.}}$$

b. Comme f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, f' est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $g = f' - f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que différence de telles fonctions :

$$g' = f'' - f'.$$

Avec $(E''):\ z'-2z=0$, on a :

$$\begin{aligned} g \text{ est solution de } (E'') \text{ sur } \mathbb{R} &\iff g'-2g=0 \\ &\iff f''-f'-2(f'-f)=0 \\ &\iff f''-3f'+2f=0 \\ &\iff f \text{ est solution de } (E') \text{ sur } \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{f \text{ est solution de } (E') \text{ sur } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } g \text{ est solution de } (E''):\ z'-2z=0 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

c. L'équation (E'') est de la forme $z'+az=0$ avec $a=-2$, donc :

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E'') \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions } x\mapsto \mu e^{2x} \text{ avec } \mu\in\mathbb{R}.}$$

Alors, d'après la question précédente, f est solution de (E') sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $f'-f$ est solution de (E'') sur $\mathbb{R}$, donc si et seulement si f est solution de $y'-y=\mu e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$ avec $\mu\in\mathbb{R}$.

D'après la question 1 (avec $a=-1$ et $h(x)=\mu e^{2x}$), les solutions de $y'-y=\mu e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x\mapsto ke^x+e^x\int_0^x e^{-t}\mu e^{2t}\,dt$ avec $k\in\mathbb{R}$.

Or, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\int_0^x e^{-t}\mu e^{2t}\,dt=\mu\int_0^x e^t\,dt=\mu(e^x-1)$ et :

$$ke^x+e^x\int_0^x e^{-t}\mu e^{2t}\,dt=ke^x+\mu e^x(e^x-1)=(k-\mu)e^x+\mu e^{2x}=\lambda e^x+\mu e^{2x}$$

avec $\lambda=k-\mu$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E') \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions } x\mapsto \lambda e^x+\mu e^{2x} \text{ avec } \lambda,\mu\in\mathbb{R}.}$$

Remarquons que l'on trouve la forme $x\mapsto\lambda e^{r_1x}+\mu e^{r_2x}$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation $r^2-3r+2=0$ appelée « équation caractéristique » associée à (E').

***Exercice 4** : Probabilités*

1) En supposant que personne ne triche lors de la donne, on peut supposer toutes les distributions possibles sont équiprobables. Par ailleurs, seul le chien nous intéresse ici, donc on suppose que tous les chiens sont équiprobables. Pour construire un chien à quatre joueurs, il faut choisir au hasard 6 cartes distinctes parmi les 78 cartes du jeu complet, l'ordre du choix n'important pas. C'est une combinaison : il y a donc $\binom{78}{6}$ chiens possibles.

Pour déterminer la probabilité qu'il y ait au moins un bout dans le chien, calculons la probabilité qu'il n'y en ait aucun : on doit alors choisir les 6 cartes de chiens parmi toutes les cartes du jeu, sauf les trois bouts, donc parmi 75 cartes : il y a $\binom{75}{6}$ possibilités.

La probabilité qu'il n'y ait aucun bout dans le chien est alors :

$$p_0=\frac{\binom{75}{6}}{\binom{78}{6}}=\frac{\frac{75!}{69!6!}}{\frac{78!}{72!6!}}=\frac{75\times 74\times 73\times 72\times 71\times 70}{78\times 77\times 76\times 75\times 74\times 73}=\frac{3\times 71\times 10}{13\times 11\times 19}=\frac{2130}{2717}.$$

Alors, la probabilité qu'il y ait au moins un bout dans le chien est $1-p_0=1-\frac{2130}{2717}$, et donc :

> A quatre joueurs, la probabilité qu'il y ait au moins un bout dans le chien est $p=\frac{587}{2717}\approx 0,22$.

2) On reprend le même raisonnement à trois joueurs, avec un chien de 3 cartes. La probabilité qu'il y ait au moins un bout dans le chien est alors :

$$1-\frac{\binom{75}{3}}{\binom{78}{3}}=1-\frac{\frac{75!}{72!3!}}{\frac{78!}{75!3!}}=1-\frac{75\times 74\times 73}{78\times 77\times 76}=1-\frac{25\times 37\times 73}{26\times 77\times 38}=\frac{8551}{76076}.$$

Ainsi :

> A trois joueurs, la probabilité qu'il y ait au moins un bout dans le chien est $\frac{8551}{76076}\approx 0,11$.

On constate que la probabilité est plus faible, ce qui est normal car il y moins de cartes dans le chien, donc moins de chances de choisir un bout dans le jeu.

3) Si on joue à cinq joueurs, mais avec à nouveau un chien de 6 cartes, le calcule st exactement le même qu'à quatre joueurs et donc :

> La probabilité qu'il y ait au moins un bout dans un chien de 6 cartes est la même à 4 ou 5 joueurs.

4) On joue 10 parties d'affilées à quatre joueurs et à chaque parties on regarde si on a au moins un bout dans le chien (succès, de probabilité $p=\frac{587}{2717}$) ou pas (échec, de probabilité $1-p$). Les donnes étant supposées indépendantes les unes des autres, on reconnait un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire X donnant le nombre de succès (nombre de parties où il y a au moins un bout dans le chien) suit une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=\frac{587}{2717}$.

a. La probabilité qu'il n'y ait jamais de bout dans le chien lors des 10 tours est alors $(1-p)^{10}$, donc :

> La probabilité qu'il n'y ait jamais de bout dans le chien lors des 10 tours est $\left(\frac{2130}{2717}\right)^{10}\approx 0,09$.

b. L'évènement « il y a au moins une fois un bout dans le chien » est l'évènement contraire de « il n'y a jamais de bout dans le chien », donc :

$$\boxed{\text{La probabilité qu'il y ait au moins une fois de bout dans le chien lors des 10 tours est } 1-\left(\frac{2130}{2717}\right)^{10} \approx 0,91.}$$

c. La probabilité qu'il y ait exactement cinq fois un bout dans le chien est :

$$\binom{10}{5} p^5(1-p)^5 = 252\left(\frac{587}{2717}\right)^5\left(\frac{2130}{2717}\right)^5.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La probabilité qu'il y ait qu'il y ait cinq fois un bout dans le chien lors des 10 tours est environ 0,035.}}$$

d. Le nombre moyen de parties sur 10 pour lesquelles il y aura au moins un bout dans le chien est correspond à l'espérance de la variable aléatoire *X*. Comme X suit une loi binomiale de paramètres *n* et *p*, on a :

$$E(X) = np = 10\frac{587}{2717} = \frac{5870}{2717} \approx 2,2.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Il y aura au moins un bout dans le chien pour environ 2,2 parties sur 10 en moyenne.}}$$

<u>Problème 2</u> : Intégrales de Wallis et formule de Stirling

Partie A : *Les intégrales de Wallis*

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \cos^n t$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi, son intégrale sur ce segment est bien définie, donc :

$$\boxed{I_n \text{ est bien définie pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

2) On a $I_0 = \int_0^{\pi/2} dt = [t]_0^{\pi/2}$ et $I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos t\, dt = [\sin t]_0^{\pi/2}$, donc :

$$\boxed{I_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_1 = 1}$$

3) La fonction $t \mapsto \sin t \cos^{n+1} t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de telles fonctions et sa dérivée est $t \mapsto \cos t \cos^{n+1} t - (n+1)\sin t \sin t \cos^n t$, soit :

$$t \mapsto \cos^{n+2} t - (n+1)\sin^2 t \cos^n t = \cos^{n+2} t - (n+1)(1-\cos^2 t)\cos^n t = (n+2)\cos^{n+2} t - (n+1)\cos^n t.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La dérivée de } t \mapsto \sin t \cos^{n+1} t \text{ est } t \mapsto (n+2)\cos^{n+2} t - (n+1)\cos^n t.}$$

On a alors :

$$\int_0^{\pi/2}\left[(n+2)\cos^{n+2}t-(n+1)\cos^n t\right]dt=\left[\sin t\cos^{n+1}t\right]_0^{\pi/2}=0.$$

Or, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi/2}\left[(n+2)\cos^{n+2}t-(n+1)\cos^n t\right]dt=(n+2)\int_0^{\pi/2}\cos^{n+2}t\,dt-(n+1)\int_0^{\pi/2}\cos^n t\,dt=(n+2)I_{n+2}-(n+1)I_n.$$

Ainsi, $(n+2)I_{n+2}-(n+1)I_n=0$, soit pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n}$$

4) on veut prouver par récurrence sur p que pour tout $p\in\mathbb{N}$: $I_{2p}>0$ et $I_{2p+1}>0$.

- On a $I_0=\dfrac{\pi}{2}>0$ et $I_1=1>0$, donc la propriété est vraie au rang $p=0$.
- Supposons la propriété vraie à un rang $p\in\mathbb{N}$.

  D'après la question 3 (appliquée à $n=2p$ et à $n=2p+1$), on a $I_{2p+2}=\dfrac{2p+1}{2p+2}I_{2p}$ et $I_{2p+3}=\dfrac{2p+2}{2p+3}I_{2p+1}$, donc I_{2p+2} et I_{2p} sont de même signe, ainsi que I_{2p+3} et I_{2p+1}.

  Or, par hypothèse de récurrence, $I_{2p}>0$ et $I_{2p+1}>0$. Alors, $I_{2p+2}=I_{2(p+1)}>0$ et $I_{2p+3}=I_{2(p+1)+1}>0$, et la propriété est vraie au rang $p+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $p\in\mathbb{N}$, soit pour tout $p\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{I_{2p}>0 \text{ et } I_{2p+1}>0}$$

5) Soit $p\in\mathbb{N}^*$. D'après ce qui précède, on a pour tout $k\in\mathbb{N}$, $I_{2k}\neq 0$, donc $\dfrac{I_{2k+2}}{I_{2k}}$ est défini et :

$$\prod_{k=0}^{p-1}\frac{I_{2(k+1)}}{I_{2k}}=\frac{I_2}{I_0}\frac{I_4}{I_2}\frac{I_6}{I_4}\cdots\frac{I_{2p-2}}{I_{2p-4}}\frac{I_{2p}}{I_{2p-2}}.$$

Soit :

$$\boxed{\prod_{k=0}^{p-1}\frac{I_{2(k+1)}}{I_{2k}}=\frac{I_{2p}}{I_0}}$$

De plus, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $I_{2k+2}=\dfrac{2k+1}{2k+2}I_{2k}$, soit $\dfrac{I_{2(k+1)}}{I_{2k}}=\dfrac{2k+1}{2k+2}$, donc :

$$\frac{I_{2p}}{I_0}=\prod_{k=0}^{p-1}\frac{I_{2(k+1)}}{I_{2k}}=\prod_{k=0}^{p-1}\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2p-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times(2p)}=\frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times\ldots\times(2p-1)\times(2p)}{\left(2\times4\times6\times\ldots\times(2p)\right)^2}$$

$$=\frac{(2p)!}{\left((2\times1)\times(2\times2)\times(2\times3)\times\ldots\times(2\times p)\right)^2}=\frac{(2p)!}{\left(2^p\times1\times2\times3\times\ldots\times p\right)^2}=\frac{(2p)!}{2^{2p}\times(p!)^2}$$

Ainsi, avec $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient :

$$\boxed{I_{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}}$$

6) De la même façon, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_{2k+1} \neq 0$, donc $\dfrac{I_{2k+3}}{I_{2k+1}}$ est défini et pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\prod_{k=0}^{p-1}\frac{I_{2k+3}}{I_{2k+1}} = \frac{I_{2p+1}}{I_1} = \prod_{k=0}^{p-1}\frac{2k+2}{2k+3} = \frac{2\times 4\times 6\times \ldots \times (2p)}{3\times 5\times \ldots \times (2p+1)} = \frac{\left(2\times 4\times 6\times \ldots \times (2p)\right)^2}{(2p+1)!} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Et, avec $I_1 = 1$, on obtient :

$$\boxed{I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}}$$

7) Posons $u_n = (n+1)I_{n+1}I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Avec la question 3, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = (n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+2)\frac{n+1}{n+2}I_nI_{n+1} = (n+1)I_{n+1}I_n = u_n.$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Comme $u_0 = I_1I_0 = \dfrac{\pi}{2}$, on a $u_n = u_0 = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit:

$$\boxed{(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}}$$

8) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leq \cos t \leq 1$, donc $\cos^{n+1} t \leq \cos^n t$ et par croissance de l'intégrale :

$$I_{n+1} = \int_0^{\pi/2}\cos^{n+1} t\, dt \leq \int_0^{\pi/2}\cos^n t\, dt = I_n.$$

Comme $I_n > 0$ (d'après 2), on peut écrire :

$$0 < \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1 \quad \textbf{(1)}.$$

Au rang suivant, ceci donne $0 < \dfrac{I_{n+2}}{I_{n+1}} \leq 1$ et avec $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}I_n$, on obtient :

$$0 < \frac{n+1}{n+2}\frac{I_n}{I_{n+1}} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n+2}{n+1}\frac{I_{n+1}}{I_n} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \quad \textbf{(2)}.$$

Finalement, avec **(1)** et **(2)**, on obtient bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1}$$

9) Posons $v_n = I_n\sqrt{n}$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_{n+2} = I_{n+2}\sqrt{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n\sqrt{n+2} = \frac{n+1}{\sqrt{n+2}\sqrt{n}} v_n = v_n\sqrt{\frac{(n+1)^2}{(n+2)n}} = v_n\sqrt{\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}}\ .$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{\dfrac{n^2+2n+1}{n^2+2n}} > 1$ et $v_n > 0$, donc $v_{n+2} > v_n$. Comme $v_2 > 0 = v_0$, ceci reste vrai pour $n = 0$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} > v_n$. Ceci permet de conclure que les suites $(v_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(v_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont strictement croissantes.

Alors, soit $(v_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge, soit converge diverge vers + ∞. Il en va de même pour $(v_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$.

De plus, comme $v_1 > 0$ et $v_2 > 0$, si $(v_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ ou $(v_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ converge, c'est vers un réel strictement positif.

Or, d'après la question 7, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$, donc $v_{n+1}v_n = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$, et pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$v_{2p+1}v_{2p} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2p}{2p+1}}\ .$$

Alors, $\lim\limits_{p\to+\infty} v_{2p+1}v_{2p} = \dfrac{\pi}{2}$, ce qui rend impossible la divergence vers + ∞ de $(v_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et de $(v_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$.

Ainsi, les suites $(v_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(v_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ convergent vers $\ell > 0$ et $\ell' > 0$ respectivement.

D'après la question 8, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n+1}{n+2} \le \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \le 1$, donc pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{2p+1}{2p+2}\sqrt{\frac{2p+1}{2p}} \le \frac{v_{2p+1}}{v_{2p}} \le \sqrt{\frac{2p+1}{2p}}\ .$$

Comme $\lim\limits_{p\to+\infty}\left[\dfrac{2p+1}{2p+2}\sqrt{\dfrac{2p+1}{2p}}\right] = \lim\limits_{p\to+\infty}\sqrt{\dfrac{2p+1}{2p}} = 1$, le théorème de gendarmes permet de conclure que :

$$\lim_{p\to+\infty}\frac{v_{2p+1}}{v_{2p}} = \frac{\ell'}{\ell} = 1 \quad \Rightarrow \quad \ell' = \ell\ .$$

Ainsi, $(v_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(v_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $\ell > 0$.

Enfin, en revenant à $v_{2p+1}v_{2p} = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{2p}{2p+1}}$ et en passant à la limite, on obtient $\ell^2 = \dfrac{\pi}{2}$, donc $\ell = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ (car $\ell > 0$).

Finalement, $\lim\limits_{p\to+\infty} v_{2p} = \lim\limits_{p\to+\infty} v_{2p+1} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$, ce qui permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ et ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (I_n\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ .}$$

Partie B : ***La formule de Stirling***

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \ln k - \left(n+1+\frac{1}{2}\right)\ln(n+1) + n + 1 - \left[\sum_{k=1}^{n} \ln k - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n + n\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \ln k - \sum_{k=1}^{n} \ln k - \left(n+1+\frac{1}{2}\right)\ln(n+1) + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n + n + 1 - n$$

$$= \ln(n+1) - \left(n+1+\frac{1}{2}\right)\ln(n+1) + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n + 1$$

$$= 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\ln(n+1) - \ln n\right) = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = 1 - f(n)}$$

2) La fonction f est deux fois dérivable sur $[1, +\infty[$ en tant que produit de telles fonctions et pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$f'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2+x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2+x} - \frac{1}{x^2+x} + \left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{2x+1}{(x^2+x)^2} = \frac{(2x+1)^2}{2(x^2+x)^2} - \frac{2}{x^2+x} = \frac{1}{2(x^2+x)^2}$$

Sur $[1, +\infty[$, f'' est strictement positive, f' est strictement croissante. Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$, donc sur $[1, +\infty[$, f' est strictement négative et ainsi :

$$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } [1, +\infty[.}$$

3) On a $f(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ et :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{h=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1}$$

Comme f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, on a $f(x) > 1$ sur $[1, +\infty[$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) > 1$, donc $u_{n+1} - u_n = 1 - f(n) < 0$ et :

$$\boxed{u \text{ est strictement décroissante.}}$$

4) Si u est positive, elle est minorée par 0. Comme elle est décroissante :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers une limite } \ell.}$$

5) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $v_n = e^{u_n}$ et comme la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, donc en ℓ :

$$\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers une limite } L = e^{\ell}.}$$

6) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n > 0$ et :

$$\ln v_n = u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln k - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n + n = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} k\right) - \ln n^{n+\frac{1}{2}} + n = \ln(n!) - \ln(n^n\sqrt{n}) + \ln(e^n) = \ln\left(\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}\right).$$

Donc, $v_n = \dfrac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} = n!\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{e}{n}\right)^n$, soit :

$$\boxed{n! = v_n\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

D'après l'exercice précédent, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} I_{2p}\sqrt{2p} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ avec $I_{2p} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}$.

Or, d'après la question précédente $n! = v_n\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ avec $v_n \to L = e^{\ell} > 0$, donc :

$$I_{2p}\sqrt{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\sqrt{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{v_{2p}\sqrt{2p}\left(\frac{2p}{e}\right)^{2p}}{2^{2p}\left[v_p\sqrt{p}\left(\frac{p}{e}\right)^p\right]^2}\sqrt{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{v_{2p}\sqrt{2p}\left(\frac{2p}{e}\right)^{2p}}{2^{2p}{v_p}^2 p\left(\frac{p}{e}\right)^{2p}}\sqrt{2p} = \pi\frac{v_{2p}}{{v_p}^2} \to \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Et ainsi, $\dfrac{v_{2p}}{{v_p}^2} \to \sqrt{\dfrac{1}{2\pi}}$, soit, avec $\dfrac{v_{2p}}{{v_p}^2} \neq 0$ pour tout $p\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\frac{{v_p}^2}{v_{2p}} \to \sqrt{2\pi}}$$

Comme $v_n \to L > 0$, on a $\dfrac{{v_p}^2}{v_{2p}} \to \dfrac{L^2}{L} = L$ et donc $L = \sqrt{2\pi}$.

Finalement, comme $v_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$, on obtient :

$$\boxed{\frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \to \sqrt{2\pi}}$$