Corrigé du problème d'analyse

Partie A

1) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de telles fonctions.

De plus, on a $\ln(1+x^2) \underset{0}{\sim} x^2$, donc $f(x) \underset{0}{\sim} x$ et ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Ainsi :

$$\boxed{\text{On peut prolonger } f \text{ en une fonction continue sur } \mathbb{R} \text{ en posant } f(0)=0.}$$

2) La fonction *f* est définie sur $\mathbb{R}$, qui est symétrique par rapport à 0.

De plus, $f(-0) = -f(0) = 0$ et sur $\mathbb{R}^*$, *f* est le quotient d'une fonction paire et d'une fonction impaire, donc :

$$\boxed{f \text{ est impaire.}}$$

3) La fonction *f* est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de telles fonctions, avec $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = -\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} + \frac{2}{1+x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}\ln(1+x^2) - \frac{1}{x^2}\frac{2x}{1+x^2} - 2\frac{2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{x(1+x^2)^2}\left(\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}(1+x^2)^2 - 1 - 3x^2\right)$$

On a $\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \underset{0}{o}(x^4)$, donc $\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \underset{0}{o}(x^2)$ et :

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left[-1 + \frac{1}{2}x^2 + \underset{0}{o}(x^2) + \frac{2}{1+x^2}\right] = 1.$$

Comme *f* est continue en 0 et f' admet une limite finie en 0, *f* est de classe C^1 en 0 (avec $f'(0)=1$).

De plus :

$$f''(x) = \frac{2}{x(1+x^2)^2}\left[\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \underset{0}{o}(x^2)\right)(1+2x^2+x^4) - 1 - 3x^2\right] = \frac{-3x + \underset{0}{o}(x)}{(1+x^2)^2}$$

Donc, $\lim\limits_{x\to 0} f''(x) = 0$. Comme f' est continue en 0 et f'' admet une limite finie en 0, *f* est de classe C^2 en 0.

Finalement :

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

4) On a $\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 + \underset{0}{o}(x^7)$, donc :

$$\boxed{f(x) = x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^5 + \underset{0}{o}(x^6)}$$

5) On a vu que *f* est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, donc en 1. Alors, la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 donne :

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \underset{1}{o}\left((x-1)^2\right).$$

Avec les formules établies dans la question 3, on a $f(1) = \ln 2$, $f'(1) = 1 - \ln 2$ et $f''(1) = 2\ln 2 - 2$. D'où :

$$\boxed{f(x) = \ln 2 + \left(1 - \ln 2\right)(x-1) + \left(\ln 2 - 1\right)(x-1)^2 + \underset{1}{o}\left((x-1)^2\right)}$$

6) On a $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$. Posons $h = \dfrac{1}{x}$. On a alors, $\forall\, h \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f\left(\frac{1}{h}\right) = h\ln\left(1 + \frac{1}{h^2}\right) = h\ln(1+h^2) - 2h\ln h = h\left(h^2 - \frac{1}{2}h^4 + \underset{0}{o}(h^4)\right) - 2h\ln h = -\,2h\ln h + h^3 - \frac{1}{2}h^5 + \underset{0}{o}(h^5).$$

Soit :

$$f(x) = -\,2\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{2x^5} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^5}\right).$$

Le développement asymptotique de *f* comportant trois termes au voisinage de $+\infty$ est donc :

$$\boxed{f(x) = 2\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{2x^5} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^5}\right)}$$

7) D'après la question précédente, on a $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2\dfrac{\ln x}{x}$, donc $f(-x) \underset{-\infty}{\sim} 2\dfrac{\ln(-x)}{-x}$, soit $f(-x) \underset{-\infty}{\sim} -2\dfrac{\ln|x|}{x}$.

Or, *f* est impaire, donc $f(-x) = -\,f(x)$, ce qui donne $-\,f(x) \underset{-\infty}{\sim} -2\dfrac{\ln|x|}{x}$, soit :

$$\boxed{f(x) \underset{-\infty}{\sim} 2\frac{\ln|x|}{x}}$$

8) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ par croissances comparées, les deux questions précédentes permettent de conclure immédiatement que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Par ailleurs, on a vu que $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = -\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{2x^2}{1+x^2} - \ln(1+x^2)\right) = \frac{1}{x^2}\left(2 - \frac{2}{1+x^2} - \ln(1+x^2)\right) = \frac{1}{x^2}g(x)$$

avec $g(x) = 2 - \dfrac{2}{1+x^2} - \ln(1+x^2)$.

Comme $x^2 > 0$ sur $\mathbb{R}^*$, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. La fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que différence de telles fonctions et $\forall\, x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = 2\frac{2x}{(1+x^2)^2} - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2x(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2}.$$

On obtient alors le tableau sur $\mathbb{R}_+^*$:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	$+\infty$
g	0	$\nearrow$	$1-\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

Ceci prouve que $g'(x) > 0$ sur $]0;1]$ et sur $[1;+\infty[$, g est continue (car dérivable) et strictement décroissante de $1-\ln 2 > 0$ à $-\infty$. D'après le théorème de la bijection, g s'annule exactement une fois sur $]1;+\infty[$ en un réel $\alpha > 1$. Alors, $g(x) > 0$, donc $f'(x) > 0$ sur $]0;\alpha[$ et $g(x) < 0$, donc $f'(x) < 0$ sur $]\alpha;+\infty[$.

Avec $f'(0) = 1 > 0$, on obtient le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ (complété par imparité) :

x	$-\infty$		$-\alpha$		α		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-f(\alpha)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

avec $2-\dfrac{2}{1+\alpha^2}-\ln(1+\alpha^2)=0$, donc $\ln(1+\alpha^2)=\dfrac{2\alpha^2}{1+\alpha^2}$ et $f(\alpha)=\dfrac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha}=\dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}$.

9) D'après ce qui précède, f est strictement croissante sur $]-\alpha;\alpha[$, donc sur $[-1;1]$, car $\alpha > 1$. Comme f est continue (car dérivable sur ce segment), elle réalise une bijection de $[-1;1]$ vers $[f(-1);f(1)]$.

Avec $f(1)=\ln 2$, on peut conclure que :

$$\boxed{f \text{ réalise une bijection de } [-1;1] \text{ vers } [-\ln 2;\ln 2].}$$

10) On a $f^{-1}:[-\ln 2;\ln 2]\to[-1;1]$ et sur $[-1;1]$, $f'(x)>0$, donc $\forall\, x\in[-\ln 2;\ln 2]$, $f'\left(f^{-1}(x)\right)\neq 0$.

Comme f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, elle l'est sur $[-1;1]$ et ainsi :

$$\boxed{f^{-1} \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } [-\ln 2;\ln 2].}$$

11) Comme f^{-1} est de classe C^2 sur $[-\ln 2;\ln 2]$, elle l'est en 0, donc on peut utiliser la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 :

$$f^{-1}(x)=f^{-1}(0)+(f^{-1})'(0)\,x+\frac{(f^{-1})''(0)}{2}x^2+\underset{0}{o}(x^2).$$

On a $f(0)=0$, donc $f^{-1}(0)=0$, et :

- $(f^{-1})'(0)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(0)\right)}=\dfrac{1}{f'(0)}=1$;
- $(f^{-1})''(0)=-\dfrac{(f^{-1})'(0)\times f''\left(f^{-1}(0)\right)}{f'\left(f^{-1}(0)\right)^2}=-f''(0)=0$.

Donc, le développement limité à l'ordre 2 de f^{-1} en 0 est :

$$\boxed{f^{-1}(x)=x+\underset{0}{o}(x^2).}$$

Partie B

1) On a vu que f est strictement croissante et continue sur $]0;1[$, donc $f\left(]0;1[\right)=]f(0);f(1)[=]0;\ln 2[$.

Comme $\ln 2<1$, on a $f\left(]0;1[\right)\subset]0;1[$ et avec $u_0=\dfrac{1}{2}\in]0;1[$, on peut conclure immédiatement que :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in]0;1[.}$$

2) Comme f est strictement croissante sur $]0;1[$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone (strictement si $u_1\neq u_0$) et, pour connaitre son sens de variation, il faut comparer u_0 et u_1.

On a $u_1=f(u_0)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\ln\left(\dfrac{5}{4}\right)$. Il nous faut donc comparer $\dfrac{1}{2}$ et $2\ln\left(\dfrac{5}{4}\right)=\ln\left(\dfrac{25}{16}\right)$, soit $e^{½}=\sqrt{e}$ et $\dfrac{25}{16}$, ou encore e et $\left(\dfrac{25}{16}\right)^2=\dfrac{625}{256}$. Or, $\dfrac{625}{256}=\dfrac{512+128-15}{256}=2{,}5-\dfrac{15}{256}<2{,}5<e$, donc $u_1<u_0$ et ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante.}}$$

3) D'après les questions 1 et 2, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers une limite $\ell\geq 0$. De plus, comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on a $f(\ell)=\ell$, soit $\ln(1+\ell^2)=\ell^2$.

Posons $h(t)=\ln(1+t)-t$. Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$, avec $h'(t)=\dfrac{1}{1+t}-1=-\dfrac{t}{1+t}$.

Sur $\mathbb{R}_+$, $h'(t)\leq 0$ avec $h'(t)=0$ en 0 uniquement, donc h est strictement décroissante.

Avec $h(0)=0$, on obtient $h(t)<0$ pour $t>0$, donc sur $\mathbb{R}_+$, h ne s'annule qu'en 0. Ceci prouve que $\ln(1+\ell^2)=\ell^2$ pour $\ell=0$ uniquement, et ainsi :

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.}$$

Partie C

1) On a vu que f réalise une bijection strictement croissante de $[-1;1]$ vers $[-\ln 2;\ln 2]$, donc f réalise une bijection de $]0;1[$ vers $]f(0);f(1)[=]0;\ln 2[$. Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 2$, $\dfrac{1}{n}\in]0;\ln 2[$, donc $\dfrac{1}{n}$ admet un unique antécédent par f dans $]0;1[$, autrement dit :

$$\boxed{\text{Il existe un unique réel } x_n\in]0;1[\text{ tel que } f(x_n)=\frac{1}{n}.}$$

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 2$, on a $x_n=f^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et, comme f est strictement croissante sur $]0;1[$, f^{-1} est strictement croissante sur $]0;\ln 2[$ et ainsi, $(x_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante (car $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 2}$ l'est).

De plus, f^{-1} est de classe C^2 sur $[-\ln 2;\ln 2]$, donc continue et, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=f^{-1}(0)$.

Comme $f(0)=0$, on a $f^{-1}(0)=0$ et finalement :

$$\boxed{(x_n)_{n\geq 2} \text{ est strictement décroissante et converge vers 0.}}$$

3) On a vu plus haut que $f^{-1}(x)=x+\underset{0}{o}(x^2)$. Donc, $f^{-1}(x)\underset{0}{\sim} x$ at ainsi, $x_n = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n}$.

Comme la série harmonique $\sum\frac{1}{n}$ diverge :

$$\boxed{\text{La série } \sum x_n \text{ diverge.}}$$

Partie D

1) On a $f(n)=\frac{\ln(1+n^2)}{n}\sim\frac{2\ln n}{n}$. Or, $\frac{1}{n}=o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ et $\sum\frac{1}{n}$ diverge, donc :

$$\boxed{\text{La série } \sum f(n) \text{ diverge.}}$$

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$w_n = f(n)-2\frac{\ln n}{n}=\frac{\ln(1+n^2)}{n}-\frac{2\ln n}{n}=\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{\ln(n^2)}{n}-\frac{2\ln n}{n}=\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right).$$

Alors, $w_n\sim\frac{1}{n^3}$ et, comme la série de Riemann $\sum\frac{1}{n^3}$ converge :

$$\boxed{\sum w_n \text{ converge.}}$$

3) L'étude de la fonction $t\mapsto\frac{\ln t}{t}$, montre que sur $[e;+\infty[$, elle est continue, positive et strictement décroissante. On peut donc utiliser la comparaison série-intégrale à partir de 3.

Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 3$, on a $\sum_{k=3}^{n}\frac{\ln(k+1)}{k+1}\leq\sum_{k=3}^{n}\int_k^{k+1}\frac{\ln t}{t}dt\leq\sum_{k=3}^{n}\frac{\ln k}{k}$, soit pour $n\geq 4$:

$$\int_3^{n+1}2\frac{\ln t}{t}dt\leq 2\sum_{k=3}^{n}\frac{\ln k}{k}\leq 2\frac{\ln 3}{3}+\int_3^{n}2\frac{\ln t}{t}dt \quad\Leftrightarrow\quad \left(\ln(n+1)\right)^2-\left(\ln 3\right)^2\leq 2\sum_{k=3}^{n}\frac{\ln k}{k}\leq 2\frac{\ln 3}{3}+\left(\ln n\right)^2-\left(\ln 3\right)^2.$$

D'où :

$$\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^2-\frac{\left(\ln 3\right)^2}{\left(\ln n\right)^2}\leq\frac{2\sum_{k=3}^{n}\frac{\ln k}{k}}{\left(\ln n\right)^2}\leq 1+\frac{\frac{2}{3}\ln 3-\left(\ln 3\right)^2}{\left(\ln n\right)^2}.$$

Comme $\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^2=\left(1+\frac{1}{\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^2\to 1$, on obtient par le théorème des gendarmes : $\frac{2\sum_{k=3}^{n}\frac{\ln k}{k}}{\left(\ln n\right)^2}\to 1$.

Autrement dit :

$$2\sum_{k=3}^{n}\frac{\ln k}{k} \sim (\ln n)^2 .$$

Et :

$$S_n=\sum_{k=0}^{n} f(k)=\sum_{k=0}^{2} f(k)+\sum_{k=3}^{n} f(k)= f(1)+ f(2)+\sum_{k=3}^{n}\left(w_k+2\frac{\ln k}{k}\right)= f(1)+ f(2)+\sum_{k=3}^{n} w_k+2\sum_{k=3}^{n}\frac{\ln k}{k}$$

Comme $\left(f(1)+ f(2)+\sum_{k=3}^{n} w_k\right)_{n\geq 3}$ converge, on a $S_n \sim 2\sum_{k=3}^{n}\frac{\ln k}{k}$, d'où :

$$\boxed{S_n \sim (\ln n)^2}$$

Partie E

1) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et g une fonction deux fois dérivable sur I. Si on pose $h(x)=xg(x)$, la fonction h est deux fois dérivable sur I en tant que produit de telles fonctions et $\forall\, x\in I$:

$$h'(x)=g(x)+xg'(x) \quad\text{et}\quad h''(x)=xg''(x)+2g'(x) .$$

Donc, $\forall\, x\in I$, $x h''(x)+h'(x)=x^2 g''(x)+3xg'(x)+g(x)$. Alors, on a :

$$\begin{aligned}
g \text{ est solution de (E) sur } I \quad &\Leftrightarrow\ \forall\, x\in I ,\ x^2 g''(x)+3xg'(x)+g(x)=\frac{4x}{(1+x^2)^2}\\
&\Leftrightarrow\ \forall\, x\in I ,\ x h''(x)+h'(x)=\frac{4x}{(1+x^2)^2}\\
&\Leftrightarrow\ h' \text{ est solution de } (E') \text{ sur } I.
\end{aligned}$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{g \text{ est solution de (E) sur } I \quad \text{si et seulement si } h' \text{ est solution de } (E') \text{ sur } I.}$$

2) Soit I un intervalle ne contenant pas 0. Sur I, (E') se récrit :

$$y'+\frac{1}{x}y=\frac{4}{(1+x^2)^2} .$$

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $x\mapsto ke^{-\ln x}=\dfrac{k}{x}$ avec k une constante réelle.

Cherchons une solution particulière de (E') de la forme $x\mapsto \dfrac{k(x)}{x}$ avec k dérivable sur I.

En réinjectant dans (E'), on obtient $\forall\, x\in I$:

$$x\left(\frac{k'(x)}{x}-\frac{k(x)}{x^2}\right)+\frac{k(x)}{x}=\frac{4x}{(1+x^2)^2} \quad\Leftrightarrow\quad k'(x)=2\frac{2x}{(1+x^2)^2} .$$

On peut alors prendre $k(x)=-\dfrac{2}{1+x^2}$ et une solution particulière de (E') est $x\mapsto -\dfrac{2}{x(1+x^2)}$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E') \text{ sur } I \text{ sont les fonctions } x\mapsto \frac{k}{x}-\frac{2}{x(1+x^2)} \text{ avec } k\in\mathbb{R} .}$$

3) On a $\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ \dfrac{1}{x(1+x^2)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{1+x^2}$, donc :

$$\boxed{\text{Une primitive de } x \mapsto \frac{1}{x(1+x^2)} \text{ est } x \mapsto \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \text{ sur tout intervalle ne contenant pas 0.}}$$

D'après les deux questions précédentes, g est solution de (E) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0 si et seulement, en posant $h(x) = xg(x)$, $h'(x) = \dfrac{k}{x} - \dfrac{2}{x(1+x^2)}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Alors, $h(x) = k\ln|x| - 2\left[\ln|x| - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\right] + \mu$ avec $(k,\mu) \in \mathbb{R}^2$, soit :

$$h(x) = xg(x) = \lambda \ln|x| + \mu + \ln(1+x^2)$$

avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sur } I \text{ sont les fonctions } x \mapsto \lambda\frac{\ln|x|}{x} + \frac{\mu}{x} + \frac{\ln(1+x^2)}{x} \text{ avec } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2.}$$

4) D'après ce que nous venons de voir, (E) admet des solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, et, si g est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, il existe $(\lambda_1,\mu_1,\lambda_2,\mu_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1 \ln|x| + \mu_1}{x} + f(x) & \text{sur } \mathbb{R}_-^* \\ \dfrac{\lambda_2 \ln x + \mu_2}{x} + f(x) & \text{sur } \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

où *f* est la fonction de la partie A.

Cette solution doit être deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en 0.

C'est le cas de *f*, mais $\forall\,(\lambda_2,\mu_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\lambda_2 \ln x + \mu_2}{x} = \pm\infty$, donc si $(\lambda_2,\mu_2) \neq (0,0)$, la solution g n'admet pas de limite finie en 0^+, donc ne peut être continue en 0. De même, si $(\lambda_1,\mu_1) \neq (0,0)$, g n'admet pas de limite finie en 0^-. Ceci prouve que :

$$\boxed{(E) \text{ admet une unique solution maximale sur } \mathbb{R} \text{ qui est } f.}$$

Corrigé du problème d'algèbre

Partie A

1) *f* est une application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ et pour tous $P,Q\in\mathbb{R}[X]$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda P+\mu Q) &= 2(X+a)(\lambda P+\mu Q)-(X-a)^2(\lambda P+\mu Q)' \\ &= 2(X+a)(\lambda P+\mu Q)-(X-a)^2(\lambda P'+\mu Q') \\ &= \lambda\left(2(X+a)P-(X-a)^2P'\right)+\mu\left(2(X+a)Q-(X-a)^2Q'\right) \\ &= \lambda f(P)+\mu f(Q) \end{aligned}$$

Donc, *f* est linéaire et ainsi :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}[X].}$$

2) On a $f(1)=2(X+a)$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f(X^n)=2(X+a)X^n-n(X-a)^2X^{n-1}$, donc :

$$\boxed{\begin{array}{l} f(1)=2(X+a) \\ f(X^n)=(2-n)X^{n+1}+2(n+1)aX^n-na^2X^{n-1} \quad \text{pour } n\geq 1 \end{array}}$$

3) Si $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par *f*, alors $f(X^n)\in\mathbb{R}_n[X]$, donc $\deg f(X^n)\leq n$. Or, si $n\neq 2$, $\deg f(X^n)=n+1$, donc si $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par *f*, alors $n=2$

Réciproquement, on a :

$$\begin{aligned} f(1) &= 2X+2a \\ f(X) &= X^2+4aX-a^2 \\ f(X^2) &= 6aX^2-2a^2X \end{aligned}$$

Donc, $f(1), f(X), f(X^2)\in\mathbb{R}_2[X]$ et ainsi, $\mathbb{R}_2[X]$ est stable par *f*.

Ainsi :

$$\boxed{\mathbb{R}_n[X] \text{ est stable par } f \text{ si et seulement si } n=2.}$$

4) D'après la question précédente, on a immédiatement :

$$\boxed{A=M_{\mathcal{B}_c}(u)=\begin{pmatrix} 2a & -a^2 & 0 \\ 2 & 4a & -2a^2 \\ 0 & 1 & 6a \end{pmatrix}}$$

5) Remarquons que comme $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension finie, u est injective si et seulement si elle est surjective, si et seulement si elle est bijective, donc si et seulement $\det A\neq 0$.

On a :

$$\det A=\begin{vmatrix}2a & -a^2 & 0\\ 2 & 4a & -2a^2\\ 0 & 1 & 6a\end{vmatrix}=4a\begin{vmatrix}a & -a^2 & 0\\ 1 & 4a & -a\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=4a^2\begin{vmatrix}1 & -a & 0\\ 1 & 4a & -a\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}\underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{=}4a^2\begin{vmatrix}1 & -a & 0\\ 0 & 5a & -a\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=64a^3.$$

Donc, $\det A=0$ si et seulement si $a=0$ et ainsi :

$$\boxed{u \text{ est injective et surjective si est seulement si } a\neq 0.}$$

6) On a vu que si $n\neq 2$, alors $\deg f(X^n)=n+1$. Ceci se généralise en : pour tout $P\in\mathbb{R}[X]\setminus\{0\}$,

$$\deg P\neq 2 \quad\Rightarrow\quad \deg f(P)=\deg P+1.$$

De plus, $f(X^2)=6aX^2-2a^2X$. On peut alors distinguer deux cas.

- Si $a\neq 0$, $\deg f(X^2)=2$ et ainsi, pour tout $P\in\mathbb{R}[X]\setminus\{0\}$, on a $\deg f(P)\geq 1$. Ainsi, 0 n'a que 0 pour antécédent par *f* et que tout autre polynôme constant n'a pas d'antécédent par *f*. Donc, *f* est injective et non surjective.
- Si $a=0$, $f(X^2)=0$, donc *f* n'est pas injective. De plus, pour tout $P\in\mathbb{R}[X]\setminus\{0\}$, on a :

$$\begin{aligned}\deg P\geq 3 &\quad\Rightarrow\quad \deg f(P)\geq 4\\ \deg P\leq 3 &\quad\Rightarrow\quad \deg f(P)\leq 2\end{aligned}$$

  Donc, X^3 n'a pas d'antécédent par *f* et *f* n'est toujours pas surjective.

Finalement :

$$\boxed{f \text{ n'est pas surjective et injective si est seulement si } a\neq 0.}$$

Partie B

1) On a vu que pour tout $Q\in\mathbb{R}[X]$ non nul, $\deg f(Q)=1+\deg Q$ quand $\deg Q\neq 2$. Ceci reste valable si Q est nul (car alors $f(Q)=0$ et $\deg f(Q)=1+\deg Q=-\infty$). Ainsi, on a bien, pour tout $Q\in\mathbb{R}[X]$ non nul :

$$\boxed{\deg Q\neq 2 \quad\Rightarrow\quad \deg f(Q)=1+\deg Q.}$$

2) D'après ce qui précède, alors :

$$f(P)=\lambda P \quad\Rightarrow\quad \deg f(P)=\begin{cases}\deg P & \text{si } \lambda\neq 0\\ -\infty & \text{si } \lambda=0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \deg f(P)\neq 1+\deg P \quad\Rightarrow\quad \deg P=2.$$

Ainsi :

$$\boxed{P \text{ est de degré 2.}}$$

3) On a $f(P)=\lambda P$, soit :

$$2(X+a)P-(X-a)^2P'=\lambda P \quad\Leftrightarrow\quad (X-a)^2P'=(2X+2a-\lambda)P.$$

En appliquant la formule de Leibniz aux deux membres, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[(X-a)^2\right]^{(k)}P'^{(n-k)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2X+2a-\lambda)^{(k)}P^{(n-k)}$$

Si $n\geq 2$, on obtient :

$$(X-a)^2P^{(n+1)}+2n(X-a)P^{(n)}+n(n-1)P^{(n-1)}=(2X+2a-\lambda)P^{(n)}+2nP^{(n-1)}.$$

Soit :

$$(X-a)^2P^{(n+1)}=\left[2(1-n)X+2(n+1)a-\lambda\right]P^{(n)}-n(n-3)P^{(n-1)}.$$

Et pour $n=1$, on obtient en dérivant simplement $(X-a)^2P'=(2X+2a-\lambda)P$:

$$(X-a)^2P''+2(X-a)P'=2P+(2X+2a-\lambda)P'.$$

Soit $(X-a)^2P''=(4a-\lambda)P'+2P$ et la formule reste valable.

Finalement, on a bien pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{(X-a)^2P^{(n+1)}=\left[2(1-n)X+2(n+1)a-\lambda\right]P^{(n)}-n(n-3)P^{(n-1)}}$$

4) Supposons que $r\neq a$.

Montrons alors par récurrence double que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P^{(n)}(r)=0$.

- On a $P(r)=0$ et $f(P)(r)=2(r+a)P(r)-(r-a)^2P'(r)=\lambda P(r)$, donc $P'(r)=0$ car $(r-a)^2\neq 0$.
  La propriété est donc vraie aux rangs 0 et 1.
- Soit $n\in\mathbb{N}^*$, supposons la propriété vraie aux rangs $n-1$ et n, soit $P^{(n-1)}(r)=P^{(n)}(r)=0$. On a alors :

  $$(r-a)^2P^{(n+1)}(r)=\left[2(1-n)r+2(n+1)a-\lambda\right]P^{(n)}(r)-n(n-3)P^{(n-1)}(r)=0.$$

  Et toujours avec $(r-a)^2\neq 0$, on obtient $P^{(n+1)}(r)=0$, donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Or, d'après la formule de Taylor, on a $P=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{P^{(n)}(r)}{n!}(X-r)^n$. Comme $P^{(n)}(r)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, on obtient $P=0$, ce qui est absurde car P est supposé non nul. Ainsi, $r\neq a$ mène à une absurdité, donc :

$$\boxed{r=a}$$

5) On a vu que si P existe, il est de degré 2, donc $P\in\mathbb{R}_2[X]$ et ainsi :

$$\boxed{f(P)=u(P)}$$

On a alors $u(P)=\lambda P$, soit $(u-\lambda id_{\mathbb{R}_2[X]})(P)=0$, donc $P\in\ker(u-\lambda id_{\mathbb{R}_2[X]})$. Comme P n'est pas nul, ceci prouve que $u-\lambda id_{\mathbb{R}_2[X]}$ n'est pas bijective et donc que $\det\left(M_{\mathcal{B}_c}(u-\lambda id_{\mathbb{R}_2[X]})\right)=0$, soit :

$$\boxed{\det(A-\lambda I_3)=0}$$

6) En développant par rapport à la première colonne, on a :

$$\det(A-\lambda I_3)=\begin{vmatrix} 2a-\lambda & -a^2 & 0 \\ 2 & 4a-\lambda & -2a^2 \\ 0 & 1 & 6a-\lambda \end{vmatrix}=(2a-\lambda)\begin{vmatrix} 4a-\lambda & -2a^2 \\ 1 & 6a-\lambda \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} -a^2 & 0 \\ 1 & 6a-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(2a-\lambda)\left[(4a-\lambda)(6a-\lambda)+2a^2\right]+2a^2(6a-\lambda)$$

$$=(2a-\lambda)(4a-\lambda)(6a-\lambda)+2a^2(8a-2\lambda)$$

$$=(4a-\lambda)\left[(\lambda-4a+2a)(\lambda-4a-2a)+4a^2\right]$$

$$=(4a-\lambda)\left[(4a-\lambda)^2-4a^2+4a^2\right]$$

Ainsi :

$$\boxed{\det(A-\lambda I_3)=(4a-\lambda)^3}$$

La seule valeur de λ qui annule $\det(A-\lambda I_3)$ est $4a$, donc :

$$\boxed{\text{La seule valeur possible de } \lambda \text{ est } 4a.}$$

7) Nous venons de voir que si $(\lambda, P)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}[X]\setminus\{0\}$ vérifie $f(P)=\lambda P$, alors :

- $\lambda=4a$;
- $\deg P=2$ et a est la seule racine réelle ou complexe de P, donc $P=k(X-a)^2$.

Réciproquement, pour tout $k\in\mathbb{R}$:

$$f\left(k(X-a)^2\right)=k\,f\left((X-a)^2\right)=k\left(2(X+a)(X-a)^2-(X-a)^2\left[2(X-a)\right]\right)=4a\left[k(X-a)^2\right].$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Les éléments propres de } f \text{ sont les couples } \left(4a, k(X-a)^2\right) \text{ avec } k\in\mathbb{R}^*.}$$

Partie C

Avec $a=1$, on a $f(P)=2(X+1)P-(X-1)^2P'$ et $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

1) On a résout :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Qui se récrit sous forme de système :

$$\begin{cases} 2x-y=a \\ 2x+4y-2z=b \\ y+6z=c \end{cases}.$$

Qui donne :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{32}(13a+3b+c) \\ y = \dfrac{1}{16}(-3a+3b+c) \\ z = \dfrac{1}{32}(a-b+5c) \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{32}\begin{pmatrix} 13 & 3 & 1 \\ -6 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}}$$

2) On a :

$$N = A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ N^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = 0_3.$$

Donc :

$$\boxed{\text{La matrice } N \text{ est nilpotente d'indice } p=3 \ (N^2 \neq 0_3 \text{ et } N^3 = 0_3).}$$

3) On a donc $N^3 = (A-4I_3)^3 = 0_3$ et comme A et I_3 commutent, on peut écrire :

$$(A-4I_3)^3 = A^3 - 3A^2(4I_3) + 3A(4I_3)^2 - (4I_3)^3 = A^3 - 12A^2 + 48A - 64I_3.$$

Alors :

$$(A-4I_3)^3 = 0_3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{64}(A^2 - 12A + 48I_3)A = I_3$$

Donc :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{64}(A^2 - 12A + 48I_3)}$$

4) Avec $a=1$, on a vu plus haut que $f(P) = u(P) = 4P$ si et seulement si $P \in \text{Vect}\left((X-1)^2\right)$.

Donc $\ker(u - 4id_{\mathbb{R}_2[X]}) = \text{Vect}\left((X-1)^2\right)$ et donc, $\dim\ker N = \dim\ker(u - 4id_{\mathbb{R}_2[X]}) = 1$.

Avec le théorème du rang, on a $rg(N) = 3 - \dim\ker N$, soit :

$$\boxed{rg(N) = 2}$$

Autre version : on échelonne par lignes :

$$N = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + L_1]{} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_2]{} \begin{pmatrix} \boxed{-2} & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient deux pivots non nuls, donc on retrouve bien $rg(N)=2$.

Les trois colonnes sont les mêmes (et non nulles), ce qui donne immédiatement :

$$\boxed{rg(N^2)=1}$$

5) Toujours avec $a=1$, on a :

$$\left.\begin{array}{l} f(X)=u(X)=X^2+4X-1 \\ f(X^2)=u(X^2)=6X^2-2X \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} v(X)=u(X)-4X=X^2-1 \\ v(X^2)=u(X^2)-4X^2=2X^2-2X \end{array}\right.$$

Alors :

$$\begin{aligned} P_1 &= v^2(X^2)=2v(X^2)-2v(X)=2X^2-4X+2 \\ P_2 &= v(X^2)=2X^2-2X \\ P_3 &= X^2 \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} \text{Vect}\left(P_1,P_2,P_3\right) &= \text{Vect}\left(2X^2-4X+2,\, 2X^2-2X,\, X^2\right)=\text{Vect}\left(-4X+2,-2X,\, X^2\right) \\ &= \text{Vect}\left(2,-2X,\, X^2\right)=\text{Vect}\left(1,X,\, X^2\right)=\mathbb{R}_2[X] \end{aligned}$$

Donc, $\left(P_1,P_2,P_3\right)$ est une famille génératrice de 3 vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$, qui est de dimension 3 et ainsi :

$$\boxed{\mathcal{B}=\left(P_1,P_2,P_3\right) \text{ est bien une base de } \mathbb{R}_2[X].}$$

6) on vient de voir que :

$$\begin{aligned} P_1 &= 2X^2-4X+2 \\ P_2 &= 2X^2-2X \\ P_3 &= X^2 \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{P=P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

On a $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_c}=P^{-1}$. Calculons l'inverse de P en passant de P à I_3 par opération sur les lignes :

$$P=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad\Bigg|\quad I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1\leftarrow\frac{1}{2}L_1 \\ L_2\leftarrow-\frac{1}{2}L_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad\Bigg|\quad \begin{pmatrix} ½ & 0 & 0 \\ 0 & -½ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} ½ & 0 & 0 \\ -1 & -½ & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} ½ & 0 & 0 \\ -1 & -½ & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

Ainsi :

$$\boxed{P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} ½ & 0 & 0 \\ -1 & -½ & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

On pouvait aussi, en partant de $\begin{cases} P_1 = 2X^2 - 4X + 2 \\ P_2 = 2X^2 - 2X \\ P_3 = X^2 \end{cases}$, exprimer 1, X et X^2 en fonction de P_1, P_2 et P_3 :

$$\begin{cases} 1 = ½P_1 - P_2 + P_3 \\ X = -½P_2 + P_3 \\ X^2 = P_3 \end{cases}$$

7) Remarquons que $N = A - 4I_3 = M_{\mathcal{B}_c}(u - 4id_{\mathbb{R}_2[X]}) = M_{\mathcal{B}_c}(v)$ et $N^3 = 0_3$, donc $v^3 = 0$.

Alors :

$$\begin{cases} v(P_1) = v^3(X^2) = 0 \\ v(P_2) = v^2(X^2) = P_1 \\ v(P_3) = v(X^2) = P_2 \end{cases}$$

Donc :

$$M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Et comme $M_{\mathcal{B}}(u) = M_{\mathcal{B}}(v + 4id_{\mathbb{R}_2[X]}) = M_{\mathcal{B}}(v) + 4I_3$, on obtient :

$$\boxed{M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

8) On a $M_{\mathcal{B}}(u) = P^{-1}AP$, donc $A = PM_{\mathcal{B}}(u)P^{-1}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P\left[M_{\mathcal{B}}(u)\right]^n P^{-1}$.

Posons $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L^3 = 0_3$.

De plus, $M_{\mathcal{B}}(u) = L + 4I_3$ et comme L et I_3 commutent, on peut utiliser la formule du binôme.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$[M_{\mathcal{B}}(u)]^n = (L+4I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} L^k (4I_3)^{n-k} = 4^n I_3 + n\,4^{n-1} L + \frac{n(n-1)}{2} 4^{n-2} L^2 = \frac{4^{n-2}}{2} \begin{pmatrix} 32 & 8n & n(n-1) \\ 0 & 32 & 8n \\ 0 & 0 & 32 \end{pmatrix}.$$

Et ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{A^n = 4^{n-2} \begin{pmatrix} n^2 - 9n + 16 & n^2 - 5n & n^2 - n \\ -2n^2 + 10n & -2n^2 + 2n + 16 & -2n^2 - 6n \\ n^2 - n & n^2 + 3n & n^2 + 7n + 16 \end{pmatrix}}$$

9) Les matrices *A* et *B* sont semblables si et seulement s'il existe $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $B = Q^{-1}AQ$. Or :

$$B = Q^{-1}AQ \iff B - 4I_3 = Q^{-1}AQ - 4I_3 = Q^{-1}(A - 4I_3)Q = Q^{-1}NQ.$$

Ainsi, *A* et *B* sont semblables si et seulement si N et $B - 4I_3$ le sont.

On a vu que $N^2 \neq 0_3$ et $N^3 = 0_3$, donc si $B - 4I_3 = Q^{-1}NQ$ avec $Q \in GL_3(\mathbb{R})$, alors $(B-4I_3)^2 = Q^{-1}N^2Q \neq 0_3$ et $(B-4I_3)^3 = Q^{-1}N^3Q = 0_3$. Or, $B - 4I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $(B-4I_3)^2 = 0_3$. Ceci prouve que N et $B - 4I_3$ ne sont pas semblables et donc que :

$$\boxed{\text{Les matrices } A \text{ et } B \text{ ne sont pas semblables.}}$$

Partie D

1) Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, on a :

$$\begin{aligned} u(P) &= 2(X+1)P - (X-1)^2 P' = 2(X+1)(aX^2 + bX + c) - (X-1)^2(2aX + b) \\ &= (6a+b)X^2 - 2(a - 2b - c)X + 2c - b \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \langle u(P) | P \rangle &= a(6a+b) - 2(a-2b-c)b + (2c-b)c \\ &= 6a^2 - ab + 4b^2 + bc + 2c^2 = 5a^2 + \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}b^2 + \left(\frac{b}{2} + c\right)^2 + c^2 \end{aligned}$$

Donc :

$$\langle u(P) | P \rangle = 0 \iff 5a^2 = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{7}{2}b^2 = \left(\frac{b}{2} + c\right)^2 = c^2 = 0 \iff a = b = c = 0 \iff P = 0.$$

Finalement :

$$\boxed{\text{Le seul polynôme de } \mathbb{R}_2[X] \text{ orthogonal à son image par } u \text{ est 0.}}$$

2) On a vu que si $P = aX^2 + bX + c$, alors $u(P) = (6a+b)X^2 - 2(a-2b-c)X + 2c - b$, donc :

$$u(X^2 + X + 1) = 7X^2 + 4X + 1$$

Et :

$$\begin{aligned}\text{Vect}\left(X^2+X+1, u(X^2+X+1)\right) &= \text{Vect}\left(X^2+X+1, 7X^2+4X+1\right) = \text{Vect}\left(X^2+X+1, 6X^2+3X\right)\\ &= \text{Vect}\left(X^2+X+1, 2X^2+X\right) = \text{Vect}\left(X^2+X+1, X^2-1\right)\\ &= \text{Vect}\left(X+2, X^2-1\right)\end{aligned}$$

Alors $P = aX^2 + bX + c \in \left(\text{Vect}\left(X^2+X+1, u(X^2+X+1)\right)\right)^{\perp}$ si et seulement si :

$$\begin{cases}\langle P \mid X+2\rangle = 0\\ \langle P \mid X^2-1\rangle = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+2c=0\\ a-c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2c\\ a=c\end{cases} \Leftrightarrow P = cX^2 - 2cX + c = c(X-1)^2.$$

Ainsi :

$$\boxed{\left(\text{Vect}\left(X^2+X+1, u(X^2+X+1)\right)\right)^{\perp} = \text{Vect}\left((X-1)^2\right)}$$

3) On a :

$$\begin{cases} P_1 = 2X^2 - 4X + 2\\ P_2 = 2X^2 - 2X\\ P_3 = X^2\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}\langle P_1 \mid P_1\rangle = 24 & \langle P_1 \mid P_2\rangle = 12\\ \langle P_2 \mid P_2\rangle = 8 & \langle P_1 \mid P_3\rangle = 2\\ \langle P_3 \mid P_3\rangle = 1 & \langle P_2 \mid P_3\rangle = 2\end{matrix}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La base } \mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3) \text{ n'est pas orthonormée.}}$$

On pose $Q_1 = \dfrac{1}{\|P_1\|} P_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(X^2 - 2X + 1) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(X-1)^2$ et :

- $Q_2 = \alpha P_1 + \beta P_2 = 2(\alpha+\beta)X^2 - 2(2\alpha+\beta)X + 2\alpha$ avec :

$$\begin{cases}\langle P_1 \mid Q_2\rangle = 4(\alpha+\beta) + 8(2\alpha+\beta) + 4\alpha = 0\\ \langle Q_2 \mid Q_2\rangle = 4(\alpha+\beta)^2 + 4(2\alpha+\beta)^2 + 4\alpha^2 = 1\end{cases}$$

  On prend $Q_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(X^2 - 1)$.

- $Q_3 = xP_1 + yP_2 + zP_3 = (2x+2y+z)X^2 - 2(2x+y)X + 2x$ avec :

$$\begin{cases}\langle P_1 \mid Q_3\rangle = 2(2x+2y+z) + 4(2x+y) = 0\\ \langle P_2 \mid Q_3\rangle = 2(2x+2y+z) + 8(2x+y) + 4x = 0\\ \langle Q_3 \mid Q_3\rangle = (2x+2y+z)^2 + 4(2x+y)^2 + 4x^2 = 1\end{cases}$$

  On prend $Q_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(X^2 + X + 1)$.

Ainsi :

$$\boxed{\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(X^2-2X+1) \\ Q_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X^2-1) \\ Q_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(X^2+X+1) \end{aligned}}$$

4) On a $\operatorname{Vect}(P_1,P_2)=\operatorname{Vect}(Q_1,Q_2)$ et $\left(\operatorname{Vect}(P_1,P_2)\right)^{\perp}=\operatorname{Vect}(Q_3)$, donc :

$$\begin{cases} p(Q_1)=Q_1 \\ p(Q_2)=Q_2 \\ p(Q_3)=0 \end{cases}$$

Avec $Q_3=\dfrac{\sqrt{3}}{6}(P_1-3P_2+6P_3)$, on obtient :

$$\begin{cases} p(P_1)=P_1 \\ p(P_2)=P_2 \\ p(P_1)-3p(P_2)+6p(P_3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p(P_1)=P_1 \\ p(P_2)=P_2 \\ p(P_3)=-\dfrac{1}{6}P_1+\dfrac{1}{2}P_2 \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{M_{\mathcal{B}}(p)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/6 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Par ailleurs :

$$\begin{cases} p(Q_1)=Q_1 \\ p(Q_2)=Q_2 \\ p(Q_3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p(X^2)-2p(X)+p(1)=X^2-2X+1 \\ p(X^2)-p(1)=X^2-1 \\ p(X^2)+p(X)+p(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p(1)=\dfrac{1}{3}(-X^2-X+2) \\ p(X)=\dfrac{1}{3}(-X^2+2X-1) \\ p(X^2)=\dfrac{1}{3}(2X^2-X-1) \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{M_{\mathcal{B}_c}(p)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

5) Appelons d la distance de P à $\operatorname{Vect}(P_1,P_2)$. On a $d=\|P-p(P)\|$ et, si $P=aX^2+bX+c$, on a, avec la question précédente :

$$p(P)=\frac{1}{3}(2a-b-c)X^2+\frac{1}{3}(-a+2b-c)X+\frac{1}{3}(-a-b+2c).$$

Donc :

$$p - p(P) = \frac{1}{3}(a+b+c)(X^2 + X + 1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(a+b+c)Q_3 .$$

Et ainsi :

$$\boxed{d = \|P - p(P)\| = \frac{|a+b+c|}{\sqrt{3}}}$$

Corrigés des exercices divers

Exercice I

1) On a :

$$P_n = (X+1)^n - X^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k - X^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} X^k = nX^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} X^{n-2} + \ldots + nX + 1 .$$

Donc :

> Le degré de P_n est $n-1$.
>
> Le coefficient dominant de P_n est n.
>
> Le terme constant de P_n est 1.

2) On a :

$$P_n(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z+1)^n = z^n \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left(1 + \dfrac{1}{z}\right)^n = 1 \\ z \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ 1 + \frac{1}{z} = e^{i\frac{2k\pi}{n}},\ k \in \right. \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1}{e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1},\ k \in 1, n-1 \ .$$

Et pour tout $k \in 1, n-1$:

$$\frac{1}{e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1} = \frac{1}{e^{i\frac{k\pi}{n}}(e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{-i\frac{k\pi}{n}})} = \frac{1}{2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} e^{-i\frac{k\pi}{n}} = -\frac{i}{2} \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) - i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Comme $\deg P_n = n-1$, P_n admet au plus $n-1$ racines complexes.

Or, l'ensemble $\left\{ -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right), k \in 1, n-1 \right\}$ contient $n-1$ nombres complexes distincts (car pour tout $k \in 1, n-1$, $\frac{k\pi}{n} \in \left]0, \pi\right[$ et la fonction cotangente réalise une bijection de $\left]0, \pi\right[$ dans $\mathbb{R}$).

Finalement :

$$\boxed{\text{Les racines complexes de } P_n \text{ sont les } -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right) \text{ avec } k \in 1, n-1 \ .}$$

3) Les racines de P_n sont les $z_k = -\frac{1}{2}\left[1 + i\,\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right] = \frac{1}{2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} e^{-i\frac{k\pi}{n}}$ avec $k \in \; 1, n-1 \;$.

Comme le coefficient dominant de P_n est n et son terme constant est 1, on a :

$$P_n(0) = n\prod_{k=1}^{n-1}(-z_k) = 1.$$

Soit :

$$\prod_{k=1}^{n-1} z_k = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad \Leftrightarrow \quad \prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{z_k} = (-1)^{n-1}n \quad \Leftrightarrow \quad \prod_{k=1}^{n-1}\left(2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}\right) = \left(2i\right)^{n-1} e^{i\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}k}\left[\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right] = (-1)^{n-1}n\,.$$

Ainsi :

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{(-1)^{n-1}n}{\left(2i\right)^{n-1} e^{i\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}k}} = \frac{(-1)^{n-1}n}{\left(2i\right)^{n-1} e^{i\frac{\pi}{n}\frac{n(n-1)}{2}}} = \frac{(-1)^{n-1}n}{2^{n-1}i^{n-1}e^{i(n-1)\frac{\pi}{2}}} = \frac{(-1)^{n-1}n}{2^{n-1}i^{n-1}i^{n-1}} = \frac{n}{2^{n-1}}\,.$$

Donc :

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}}$$

4) D'après ce qui précède, en remplaçant *n* par 2*n*, on obtient :

$$\prod_{k=1}^{2n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{2n}{2^{2n-1}} = \frac{n}{2^{2(n-1)}}\,.$$

Or :

$$\prod_{k=1}^{2n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \left[\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right]\left[\sin\left(\frac{n\pi}{2n}\right)\right]\left[\prod_{k=n+1}^{2n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right] = \left[\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right]\left[\prod_{k=n+1}^{2n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right].$$

En posant $k' = 2n-k$ (que l'on renomme immédiatement *k*) dans le second produit, on obtient :

$$\prod_{k=n+1}^{2n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{(2n-k)\pi}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\pi - \frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right).$$

Donc $\prod_{k=1}^{2n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \left[\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right]^2$, et comme, quand $k \in \; 1, n-1 \;$, on a $0 < \frac{k\pi}{2n} < \frac{\pi}{2}$, donc $\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) > 0$, on peut écrire :

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \sqrt{\prod_{k=1}^{2n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} = \sqrt{\frac{n}{2^{2(n-1)}}} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}\,.$$

Par ailleurs, en posant $k' = n-k$ (que l'on renomme immédiatement *k*) dans le second produit, on a :

$$\prod_{k=1}^{n-1}\cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}\cos\left(\frac{(n-k)\pi}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right).$$

Alors :

$$\prod_{k=1}^{n-1}\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}{\cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}{\prod_{k=1}^{n-1}\cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} = 1 = \prod_{k=1}^{n-1}\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n}\right).$$

Finalement :

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)=\prod_{k=1}^{n-1}\cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{n-1}\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)=\prod_{k=1}^{n-1}\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n}\right)=1}$$

Exercice II

1) Le couple $(3,-2)$ est solution de $2x+3y=0$. Il en va de même pour tout couple $(3\alpha,-2\alpha)$ avec $\alpha\in\mathbb{Z}$.

Réciproquement, si $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ est solution de $2x+3y=0$, alors $3b=-2a$, donc $3\,|-2a$. Comme $2\wedge 3=1$, $3\,|\,a$ d'après le théorème de Gauss. Ainsi, $a=3\alpha$ avec $p\in\mathbb{Z}$ et $3b=-2a=-6\alpha$, donc $b=-2\alpha$ et :

$$(a,b)=(3\alpha,-2\alpha).$$

Finalement :

$$\boxed{\text{Les solutions de } 2x+3y=0 \text{ dans } \mathbb{Z}^2 \text{ sont les couples } (3\alpha,-2\alpha) \text{ avec } \alpha\in\mathbb{Z}.}$$

2) Le couple $(-k,k)$ est solution de $2x+3y=k$ dans $\mathbb{Z}^2$.

Si $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ est une solution de $2x+3y=k$, alors $2a+3b=2(-k)+3k$, donc $2(a+k)+3(b-k)=0$ et, ainsi, $(a+k,b-k)$ est solution de $2x+3y=0$. Alors, $(a+k,b-k)=(3\alpha,-2\alpha)$ avec $\alpha\in\mathbb{Z}$.

Ainsi, les solutions de $2x+3y=k$ dans $\mathbb{Z}^2$ sont les couples $(-k+3\alpha,k-2\alpha)$ avec $\alpha\in\mathbb{Z}$.

Pour avoir les solutions dans $\mathbb{N}^2$, il faut de plus :

$$\begin{cases}-k+3\alpha\geq 0\\ k-2\alpha\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3}k\leq\alpha\leq\frac{1}{2}k.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Les solutions de } 2x+3y=k \text{ dans } \mathbb{N}^2 \text{ sont les couples } (-k+3\alpha,k-2\alpha) \text{ avec } \alpha\in\mathbb{N}\cap\left[\frac{1}{3}k,\frac{1}{2}k\right].}$$

L'équation $2x+3y=k$ admet au moins une solution dans $\mathbb{N}^2$ si et seulement si $E_k=\mathbb{N}\cap\left[\frac{1}{3}k,\frac{1}{2}k\right]\neq\varnothing$. Et :

- $E_1=\mathbb{N}\cap\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]=\varnothing$;
- $E_2=\mathbb{N}\cap\left[\frac{2}{3},1\right]=\{1\}\neq\varnothing$;
- $E_3=\mathbb{N}\cap\left[1,\frac{3}{2}\right]=\{1\}\neq\varnothing$;
- $E_4=\mathbb{N}\cap\left[\frac{4}{3},2\right]=\{2\}\neq\varnothing$;
- $E_5=\mathbb{N}\cap\left[\frac{5}{3},\frac{5}{2}\right]=\{2\}\neq\varnothing$;
- pour $k\geq 6$, on a $\frac{1}{2}k-\frac{1}{3}k=\frac{1}{6}k\geq 1$ donc $E_k\neq\varnothing$.

Finalement :

$$\boxed{\text{La seule valeur de } k\in\mathbb{N}^* \text{ pour laquelle } 2x+3y=k \text{ n'a aucune solution dans } \mathbb{N}^2 \text{ est } k=1.}$$

3) a. Si face sort à chaque lancer, on a $S_n = 2n$; si pile sort à chaque lancer, on a $S_n = 3n$.

De plus, on a toujours $2n \leq S_n \leq 3n$, donc $S_n(\Omega) \subset [2n,3n]$.

Réciproquement, soit $k \in [2n,3n]$. Pour obtenir $S_n = k$ (avec *a* faces et *b* piles) à l'issue des *n* lancers, il faut :

$$\begin{cases} 2a+3b=k \\ a+b=n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(n-b)+3b=k \\ a=n-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=k-2n \\ a=3n-k \end{cases}$$

Comme $k\in[2n,3n]$, on a $k-2n\in[0,n]$ et $3n-k\in[0,n]$, et on peut obtenir $S_n = k$. Ainsi, $[2n,3n]\subset S_n(\Omega)$.

Finalement :

$$\boxed{S_n(\Omega)=[2n,3n]}$$

b. Soit $k\in[2n,3n]$.

On vient de voir que $S_n = k$ si et seulement si on obtient $k-2n$ piles (et $3n-k$ faces). Le nombre de piles obtenus à l'issue des *n* lancers suit une loi binomiale de paramètres *n* et *p*, donc pour tout $k\in[2n,3n]$:

$$\boxed{P(S_n=k)=\binom{n}{k-2n}p^{k-2n}(1-p)^{3n-k}}$$

c. Si on pose $T_n = S_n - 2n$, on a $T_n(\Omega)=[0,n]$ et T_n suit une loi binomiale de paramètres *n* et *p*.

On a donc $E(T_n)=np$ et $V(T_n)=np(1-p)$. Et $S_n = T_n + 2n$, donc :

$$E(S_n)=E(T_n)+2n \quad \text{et} \quad V(S_n)=V(T_n).$$

Ainsi :

$$\boxed{E(S_n)=np+2n \quad \text{et} \quad V(S_n)=np(1-p)}$$

d. Pour tout $k\in [\![1,n]\!]$, X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre *p* et :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(2+X_k\right)=2n+\sum_{k=1}^{n}X_k .$$

Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(S_n)=2n+\sum_{k=1}^{n}E(X_k)=2n+\sum_{k=1}^{n}p .$$

Et on retrouve :

$$\boxed{E(S_n)=2n+np}$$

4) On a vu que les couples (x,y) de $\mathbb{N}^2$ tels que $2x+3y=k$ sont les couples $(3\alpha-k,k-2\alpha)$ avec $\alpha\in E_k$ où

$$E_k=\mathbb{N}\cap\left[\frac{1}{3}k,\frac{1}{2}k\right]=\llbracket\alpha_k,\beta_k\rrbracket \text{ avec } \alpha_k=\begin{cases}E\left(\dfrac{k}{3}\right) & \text{si } 3\mid k\\ E\left(\dfrac{k}{3}\right)+1 & \text{sinon}\end{cases} \text{ et } \beta_k=E\left(\frac{k}{2}\right).$$

Notons $(S=k)$ l'évènement « la somme des points obtenus à l'issue des N tirages soit égale à k ».

Avec la loi des probabilités totales, on a :

$$P(S=k)=\sum_{n=\alpha_k}^{\beta_k}P(N=n)P_{(N=n)}(S=k).$$

Et on a $P(N=n)=\dfrac{1}{2^n}$ et $P_{(N=n)}(S=k)=P(S_n=k)=\dbinom{n}{k-2n}p^{k-2n}(1-p)^{3n-k}$, donc :

$$\boxed{P(S=k)=\sum_{n=\alpha_k}^{\beta_k}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k-2n}p^{k-2n}(1-p)^{3n-k}}$$

Exercice III

Dans toutes les questions, on est en situation d'équiprobabilité et le nombre total de mains de 5 cartes est :

$$\binom{32}{5}=\frac{32\times31\times30\times29\times28}{5\times4\times3\times2}=32\times31\times29\times7=32\times7\times899.$$

1) Pour construire une main contenant un full, il faut :

- choisir le niveau apparaissant 3 fois : 8 possibilités ;
- puis, pour chacune de ces possibilités, choisir les 3 cartes dans le niveau : $\dbinom{4}{3}=4$;
- puis, choisir le niveau apparaissant 2 fois : $8-1=7$ possibilités ;
- enfin, pour chacune de ces possibilités, choisir les 2 cartes dans le niveau : $\dbinom{4}{2}=6$.

Ainsi, le nombre de fulls possibles est : $8\times4\times7\times6$. Et :

$$\boxed{\text{La probabilité que le joueur ait un full servi est } \frac{8\times4\times7\times6}{32\times7\times899}=\frac{6}{899}.}$$

2) Dans cette question et les suivantes, on raisonne comme dans la précédente.

Pour construire une main contenant exactement deux paires, il faut :

- choisir le niveau des deux paires : $\dbinom{8}{2}=28$ possibilités ;
- choisir les 2 cartes dans le niveau de chaque paire : $\dbinom{4}{2}=6$ possibilités par paire ;
- choisir la cinquième carte (dans l'un des 6 niveaux restants) : $32-8=24$ possibilités ;

Ainsi, le nombre de mains possibles contenant exactement deux paires est : $28\times6\times6\times24$. Et :

$$\boxed{\text{La probabilité que le joueur ait exactement deux paires servies est } \frac{28\times6\times6\times24}{32\times7\times899}=\frac{108}{899}.}$$

3) Notons P_1 l'évènement « le joueur a exactement deux paires servies » et, dans toute la suite, F_k l'évènement « le joueur a un full après échange de k cartes ».

a. On cherche ici $P_{P_1}(F_1)$. Avant l'échange, il reste 27 cartes dans la pioche dont 2 cartes par niveau de chacune des deux paires, soit quatre cartes favorables pour obtenir un full après échange. Ainsi :

$$\boxed{P_{P_1}(F_1) = \frac{4}{27}}$$

b. On cherche ici $P(P_1 \cap F_1)$, soit :

$$P(P_1 \cap F_1) = P(P_1)P_{P_1}(F_1) = \frac{4}{27} \times \frac{4 \times 27}{899}.$$

Soit :

$$\boxed{P(P_1 \cap F_1) = \frac{16}{899}}$$

4) Pour construire une main contenant exactement un brelan, il faut :

- choisir le niveau du brelan : 8 possibilités ;
- choisir les trois cartes dans le niveau du brelan : $\binom{4}{3} = 4$ possibilités ;
- choisir les deux niveaux (distincts du précédent) : $\binom{7}{2} = 21$ possibilités ;
- choisir les une carte dans chacun des deux niveaux précédents : 4 possibilités par niveau.

Ainsi, le nombre de mains possibles contenant exactement un brelan est : $8 \times 4 \times 21 \times 4 \times 4$. Et, si B_1 est l'évènement « le joueur a exactement un brelan servi », on a :

$$\boxed{\text{La probabilité que le joueur ait exactement un brelan servi est } P(B_1) = \frac{8 \times 4 \times 21 \times 4 \times 4}{32 \times 7 \times 899} = \frac{48}{899}.}$$

5) a. On cherche ici $P_{B_1}(F_2)$.

Avant l'échange, il reste 27 cartes dans la pioche dont 1 carte dans le niveau du brelan, 3 cartes dans chacun des deux autres niveaux dans la main servie initialement et les 4 cartes de chacun des cinq autres niveaux.

Lors de l'échange, on choisit 2 cartes parmi ces 27 restantes ($\binom{27}{2} = 27 \times 13$ possibilités) et pour obtenir un full, il faut tirer deux cartes de même niveau. Il y a $2\binom{3}{2} + 5\binom{4}{2} = 36$ possibilités, donc :

$$\boxed{P_{B_1}(F_2) = \frac{36}{27 \times 13} = \frac{4}{39}}$$

b. On cherche ici $P(P_1 \cap F_1)$, soit :

$$P(B_1 \cap F_2) = P(B_1)P_{B_1}(F_2) = \frac{48}{899} \times \frac{4}{39}.$$

Soit :

$$\boxed{P(B_1 \cap F_2) = \frac{64}{11\,687} \approx 0,0055}$$

6) a. On cherche ici $P_{B_1}(F_1)$.

Avant l'échange, il reste toujours 27 cartes restantes dans la pioche.

Lors de l'échange, on choisit 1 carte parmi ces 27 restantes (27 possibilités) et pour obtenir un full, il faut tirer une des trois cartes du niveau que l'on a conservé. Il y a donc 3 possibilités, donc :

$$\boxed{P_{B_1}(F_2)=\frac{3}{27}=\frac{1}{9}}$$

b. On cherche ici $P(P_1 \cap F_1)$, soit :

$$P(B_1 \cap F_2)=P(B_1)P_{B_1}(F_2)=\frac{48}{899}\times\frac{1}{9}.$$

Soit :

$$\boxed{P(B_1 \cap F_1)=\frac{16}{2\,697}\approx 0{,}0059}$$

c. On a $\dfrac{P(B_1 \cap F_1)}{P(B_1 \cap F_2)}=\dfrac{13}{12}>1$, donc $P(B_1 \cap F_1)>P(B_1 \cap F_2)$ et ainsi :

$$\boxed{\text{La meilleure stratégie est d'échanger une seule carte.}}$$

Exercice IV

1) Avec la loi des probabilités totales, on a :

$$\begin{cases} a_{n+1}=P(A_{n+1})=P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1})+P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1})+P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1})=a_nP_{A_n}(A_{n+1})+b_nP_{B_n}(A_{n+1})+c_nP_{C_n}(A_{n+1}) \\ b_{n+1}=P(B_{n+1})=P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1})+P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1})+P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1})=a_nP_{A_n}(B_{n+1})+b_nP_{B_n}(B_{n+1})+c_nP_{C_n}(B_{n+1}) \\ c_{n+1}=P(C_{n+1})=P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1})+P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1})+P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1})=a_nP_{A_n}(C_{n+1})+b_nP_{B_n}(C_{n+1})+c_nP_{C_n}(C_{n+1}) \end{cases}$$

Et, d'après l'énoncé $P_{A_n}(A_{n+1})=0$ et :

$$P_{B_n}(A_{n+1})=P_{C_n}(A_{n+1})=P_{C_n}(B_{n+1})=P_{B_n}(C_{n+1})=\frac{1}{4} \text{ et } P_{A_n}(B_{n+1})=P_{B_n}(B_{n+1})=P_{A_n}(C_{n+1})=P_{C_n}(C_{n+1})=\frac{1}{2}.$$

D'où :

$$\begin{cases} a_{n+1}=\frac{1}{4}b_n+\frac{1}{4}c_n \\ b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{4}b_n+\frac{1}{2}c_n \end{cases}$$

Soit :

$$\boxed{X_{n+1}=MX_n \text{ avec } M=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

2) On a $P^{-1}=\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix}0 & 5 & -5\\ 2 & 2 & 2\\ -4 & 1 & 1\end{pmatrix}$ et on vérifie alors que l'on a bien :

$$\boxed{M=PDP^{-1}}$$

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $M^n=PD^nP^{-1}=\dfrac{1}{10}\dfrac{1}{4^n}\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4^n & 0\\ 0 & 0 & (-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 5 & -5\\ 2 & 2 & 2\\ -4 & 1 & 1\end{pmatrix}$, soit :

$$\boxed{M^n=\frac{1}{10}\frac{1}{4^n}\begin{pmatrix}2\times4^n+8(-1)^n & 2\times4^n-2(-1)^n & 2\times4^n-2(-1)^n\\ 4\times4^n-4\times(-1)^n & 5+4\times4^n+(-1)^n & -5+4\times4^n+(-1)^n\\ 4\times4^n-4\times(-1)^n & -5+4\times4^n+(-1)^n & 5+4\times4^n+(-1)^n\end{pmatrix}}$$

Une récurrence simple permet de prouver que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $X_n=M^nX_0$ avec $X_0=\begin{pmatrix}a_0\\ b_0\\ c_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, d'où :

$$\boxed{X_n=\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\frac{1}{4^n}\begin{pmatrix}2\times4^n+8(-1)^n\\ 4\times4^n-4\times(-1)^n\\ 4\times4^n-4\times(-1)^n\end{pmatrix}}$$

<u>Exercice V</u>

Dans tout l'exercice, pour *n* lancers, on notera un résultat sous la forme d'un « mot » de *n* lettres (*P* ou *F*), la $k^{\text{ième}}$ lettre étant *P* ou *F*, suivant que l'on a obtenu pile ou face au $k^{\text{ième}}$ lancer. Par exemple : *PFPFF* pour 5 lancers.

Les lancers sont indépendants, donc à chaque lancer, on a 1 chance sur 2 d'obtenir pile (et 1 chance sur 2 d'obtenir face), donc pour *n* lancers, tous les « mots » possibles sont équiprobables, de probabilité $\dfrac{1}{2^n}$.

1) X_2 est le nombre de points obtenus à l'issu de 2 lancers. On a $X_2(\Omega)=\{0,1\}$ et :

$$P(X_2=1)=P(PF)+P(FP)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\quad\text{et}\quad P(X_2=0)=\frac{1}{2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{X_2 \text{ suit une loi binomiale de paramètre } \frac{1}{2},\ E(X_2)=\frac{1}{2} \text{ et } V(X_2)=\frac{1}{4}.}$$

X_3 est le nombre de points obtenus à l'issu de 3 lancers. On a $X_3(\Omega)=\{0,1,2\}$ et :

$$\boxed{\begin{cases}P(X_2=0)=P(FFF)+P(PPP)=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}\\[2mm] P(X_2=1)=P(PPF)+P(PFF)+P(FFP)+P(FPP)=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}\\[2mm] P(X_2=2)=P(PFP)+P(FPF)=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}\end{cases}}$$

On a :

$$E(X_3)=\frac{1}{4}\times 0+\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{4}\times 2=1$$

$$E(X_3^{\,2})=\frac{1}{4}\times 0^2+\frac{1}{2}\times 1^2+\frac{1}{4}\times 2^2=\frac{3}{2}$$

$$V(X_3)=E(X_3^{\,2})-E(X_3)^2=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$$

Donc :

$$\boxed{E(X_3)=1 \qquad V(X_3)=\frac{1}{2}}$$

2) Pour $n\geq 2$, X_n peut valoir toutes les valeurs entières entre 0 (on obtient toujours le même résultat) et $n-1$ (le résultat change à chaque lancer). Donc :

$$\boxed{X_n(\Omega)=\ 0,n-1\ }$$

On a :

$$P\left(X_n=0\right)=P\left(FF...F\right)+P\left(PP...P\right)=\frac{2}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$P\left(X_n=n-1\right)=P\left(FPFPFP...\right)+P\left(PFPFPF...\right)=\frac{2}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}$$

Donc :

$$\boxed{P\left(X_n=0\right)=P\left(X_n=n-1\right)=\frac{1}{2^{n-1}}}$$

3) Soit $k\in\ 1,n\ $. Pour obtenir $X_{n+1}=k$, il faut avoir obtenu :

- soit $X_n=k$ et avoir le même résultat aux $n^{\text{ième}}$ et $(n+1)^{\text{ième}}$ lancer : $P_{(X_n=k)}\left(X_{n+1}=k\right)=\frac{1}{2}$;
- soit $X_n=k-1$ et ne pas avoir le même résultat aux $n^{\text{ième}}$ et $(n+1)^{\text{ième}}$ lancer : $P_{(X_n=k-1)}\left(X_{n+1}=k\right)=\frac{1}{2}$.

D'après la loi des probabilités totales, on a alors :

$$P\left(X_{n+1}=k\right)=P_{(X_n=k)}\left(X_{n+1}=k\right)P\left(X_n=k\right)+P_{(X_n=k-1)}\left(X_{n+1}=k\right)P\left(X_n=k-1\right).$$

Soit :

$$\boxed{P\left(X_{n+1}=k\right)=\frac{1}{2}P\left(X_n=k\right)+\frac{1}{2}P\left(X_n=k-1\right)}$$

4) On a $Q_n(s)=\sum_{k=0}^{n-1}P\left(X_n=k\right)s^k$. La fonction Q_n est polynomiale donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

(i) $Q_n(1)=\sum_{k=0}^{n-1}P\left(X_n=k\right)$, soit :

$$\boxed{Q_n(1)=1}$$

Pour tout $s\in\mathbb{R}$, $Q_n'(s)=\sum_{k=1}^{n-1}kP\left(X_n=k\right)s^{k-1}$, donc $Q_n'(1)=\sum_{k=1}^{n-1}kP\left(X_n=k\right)=\sum_{k=0}^{n-1}kP\left(X_n=k\right)$, soit :

$$\boxed{Q_n'(1)=E(X_n)}$$

Si $n\geq 3$, on a $Q_n''(s)=\sum_{k=2}^{n-1}k(k-1)P\left(X_n=k\right)s^{k-2}$ (et $Q_n''(s)=0$ pour $n=2$), donc :

$$Q_n''(1)=\sum_{k=2}^{n-1}k(k-1)P\left(X_n=k\right)=\sum_{k=0}^{n-1}k(k-1)P\left(X_n=k\right)=\sum_{k=0}^{n-1}k^2P\left(X_n=k\right)-\sum_{k=0}^{n-1}kP\left(X_n=k\right)=E(X_n^2)-E(X_n).$$

Or, $V(X_n)=E(X_n^2)-E(X_n)^2$, donc :

$$V(X_n)=Q_n''(1)+E(X_n)-E(X_n)^2.$$

Soit :

$$\boxed{V(X_n)=Q_n''(1)+Q_n'(1)-Q_n'(1)^2}$$

(ii) On a, pour tout $s\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
Q_{n+1}(s)&=\sum_{k=0}^{n}P\left(X_{n+1}=k\right)s^k=P\left(X_{n+1}=0\right)+\sum_{k=1}^{n}P\left(X_{n+1}=k\right)s^k\\
&=\frac{1}{2^n}+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2}P\left(X_n=k\right)+\frac{1}{2}P\left(X_n=k-1\right)\right]s^k=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^{n-1}}+\sum_{k=1}^{n}P\left(X_n=k\right)s^k+\sum_{k=1}^{n}P\left(X_n=k-1\right)s^k\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[P\left(X_n=0\right)+\left(\sum_{k=1}^{n-1}P\left(X_n=k\right)s^k+P\left(X_n=n\right)s^n\right)+\sum_{k=0}^{n-1}P\left(X_n=k\right)s^{k+1}\right]
\end{aligned}$$

Or, $P\left(X_n=n\right)=0$, donc :

$$Q_{n+1}(s)=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n-1}P\left(X_n=k\right)s^k+s\sum_{k=0}^{n-1}P\left(X_n=k\right)s^k\right]=\frac{1}{2}\left[Q_n(s)+sQ_n(s)\right].$$

Soit :

$$\boxed{Q_{n+1}(s)=\frac{1+s}{2}Q_n(s)}$$

(iii) A $s\in\mathbb{R}$ fixé, la suite $\left(Q_n(s)\right)_{n\geq 2}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1+s}{2}$, donc pour tout $n\geq 2$:

$$Q_n(s)=\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2}Q_2(s).$$

Et $Q_2(s)=\sum_{k=0}^{1}P\left(X_2=k\right)s^k=P\left(X_2=0\right)+P\left(X_2=1\right)s=\frac{1+s}{2}$, donc pour tout $s\in\mathbb{R}$ et tout entier $n\geq 2$:

$$\boxed{Q_n(s)=\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1}}$$

(iv) On a :

$$\left.\begin{aligned} &Q_n'(s) = \frac{n-1}{2}\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2} \\ &Q_n''(s) = \begin{cases} \dfrac{(n-1)(n-2)}{4}\left(\dfrac{1+s}{2}\right)^{n-3} & \text{pour } n \geq 3 \\ 0 & \text{pour } n = 2 \end{cases} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} Q_n'(1) = \dfrac{n-1}{2} \\ Q_n''(1) = \dfrac{(n-1)(n-2)}{4} \end{cases}.$$

Et avec $E(X_n) = Q_n'(1)$ et $V(X_n) = Q_n''(1) + Q_n'(1) - Q_n'(1)^2$, on obtient :

$$\boxed{E(X_n) = \frac{n-1}{2} \qquad V(X_n) = \frac{n-1}{4}}$$