Corrigés des TD du chapitre 9

Exercice 1

Il est clair que si $k = f'(a)$ alors $c = a$ convient et si $k = f'(b)$, alors $c = b$ convient.

On considère maintenant *k* tel que $f'(a) < k < f'(b)$.

- Supposons $k = 0$. On a donc $f'(a) < 0 < f'(b)$.

  La fonction *f* est dérivable sur $[a, b]$, donc continue sur $[a, b]$ et comme $[a, b]$ est un segment, *f* admet un minimum atteint en $c \in [a, b]$.

  Mais $f'(a) < 0$ donc $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$. Ceci implique que $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$, soit $f(x) < f(a)$, au voisinage de a^+ donc que le minimum de *f* n'est pas atteint en *a* et $c \neq a$.

  De même avec $f'(b) > 0$, on prouve que $c \neq b$.

  Ainsi, *f* atteint un minimum en $c \in]a, b[$ donc f' s'annule (et change de signe) en *c*.

- Supposons *k* quelconque tel que $f'(a) < k < f'(b)$.

  Posons $g(x) = f(x) - kx$.

  La fonction *g* est dérivable sur $[a, b]$ et $g'(x) = f'(x) - k$ donc $g'(a) < 0 < g'(b)$. Ainsi, *g* vérifie les hypothèses du cas précédent, donc il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui revient à $f'(c) = k$.

Finalement, pour tout $k \in \left[f'(a), f'(b) \right]$:

$$\boxed{\text{Il existe } c \in [a, b] \text{ tel que } f'(c) = k.}$$

Exercice 2

1) On a $[x_{n+1}, x_n] \subset]0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc *f* est de classe C^1 sur $[x_{n+1}, x_n]$ et on peut appliquer le théorème des accroissements finis : il existe $c_n \in]x_{n+1}, x_n[$ tel que $\dfrac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} = f'(c_n)$ et donc :

$$\left| \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} \right| = \left| f'(c_n) \right| \leq M .$$

Ceci prouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\left| f(x_{n+1}) - f(x_n) \right| \leq M \left| x_{n+1} - x_n \right|}$$

Soient maintenant $n, p \in \mathbb{N}$. On a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\left| f(x_{k+1}) - f(x_k) \right| \leq M \left| x_{k+1} - x_k \right| = M \left| \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^k} \right| = \frac{M}{2^{k+1}} .$$

Et si $n \geq 1$:

$$\left| f(x_{n+p}) - f(x_p) \right| = \left| \sum_{k=p}^{n+p-1} \left[f(x_{k+1}) - f(x_k) \right] \right| \leq \sum_{k=p}^{n+p-1} \left| f(x_{k+1}) - f(x_k) \right| \leq \sum_{k=p}^{n+p-1} \frac{M}{2^{k+1}} .$$

Enfin :

$$\sum_{k=p}^{n+p-1}\frac{M}{2^{k+1}}=\frac{M}{2^{p+1}}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{M}{2^p}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\leq\frac{M}{2^p}.$$

En remarquant que la relation voulue est immédiatement vraie quand $n=0$, on a bien pour tous $n,p\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{\left|f(x_{n+p})-f(x_p)\right|\leq\frac{M}{2^p}}$$

2) En prenant $p=0$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\left|f(x_n)-f(x_0)\right|=\left|f(x_n)-f(1)\right|\leq M \quad\Rightarrow\quad f(1)-M\leq f(x_n)\leq f(1)+M .$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } \left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée.}}$$

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\sup\limits_{k\geq n} f(x_k)$ est bien défini car $\left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et $u_n=\max\left(f(x_n),u_{n+1}\right)$, donc :

$$u_n\geq u_{n+1}.$$

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme $\left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi et donc :

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers une limite finie } L.}$$

4) En intervertissant n et p dans le résultat de la question 1, on a pour tous $n,p\in\mathbb{N}$, $\left|f(x_{n+p})-f(x_n)\right|\leq\frac{M}{2^n}$.

On peut récrire cela sous la forme : pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout entier $k\geq n$, $\left|f(x_k)-f(x_n)\right|\leq\frac{M}{2^n}$.

En passant au sup sur $k\geq n$, on obtient :

$$\left|\sup_{k\geq n} f(x_k)-f(x_n)\right|\leq\frac{M}{2^n}.$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{\left|u_n-f(x_n)\right|\leq\frac{M}{2^n}}$$

On a alors pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\left|L-f(x_n)\right|=\left|L-u_n+u_n-f(x_n)\right|\leq\left|L-u_n\right|+\left|u_n-f(x_n)\right|\leq\left|L-u_n\right|+\frac{M}{2^n}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left|L-u_n\right|+\frac{M}{2^n}\right)=0$, donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=L}$$

5) Pour tout $x \in]0,1]$, il existe un unique $N_x \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{2^{N_x+1}} < x \leq \dfrac{1}{2^{N_x}}$: $N_x = E\left(-\dfrac{\ln x}{\ln 2}\right)$.

De la même façon que dans la question 1, on prouve qu'il existe $c_x \in \left]x, \dfrac{1}{2^{N_x}}\right[$ tel que :

$$\frac{f(x)-f(x_{N_x})}{x-x_{N_x}} = f'(c_x) \quad \Rightarrow \quad \left|f(x)-f(x_{N_x})\right| = \left|f'(c_x)\right|\left|x-x_{N_x}\right| \leq \left|f'(c_x)\right|\left|x_{N_x+1}-x_{N_x}\right| \leq \frac{M}{2^{N_x+1}}$$

On a alors :

$$\left|f(x)-L\right| \leq \left|f(x)-f(x_{N_x})\right| + \left|f(x_{N_x})-L\right| \leq \frac{M}{2^{N_x+1}} + \left|f(x_{N_x})-L\right|.$$

Or, quand $x \to 0^+$, $N_x \to +\infty$ donc $f(x_{N_x}) \to L$ et $\dfrac{M}{2^{N_x+1}} \to 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{M}{2^{N_x+1}} + \left|f(x_{N_x})-L\right|\right) = 0$, ce qui à nouveau grâce au théorème des gendarmes, on a :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = L}$$

Exercice 3

1) Posons $g(x) = \|f(x)\|^2$. Comme *f* est deux fois dérivable sur *I*, *g* l'est aussi avec pour tout $x \in I$:

$$g'(x) = 2\big(f'(x) \mid f(x)\big) \quad \text{et} \quad g''(x) = 2\Big[\|f'(x)\|^2 + \big(f''(x) \mid f(x)\big)\Big].$$

Or, $\|f\|$ est constante, donc *g* aussi et ainsi, $g' = g'' = 0$, donc pour tout $x \in I$:

$$g''(x) = 2\Big[\|f'(x)\|^2 + \big(f''(x) \mid f(x)\big)\Big] = 0 \quad \Rightarrow \quad \big(f''(x) \mid f(x)\big) = -\|f'(x)\|^2 \leq 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } \|f\| \text{ est constante, } \big(f \mid f''\big) \text{ est à valeurs négatives.}}$$

Interprétation cinématique :

Si on pose $f(t) = \overrightarrow{OM}$, $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = f'(t)$ est la vitesse et $\vec{a} = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = f''(t)$ est l'accélération du mobile *M*.
Si $\|f(t)\| = OM = cste$, le mobile a une trajectoire circulaire.

Dans ce cas, on a $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{v} = 0$, le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire circulaire et $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{a} \leq 0$ indique que la composante colinéaire à $\overrightarrow{OM}$ de l'accélération $\vec{a}$ est de sens contraire au vecteur $\overrightarrow{OM}$: cela correspond à la force centripète.

2) Tel qu'indiqué, considérons la fonction $g : x \mapsto \|f(x)\|^2 e^{-2kx}$, définie sur *I* et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
Comme *f* est dérivable sur *I*, $x \mapsto \|f(x)\|^2$ l'est aussi de dérivée $x \mapsto 2\big(f'(x) \mid f(x)\big)$. Alors, *g* est dérivable sur *I*, avec pour tout $x \in I$:

$$g'(x) = 2\big(f'(x) \mid f(x)\big)e^{-2kx} - 2k\|f(x)\|^2 e^{-2kx} = 2\Big(\big(f'(x) \mid f(x)\big) - k\|f(x)\|^2\Big)e^{-2kx}.$$

Or, on a $\|f'(x)\| \leq k\|f(x)\|$ et grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$\left|\big(f'(x) \mid f(x)\big)\right| \leq \|f'(x)\|.\|f(x)\| \leq k\|f(x)\|^2 \quad \Rightarrow \quad -k\|f(x)\|^2 \leq \big(f'(x) \mid f(x)\big) \leq k\|f(x)\|^2 \quad \textbf{(1)}.$$

Donc, $g'(x) \leq 0$ et g est décroissante sur I.

Si f s'annule en un point $a \in I$, alors $g(a) = \|f(a)\|^2 e^{-2ka} = 0$ et ainsi, pour tout $x \in I$ tel que $x \geq a$, on a $g(x) \leq g(a) = 0$ et comme g est positive, on obtient $g(x) = 0$ et donc :

$$f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in I \text{ tel que } x \geq a.$$

Pour montrer que g est nulle à gauche de a aussi, la double inégalité **(1)**, nous invite à considérer la fonction $h : x \mapsto \|f(x)\|^2 e^{2kx}$, qui comme g, est positive et dérivable sur I, avec pour tout $x \in I$:

$$h'(x) = 2\big(f'(x) \mid f(x)\big)e^{2kx} + 2k\|f(x)\|^2 e^{2kx} = 2\Big(\big(f'(x) \mid f(x)\big) + k\|f(x)\|^2\Big)e^{2kx}.$$

Grâce à **(1)**, on a $h'(x) \geq 0$, donc h est croissante sur I et ainsi, pour tout $x \in I$ tel que $x \leq a$, $h(x) \leq h(a) = 0$, ce qui donne $h(x) = 0$ et donc :

$$f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in I \text{ tel que } x \leq a.$$

Finalement, on a $f(x) = 0$ pour tout $x \in I$, et ainsi :

Si la fonction f s'annule en un point de I, alors elle est nulle sur I.

Exercice 4

1) On a $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{t} \big[f(t) - f(kt) \big] \right) = \ell$ donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall t \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\},\ \left\| \frac{1}{t}\big[f(t) - f(kt)\big] - \ell \right\| \leq \varepsilon.$$

Or, $k \in]0,1[$, donc pour tout $i \in \mathbb{N}$, $0 < k^i \leq 1$ (égal à 1 pour $i = 0$) et pour tout $t \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}$, on a :

$$0 < |t| \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad 0 < |k^i t| \leq k^i \alpha \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad \left\| \frac{1}{k^i t}\big[f(k^i t) - f(k k^i t)\big] - \ell \right\| \leq \varepsilon.$$

Et finalement, on a bien :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall t \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\},\ \forall i \in \mathbb{N},\ \left\| \frac{1}{k^i t}\big[f(k^i t) - f(k^{i+1} t)\big] - \ell \right\| \leq \varepsilon}$$

2) Avec les notations de la question précédente, on a pour tout $t \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\left\| \sum_{i=0}^{p-1} \left(\frac{1}{t}\big[f(k^i t) - f(k^{i+1} t)\big] - k^i \ell \right) \right\| \leq \sum_{i=0}^{p-1} \left\| \frac{1}{t}\big[f(k^i t) - f(k^{i+1} t)\big] - k^i \ell \right\| \leq \sum_{i=0}^{p-1} \varepsilon k^i = \varepsilon \sum_{i=0}^{p-1} k^i.$$

Or :

$$\sum_{i=0}^{p-1} \left(\frac{1}{t}\big[f(k^i t) - f(k^{i+1} t)\big] - k^i \ell \right) = \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{p-1} \big[f(k^i t) - f(k^{i+1} t)\big] - \left(\sum_{i=0}^{p-1} k^i \right) \ell = \frac{1}{t}\big[f(t) - f(k^p t)\big] - \left(\sum_{i=0}^{p-1} k^i \right) \ell.$$

Avec $\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} k^i = \frac{1 - k^p}{1 - k}$, on obtient :

$$\left\| \frac{1}{t}\big[f(t) - f(k^p t)\big] - \frac{1 - k^p}{1 - k} \ell \right\| \leq \frac{1 - k^p}{1 - k} \varepsilon.$$

Or, $\lim\limits_{p\to+\infty} k^p = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, donc en passant à la limite quand $p \to +\infty$ dans l'inégalité ci-dessus (qui est vraie quel que soit *p*), on obtient :

$$\left\| \frac{1}{t}\left[f(t) - f(0) \right] - \frac{1}{1-k}\ell \right\| \leq \frac{1}{1-k}\varepsilon .$$

Ainsi, avec $K = \dfrac{1}{1-k} > 0$, on a :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, t \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\},\ \left\| \frac{1}{t}\left[f(t) - f(0) \right] - \frac{1}{1-k}\ell \right\| \leq K\varepsilon$$

Ceci prouve que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{t}\left[f(t) - f(0) \right] = \dfrac{1}{1-k}\ell$ et donc que :

$$\boxed{f \text{ est dérivable en 0 avec } f'(0) = \frac{1}{1-k}\ell .}$$

Exercice 5

Dans ce qui suit, on munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique, et orienté par sa base canonique, notée $\mathcal{B}_c = (E_1, E_2, \ldots, E_n)$ et on appelle *u* l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à *A*.

On note $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ où les x_i sont des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On notera et S l'espace vectoriel de ses solutions de $(S): X' = AX$.

a. A est une matrice de projection orthogonale sur un plan *F* (avec $n \geq 3$).

Il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (V_1, V_2, \ldots, V_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $F = \mathrm{Vect}(V_1, V_2)$.

Avec $P = P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}} \in O_n(\mathbb{R})$, on a alors :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = D = diag\left(1, 1, 0, \ldots, 0\right) = P^{\top}AP \quad \Leftrightarrow \quad A = PDP^{\top}.$$

Si on pose $Y = P^{\top}X = (y_i)_{1\leq i\leq n}$, on a :

$$X' = AX \quad \Leftrightarrow \quad X' = PDP^{\top}X \quad \Leftrightarrow \quad P^{\top}X' = DP^{\top}X \quad \Leftrightarrow \quad Y' = DY \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y'_1 = y_1 \\ y'_2 = y_2 \\ y'_k = 0, \forall\, k \in 3, n \end{cases}$$

Et on obtient, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y_1(t) = c_1 e^t \\ y_2(t) = c_2 e^t \\ y_k = c_k,\ \forall\, k \in 3, n \end{cases}$$

avec $(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.

Avec $X = PY$, on aboutit à :

$$\boxed{S = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto e^t V_1, t \mapsto e^t V_2, t \mapsto V_3, \ldots, t \mapsto V_n \right)}$$

b. Si A est une nilpotente d'indice n, alors $A^{n-1} \neq 0_n$ (et $A^n = 0_n$), donc il existe $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A^{n-1}X_0 \neq 0$ et $A^n X_0 = 0$. La famille $\mathcal{B} = \left(X_0, AX_0, A^2X_0, \dots, A^{n-1}X_0\right)$ est alors une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et dans cette base $\mathcal{B}$, la matrice de u est alors :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En procédant comme dans la question précédente, avec $P = P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}}$ et $Y = P^{-1}X$, on obtient le système :

$$\begin{cases} y'_1 = 0 \\ y'_k = y_{k-1}, \ \forall\, k \in \ 2, n \end{cases}$$

Ceci donne pour tous $k \in \ 1, n$ et $t \in \mathbb{R}$:

$$y_k(t) = c_1 t^{k-1} + \dots + c_{k-1} t + c_k = \sum_{i=1}^{k} c_i t^{k-i}$$

avec $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.

Et, avec $X = PY$, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k} c_i t^{k-i} \right) A^{k-1} X_0 = \sum_{i=1}^{n} \left(c_i \sum_{k=i}^{n} t^{k-i} A^{k-1} X_0 \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(c_i \sum_{k=0}^{n-i} t^k A^{k+i-1} X_0 \right).$$

Ce qui nous donne :

$$\boxed{S_{(H)} = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto \sum_{k=0}^{n-i} t^k A^{k+i-1} X_0, \ i \in \ 1, n \right)}$$

Exercice 6

Remarquons que $\vec{v} = (1, 1, 0)$ est orthogonale à $\vec{u}$, donc si $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = 2(-1, 1, 1)$, $(\vec{v}, \vec{w})$ est une base orthogonale de $P = (\vec{u})^{\perp}$.

Soit $\vec{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une éventuelle solution de $\vec{f}\,' \wedge \vec{u} = \vec{f}$. On a alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\vec{f}(t) \in P$ donc :

$$\vec{f}(t) = x(t)\vec{v} + y(t)\vec{w}$$

où x et y sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (car $\vec{f}$ l'est).

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\vec{f}\,'(t) \wedge \vec{u} = \vec{f}(t) \iff -x'(t)\vec{w} + 6y'(t)\vec{v} = x(t)\vec{v} + y(t)\vec{w} \iff \begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = \dfrac{1}{6} x(t) \end{cases}$$

Comme où x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$, x' et y' le sont aussi et en dérivant la première équation, on obtient :

$$x''(t) = -y'(t) = -\frac{1}{6} x(t).$$

Alors, $x(t) = a\cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{6}}\right) + b\sin\left(\dfrac{t}{\sqrt{6}}\right)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $y(t) = -x'(t) = \dfrac{a}{\sqrt{6}}\sin\left(\dfrac{t}{\sqrt{6}}\right) - \dfrac{b}{\sqrt{6}}\cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{6}}\right)$.

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\vec{f}(t) &= \left(a\cos\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)+b\sin\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)\right)\vec{v}+\left(\frac{a}{\sqrt{6}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)-\frac{b}{\sqrt{6}}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)\right)\vec{w} \\ &= a\left[\cos\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)\vec{v}+\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)\vec{w}\right]+b\left[\sin\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)\vec{v}-\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)\vec{w}\right].\end{aligned}$$

Réciproquement, on montre que les fonctions ci-dessus sont bien solution de l'équation et ainsi :

$$\boxed{S_{(H)} = \mathrm{Vect}\left(\cos\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)\vec{v}+\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)\vec{w}, \sin\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)\vec{v}-\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)\vec{w}\right) \text{ avec } \vec{v}=(1,1,0) \text{ et } \vec{w}=2(-1,1,1).}$$

Exercice 7

Supposons que $y''+a(t)y'+b(t)y=0$ admet deux solutions y_1 et y_2 telles que pour tout $t \in I$, $y_2(t)=t\,y_1(t)$.

Alors, pour tout $t \in I$:

$$\begin{cases} y'_2(t)=t\,y'_1(t)+y_1(t) \\ y''_2(t)=t\,y''_1(t)+2y'_1(t)\end{cases}$$

D'où :

$$y''_2(t)+a(t)y'_2(t)+b(t)y_2(t)=t\left[y''_1(t)+a(t)y'_1(t)+b(t)y_1(t)\right]+2y'_1(t)+a(t)y_1(t)=2y'_1(t)+a(t)y_1(t)$$

Comme $y''_2+ay'_2+by_2=0$, on obtient :

$$2y'_1+ay_1=0.$$

Comme *a* est de classe C^1 sur *I*, on peut dériver la relation ci-dessus et on obtient :

$$2y''_1+a'y_1+ay'_1=0.$$

Et, avec $2y'_1+ay_1=0$, soit $2y'_1=-ay_1$, et $y''_1+ay'_1+by_1=0$, on peut écrire :

$$\left.\begin{array}{l} 2y''_1+a'y_1+ay'_1=0 \\ y''_1+ay'_1+by_1=0 \\ 2y'_1=-ay_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a^2y_1+2a'y_1=4by_1.$$

Comme y_1 n'est pas nulle sur *I* mais y est continue, il existe au moins un intervalle $J \subset I$, non réduit à un point, sur lequel y_1 ne s'annule pas. On obtient alors $a^2+2a'=4b$ sur *J*.

Finalement, une condition nécessaire sur *a* et *b* pour que l'équation $y''+a(t)y'+b(t)y=0$ admette deux solutions non nulles y_1 et y_2 telles que pour tout $t \in I$, $y_2(t)=t\,y_1(t)$ est :

$$\boxed{a^2+2a'=4b \text{ sur tout intervalle inclus dans } I \text{ sur lequel } y_1 \text{ ne s'annule pas.}}$$

Supposons que $a^2+2a'=4b$. L'équation se récrit alors :

$$y''+ay'+\frac{1}{4}(a^2+2a')y=0.$$

Posons $z=y'+\frac{1}{2}ay$. On a alors (avec $y''=-ay'-\frac{1}{4}a^2y-\frac{1}{2}a'y$) :

$$z'=y''+\frac{1}{2}ay'+\frac{1}{2}a'y=-ay'-\frac{1}{4}a^2y-\frac{1}{2}a'y+\frac{1}{2}ay'+\frac{1}{2}a'y=-\frac{1}{2}a\left(y'+\frac{1}{2}ay\right)=-\frac{1}{2}az.$$

Donc z est solution de $z'+\frac{1}{2}az=0$, soit, si A est une primitive de a sur I :

$$z:t\mapsto Ke^{-\frac{1}{2}A(t)} \quad \text{avec } K \text{ constante.}$$

Alors, z est solution de $y'+\frac{1}{2}a(t)y=Ke^{-\frac{1}{2}A(t)}$. Les solutions le l'équation sans second membre sont les fonctions $z:t\mapsto Ce^{-\frac{1}{2}A(t)}$ avec C constante.

On cherche une solution particulière de la forme $t\mapsto C(t)e^{-\frac{1}{2}A(t)}$ avec C dérivable sur I. En réinjectant dans l'équation, on obtient $C'(t)=K$ et on peut prendre $C(t)=Kt$.

Ainsi, $t\mapsto e^{-\frac{1}{2}A(t)}$ et $t\mapsto te^{-\frac{1}{2}A(t)}$ sont toutes deux solutions de $y''+ay'+\frac{1}{4}(a^2+2a')y=0$ et ainsi :

$$\boxed{\text{La condition est suffisante.}}$$

Soient (E): $y''+2ty'+(t^2+1)y=te^{-t^2/2}$ et (H): $y''+2ty'+(t^2+1)y=0$.

Posons $a(t)=2t$ et $b(t)=t^2+1$. Les fonctions a et b sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$a(t)^2+2a'(t)-4b(t)=4t^2+4-4t^2-4=0.$$

La condition ci-dessus est satisfaite. En posant, $A(t)=t^2$, une base de solutions de (H) est :

$$\left(t\mapsto e^{-t^2/2}, t\mapsto te^{-t^2/2}\right).$$

Cherchons une solution particulière de (E) de la forme $t\mapsto g(t)e^{-t^2/2}$ où g est deux dérivable sur $\mathbb{R}$.

En réinjectant dans (E), on obtient pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$g''(t)e^{-t^2/2}-2tg'(t)e^{-t^2/2}-g(t)e^{-t^2/2}+t^2g(t)e^{-t^2/2}+2tg'(t)e^{-t^2/2}-2t^2g(t)e^{-t^2/2}+(t^2+1)g(t)e^{-t^2/2}=te^{-t^2/2}.$$

Soit :

$$g''(t)=t.$$

On peut prendre $g(t)=\frac{1}{6}t^3$ et une solution particulière est $t\mapsto\frac{1}{6}t^3e^{-t^2/2}$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions } t\mapsto\left(\frac{1}{6}t^3+\alpha t+\beta\right)e^{-t^2/2} \text{ avec } (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2.}$$

Exercice 8

Les fonctions h_1 et h_2 étant solutions de (E) sur I, elles sont deux fois dérivables sur cet intervalle, donc $W=h_1h_2'-h_1'h_2$ est dérivable sur I en tant que différence de telles fonctions et :

$$W'=\left(h_1h_2'-h_1'h_2\right)'=h_1'h_2'+h_1h_2''-h_1'h_2'-h_1''h_2=h_1h_2''-h_1''h_2.$$

Or, $h_1''=-ah_1'-bh_1$ et $h_2''=-ah_2'-bh_2$, donc :

$$W'=h_1\left(-ah_2'-bh_2\right)-\left(-ah_1'-bh_1\right)h_2=-ah_1h_2'-bh_1h_2+ah_1'h_2+bh_1h_2=a\left(h_1'h_2-h_1h_2'\right).$$

Soit $W' = -aW$ et donc, W est solution de $y' + ay = 0$. Alors, si A est la primitive de a qui s'annule en $t_0 \in I$, on a pour tout $t \in I$:

$$W(t) = W(t_0)e^{-A(t)}.$$

Ceci prouve immédiatement l'équivalence :

$$\boxed{\left(\exists\, t_0 \in I, W(t_0) \neq 0\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\forall\, t \in I, W(t) \neq 0\right)}$$

Supposons maintenant que la famille (h_1, h_2) est liée. Alors, si h_1 est nulle, on a $W(t) = 0$ pour tout $t \in I$, et si h_1 n'est pas nulle, alors il existe une constante k telles que $h_2 = kh_1$ et $W = h_1h_2' - h_1'h_2 = h_1(kh_1') - h_1'(kh_1) = 0$. Ainsi, si (h_1, h_2) est liée, alors $W = 0$.

Supposons enfin que $W = 0$. Si h_1 est nulle, alors (h_1, h_2) est liée.

Si h_1 n'est pas nulle, alors il existe $t_0 \in I$ tel que $h_1(t_0) \neq 0$. Comme h_1 est continue sur I, elle ne s'annule pas au voisinage de t_0. Soit alors J un intervalle ouvert inclus dans I, contenant t_0 et tel quel h_1 ne s'annule pas sur J. On a alors sur J :

$$\frac{W}{h_1^2} = \frac{h_1h_2' - h_1'h_2}{h_1^2} = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)'.$$

Alors, si W est nulle sur I, donc sur J, on a $\left(\frac{h_2}{h_1}\right)' = 0$, donc $\frac{h_2}{h_1}$ est constante sur J, autrement dit, il existe un scalaire k tel que $h_2 = kh_1$ sur J.

Considérons maintenant un point $t_1 \in I$ tel que $h_1(t_1) = 0$ (s'il en existe). Alors, on a $h_1'(t_1) \neq 0$, car sinon h_1 serait nulle comme unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ h_1(t_1) = h_1'(t_1) = 0 \end{cases}$. Comme h_1 est deux fois dérivable sur I, elle y est de classe C^1 et par continuité, h_1' reste de signe constant strict au voisinage de t_1, donc h_1 est strictement monotone au voisinage de t_1, donc ne s'annule pas au voisinage de t_1 (mais, par hypothèse ici, s'annule en t_1).

D'après ce qui précède, ceci veut dire que $h_2 = k_+h_1$ et $h_2 = k_-h_1$ au voisinage de t_1^+ et t_1^- respectivement.

Alors, $h_2' = k_+h_1'$ et $h_2' = k_-h_1'$ au voisinage de t_1^+ et t_1^-, et comme $h_1'(t_1) \neq 0$ on a par continuité de h_1' et h_2' en t_1, on obtient $\frac{h_2'(t_1)}{h_1'(t_1)} = k_+ = k_-$. Ainsi, $h_2 = kh_1$ au voisinage de t_1.

Finalement, ceci permet de conclure qu'il existe un scalaire k tel que $h_2 = kh_1$ sur I et donc que la famille (h_1, h_2) est liée.

Nous venons donc de prouver que :

$$\left((h_1, h_2) \text{ est liée}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\forall\, t \in I, W(t) = 0\right).$$

Par contraposée :

$$\boxed{\left((h_1, h_2) \text{ est libre}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\exists\, t_0 \in I, W(t_0) \neq 0\right)}$$

Exercice 9

Posons $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\dbinom{2n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \frac{\dfrac{1}{2n+1}\dbinom{2n+2}{n+1}}{\dfrac{1}{2n-1}\dbinom{2n}{n}}|x| = \frac{2n-1}{2n+1}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}|x| = 2\frac{2n-1}{n+1}|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4|x|.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série converge quand $4|x|<1$ et diverge quand $4|x|>1$, donc :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } f \text{ est } \frac{1}{4}.}$$

La série entière f est alors de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$ et pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\binom{2n}{n} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\binom{2(n+1)}{n+1}(n+1)x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\binom{2n}{n}(n+1)x^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\binom{2n}{n}x^n$$

Mais, on peut aussi écrire :

$$2x f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n}{2n-1}\binom{2n}{n}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n}{2n-1}\binom{2n}{n}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)\binom{2n}{n}x^n.$$

Comme on vient de voir que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\binom{2n}{n}x^n$ converge, on obtient, avec le résultat précédent :

$$2x f'(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\binom{2n}{n}x^n = f(x) - \frac{1}{2}f'(x).$$

Ainsi, pour tout $x \in I$, $(4x+1)f'(x) - 2f(x) = 0$, donc f est solution sur I de :

$$(E):\ (4x+1)y' - 2y = 0.$$

Pour tout $x \in I$, $4x+1 \neq 0$, donc l'équation se récrit $y' - \dfrac{2}{4x+1}y = 0$ et les solutions sont de la forme :

$$x \mapsto K\exp\left(\int^x \frac{2}{4t+1}dt\right) = K\exp\left(\frac{1}{2}(4x+1)\right) = K\sqrt{4x+1}.$$

De plus, avec $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\binom{2n}{n}x^n$, on a $f(0) = \dfrac{-1}{-1} = 1$, donc, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$:

$$\boxed{f(x) = \sqrt{4x+1}}$$

A l'aide de la formule de Stirling, on peut écrire :

$$\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{2n-1}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{1}{4^n} \sim \frac{1}{2n}\frac{\sqrt{4\pi n}}{2\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\left(\frac{e}{n}\right)^{2n}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,n^{1,5}}.$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{1,5}}$ converge $(1,5>1)$, la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}$ est absolument convergente. Ceci implique que la convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\binom{2n}{n} x^n$ est normale sur $\left[-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right]$ et donc que *f* est définie et continue sur ce segment et, entre autres, en $\frac{1}{4}$. Alors :

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}=\sqrt{4\frac{1}{4}+1}=\sqrt{2}\,.$$

Par ailleurs, on a vu plus haut que pour tout entier naturel *n*, on a :

$$\binom{2(n+1)}{n+1}=\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\binom{2n}{n}=2\frac{2n+1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\frac{(-1)^n}{2n+1}\binom{2(n+1)}{n+1}\frac{1}{4^{n+1}}=\frac{(-1)^n}{2n+1}2\frac{2n+1}{n+1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^{n+1}}=\frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n+1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}\,.$$

Et, pour tout $N\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{n+1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}=\sum_{n=0}^{N}2\frac{(-1)^n}{2n+1}\binom{2(n+1)}{n+1}\frac{1}{4^{n+1}}=2\sum_{n=1}^{N+1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}=2\sum_{n=0}^{N+1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}-2\,.$$

Comme la série $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}$ converge, la série $\sum\frac{(-1)^n}{n+1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}$ converge aussi et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}-2\,.$$

Soit finalement :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}=2(\sqrt{2}-1)}$$

Exercice 10

1) Comme $\mathrm{Re}(\alpha)>0$, on a $\alpha\neq 0$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f'(x)+\alpha f(x)\right]=\ell$, pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe $A_1\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\in[A_1,+\infty[$:

$$\left|f'(x)+\alpha f(x)-\ell\right|\leq\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad \left|e^{\alpha x}f'(x)+\alpha e^{\alpha x}f(x)-\ell e^{\alpha x}\right|\leq\varepsilon\left|e^{\alpha x}\right|=\varepsilon\, e^{\mathrm{Re}(\alpha)x}\,.$$

Alors, pour tout $x\in[A,+\infty[$:

$$\left|\int_{A_1}^{x}\left(e^{\alpha t}f'(t)+\alpha e^{\alpha t}f(t)-\ell e^{\alpha t}\right)dt\right|\leq\int_{A_1}^{x}\left|e^{\alpha t}f'(t)+\alpha e^{\alpha t}f(t)-\ell e^{\alpha t}\right|dt\leq\int_{A_1}^{x}\varepsilon\, e^{\mathrm{Re}(\alpha)t}dt\,.$$

Soit :

$$\left|e^{\alpha x}f(x)-\frac{\ell}{\alpha}e^{\alpha x}-e^{\alpha A_1}f(A)+\frac{\ell}{\alpha}e^{\alpha A_1}\right|\leq\varepsilon\frac{e^{\mathrm{Re}(\alpha)x}-e^{\mathrm{Re}(\alpha)A_1}}{\mathrm{Re}(\alpha)}\leq\frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}(\alpha)}e^{\mathrm{Re}(\alpha)x}\,.$$

Ceci implique que :

$$\left|f(x)-\frac{\ell}{\alpha}-Be^{-\alpha x}\right|\leq\frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}(\alpha)}$$

avec $B=e^{\alpha A_1}\left(f(A_1)-\dfrac{\ell}{\alpha}\right)$.

Alors, pour tout $x\in[A_1,+\infty[$:

$$\left|f(x)-\frac{\ell}{\alpha}\right|=\left|f(x)-\frac{\ell}{\alpha}-Be^{-\alpha x}+Be^{-\alpha x}\right|\leq\left|f(x)-\frac{\ell}{\alpha}-Be^{-\alpha x}\right|\leq\frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}(\alpha)}+|B|e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}.$$

Or, comme $\mathrm{Re}(\alpha)>0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}|B|e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}=0$ et donc, il existe $A_2\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\in[A_2,+\infty[$:

$$|B|e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\leq\frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}(\alpha)}.$$

Finalement, en posant $A=\max(A_1,A_2)$, on a pour tout $x\in[A,+\infty[$:

$$\left|f(x)-\frac{\ell}{\alpha}\right|\leq\frac{2\varepsilon}{\mathrm{Re}(\alpha)}.$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{\ell}{\alpha}}$$

2) Cherchons $a,b\in\mathbb{C}$ tels que $f''+f'+f=(f'+af)'+b(f'+af)$.

Pour tous $a,b\in\mathbb{C}$, on a $(f'+af)'+b(f'+af)=f''+(a+b)f'+abf$, donc pour $a+b=ab=1$, on a la relation voulue.

Or, si a et b vérifient $a+b=ab=1$, ils sont racines de X^2-X+1, donc valent $\alpha=e^{i\pi/3}$ ou $\bar{\alpha}=e^{-i\pi/3}$.

On a alors :

$$f''+f'+f=(f'+\alpha f)'+\bar{\alpha}(f'+\alpha f).$$

Et, comme $\mathrm{Re}(\alpha)=\mathrm{Re}(\bar{\alpha})=\dfrac{1}{2}>0$, on peut appliquer deux fois la question précédente :

$$\lim_{+\infty}\left[f''+f'+f\right]=\lim_{+\infty}\left[(f'+\alpha f)'+\bar{\alpha}(f'+\alpha f)\right]=0\ \Rightarrow\ \lim_{+\infty}(f'+\alpha f)'=\frac{0}{\bar{\alpha}}=0\ \Rightarrow\ \lim_{x\to+\infty}f=\frac{0}{\bar{\alpha}}=0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=0}$$

3) Nous allons faire une preuve par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$ en utilisant le même principe que ci-dessus.

- Pour $n=1$, soit $f\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{+\infty}\left[f'+\alpha f\right]=0$ où toutes les racines de $P=X+\alpha\in\mathbb{C}[X]$ ont une partie réelle strictement négative, autrement dit ici : $\mathrm{Re}(-\alpha)<0$, soit $\mathrm{Re}(\alpha)>0$.

  D'après la question 1, on a immédiatement $\lim\limits_{+\infty}f=0$: la propriété est vraie au rang $n=1$.

- On suppose la propriété vraie à un rang $n\in\mathbb{N}^*$.

  Soit $f\in C^{n+1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{+\infty}\left[f^{(n+1)}+\alpha_n f^{(n)}+\alpha_{n-1}f^{(n-1)}+...+\alpha_1 f'+\alpha_0 f\right]=0$ où les α_k sont des nombres complexes tels que toutes les racines de $P=X^{n+1}+\alpha_n X^n+...+\alpha_1 X+\alpha_0$ ont une partie réelle strictement négative.

  Soit $-\alpha$ une racine de *P*. On a alors $\mathrm{Re}(-\alpha)<0$, donc $\mathrm{Re}(\alpha)>0$ et :

$$\begin{aligned}P&=\left(X+\alpha\right)\left(X^n+\beta_{n-1}X^{n-1}+...+\beta_1 X+\beta_0\right)\\&=X^{n+1}+(\alpha+\beta_{n-1})X^n+(\alpha\beta_{n-1}+\beta_{n-2})X^{n-1}+...+(\alpha\beta_1+\beta_0)X+\alpha\beta_0\\&=X^{n+1}+\alpha_n X^n+...+\alpha_1 X+\alpha_0\end{aligned}$$

  Et toutes les racines de $X^n+\beta_{n-1}X^{n-1}+...+\beta_1 X+\beta_0$ sont des racines de *P*, donc ont une partie réelle strictement négative.

  Posons $g=f^{(n)}+\beta_{n-1}f^{(n-1)}+...+\beta_1 f'+\beta_0 f$. On a alors :

$$\begin{aligned}g'+\alpha g&=f^{(n+1)}+\beta_{n-1}f^{(n)}+...+\beta_1 f''+\beta_0 f'+\alpha f^{(n)}+\alpha\beta_{n-1}f^{(n-1)}+...+\alpha\beta_1 f'+\alpha\beta_0 f\\&=f^{(n+1)}+(\beta_{n-1}+\alpha)f^{(n)}+(\beta_{n-2}+\alpha\beta_{n-1})f^{(n)}+...+(\beta_1+\alpha\beta_2)f''+(\beta_0+\alpha\beta_1)f'+\alpha\beta_0 f\\&=f^{(n+1)}+\alpha_n f^{(n)}+\alpha_{n-1}f^{(n-1)}+...+\alpha_1 f'+\alpha_0 f\end{aligned}$$

  Donc, $\lim\limits_{+\infty}\left[g'+\alpha g\right]=0$ et comme $\mathrm{Re}(\alpha)>0$, on a $\lim\limits_{+\infty} g=0$ d'après la question 1.

  Ainsi, $\lim\limits_{+\infty}\left[f^{(n)}+\beta_{n-1}f^{(n-1)}+...+\beta_1 f'+\beta_0 f\right]=0$ et toutes les racines de $X^n+\beta_{n-1}X^{n-1}+...+\beta_1 X+\beta_0$ ont une partie réelle strictement négative, donc d'après l'hypothèse de récurrence, on a $\lim\limits_{+\infty} f=0$: la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Ainsi, si *f* est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ (avec $n\in\mathbb{N}^*$) telle que $\lim\limits_{+\infty}\left[f^{(n)}+\alpha_{n-1}f^{(n-1)}+...+\alpha_1 f'+\alpha_0 f\right]=0$ où les racines de $P=X^n+\alpha_{n-1}X^{n-1}+...+\alpha_1 X+\alpha_0\in\mathbb{C}[X]$ ont toutes une partie réelle strictement négative, alors :

$$\boxed{\lim_{+\infty} f=0}$$

Exercice 11

1) Remarquons préalablement que pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ et tout $t\in\mathbb{R}^*$, on a $\left|t\cos\left(\frac{\alpha}{t}\right)\right|\le|t|$ et $\left|t\sin\left(\frac{\alpha}{t}\right)\right|\le|t|$, donc :

$$\lim_{t\to 0}\left[t\cos\left(\frac{\alpha}{t}\right)\right]=\lim_{t\to 0}\left[t\sin\left(\frac{\alpha}{t}\right)\right]=0.$$

La fonction $f:(x,y)\mapsto\begin{cases}y^2\sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{si } y=0\end{cases}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(a,0),a\in\mathbb{R}\}$ en tant que produit de telles fonctions avec pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $y\neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\cos\left(\frac{x}{y}\right)\quad\text{et}\quad\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y\sin\left(\frac{x}{y}\right)-x\cos\left(\frac{x}{y}\right).$$

Soit $a\in\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x,0)-f(a,0)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}0=0$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,0)$ existe et vaut 0.
- $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(a,y)-f(a,0)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\left[y\sin\left(\dfrac{a}{y}\right)\right]=0$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,0)$ existe et vaut 0.

Ainsi, *f* admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Soit $a\in\mathbb{R}^*$.

A l'aide de ce que l'on vu en introduction, on a :

- $\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0=\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,0)$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(a,0)$;
- $\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)}2y\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)=0$, mais $x\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$ n'admet pas de limite quand $(x,y)\to(a,0)$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ n'admet pas de limite quand $(x,y)\to(a,0)$.

Ainsi, *f* n'est pas de classe C^1 en $(a,0)$ quand $a\in\mathbb{R}^*$.

Par contre, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}y\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}2y\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)=0$, donc :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\quad\text{et}\quad\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Ainsi, *f* est de classe C^1 en $(0,0)$.

Finalement :

$$\boxed{f\text{ est de classe }C^1\text{ sur }\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\cup\{(0,0)\}\text{, mais pas plus.}}$$

Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ existe, c'est la dérivée de $x\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ en 0. Or, la fonction $x\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ n'est pas définie, donc :

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\text{ n'existe pas.}}$$

Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existe, c'est la dérivée de $y\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)=y$ en 0, soit 1. Donc :

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)\text{ existe est vaut 1.}}$$

2) La fonction sh étant une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}y=0\quad\Leftrightarrow\quad x=y.$$

La fonction *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\Delta$ où Δ est la première bissectrice (d'équation $x=y$) en tant que quotient de telles fonctions.

De plus, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\Delta$:

$$f(x,y)=\frac{\sin x-\sin y}{\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}y}=\frac{2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2\operatorname{ch}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{x-y}{2}\right)}=\frac{\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{x+y}{2}\right)}\frac{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{x-y}{2}\right)}=\phi\left(\frac{x+y}{2}\right)\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

avec $\phi(t)=\dfrac{\cos t}{\operatorname{ch}t}$ et $\varphi(t)=\dfrac{\sin t}{\operatorname{sh}t}$.

Remarquons que les fonctions ϕ et φ sont toutes deux des fonctions d'une seule variable réelle et on a :

- Les fonctions $(x,y)\mapsto\dfrac{x+y}{2}$ et $(x,y)\mapsto\dfrac{x-y}{2}$ sont polynomiales, donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
- La fonction ϕ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (la fonction ch ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$).
- La fonction φ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ (la fonction sh ne s'annulant qu'en 0).

  De plus, en 0, on a $\varphi(t)\underset{0}{\sim}1$ donc φ est prolongeable par continuité en 0 en posant $\varphi(0)=1$.

  Pour tout $t\in\mathbb{R}^*$, $\varphi'(t)=\dfrac{\cos t\operatorname{sh}t-\sin t\operatorname{ch}t}{\operatorname{sh}^2 t}$ et, au voisinage de 0, on a $\varphi'(t)=\dfrac{o(t^2)}{t^2+o(t^2)}=\dfrac{o(1)}{1+o(1)}$, donc φ' admet une limite finie en 0 (qui est 0) et le prolongement de φ est de classe C^1 en 0, donc sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, par composition, $(x,y)\mapsto\phi\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et $(x,y)\mapsto\varphi\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$ est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et finalement :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet un prolongement de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$$

Exercice 12

1) Soit $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k\in\mathbb{R}_n[X]$, on a:

$$f(P)=\int_0^1 P^2=\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}a_kt^k\right)^2dt=\int_0^1\left(\sum_{0\le i,j\le n}a_ia_jt^{i+j}\right)dt=\sum_{0\le i,j\le n}a_ia_j\int_0^1t^{i+j}dt=\sum_{0\le i,j\le n}\frac{1}{i+j+1}a_ia_j\,.$$

Ainsi, *f* est polynômiale sur $\mathbb{R}_n[X]$ donc :

$$\boxed{f\text{ est différentiable sur }\mathbb{R}_n[X].}$$

Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, on a :

$$f(P)=\sum_{\substack{0\le i,j\le n\\ i,j\ne k}}\frac{1}{i+j+1}a_ia_j+2\sum_{\substack{i=0\\ i\ne k}}^{n}\frac{1}{i+k+1}a_ia_k+\frac{1}{2k+1}a_k^2\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial f}{\partial a_k}(P)=\sum_{i=0}^{n}\frac{2}{i+k+1}a_i\,.$$

Donc, pour tout $H=\sum_{k=0}^{n}h_kX^k\in\mathbb{R}_n[X]$, $df(P)\cdot H=\sum_{j=0}^{p}\left(h_j\sum_{i=0}^{n}\frac{2}{i+j+1}a_i\right)$, soit :

$$\boxed{df(P)\cdot H=\sum_{0\le i,j\le n}\frac{2a_ih_j}{i+j+1}}$$

Autre version (plus chic !) :

Munissons $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $(P\,|\,Q)=\int_0^1 PQ$ (on peut choisir le produit scalaire que l'on veut car $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie). On a alors $f(P)=\int_0^1 P^2=\|P\|^2$ et pour tous $P,H\in\mathbb{R}_n[X]$:

$$f(P+H)=\|P+H\|^2=\|P\|^2+2(P\,|\,H)+\|H\|^2=f(P)+2(P\,|\,H)+\underset{H\to 0}{o}\left(\|H\|\right).$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{df(P)\cdot H=2(P\,|\,H)=2\int_0^1 PH}$$

Remarquons qu'avec $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ et $H=\sum_{k=0}^{n}h_kX^k$, on a $2\int_0^1 PH=\sum_{0\le i,j\le n}\frac{2a_ih_j}{i+j+1}$.

2) Remarquons que $A\mapsto\det A$ est polynômiale en les coefficients de *A*, donc continue. Alors, $\det^{-1}\left(\{0\}\right)$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (car $\{0\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$), donc $GL_n(\mathbb{R})=\det^{-1}\left(\mathbb{R}\setminus\{0\}\right)=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\setminus\det^{-1}\left(\{0\}\right)$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}\in GL_n(\mathbb{R})$ et $\chi_A=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a_1X+a_0$.

Comme *A* est inversible, 0 n'est pas valeur propre de *A*, donc $\chi_A(0)=a_0\neq 0$. Or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_A(A)=A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\ldots+a_1A+a_0I_n=0_n$, donc :

$$-\frac{1}{a_0}(A^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\ldots+a_1I_n)A=I_n\quad\Rightarrow\quad A^{-1}=-\frac{1}{a_0}(A^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\ldots+a_1I_n).$$

Or, $\chi_A=\det\left(XI_n-A\right)$, donc les a_k sont polynômiaux en les coefficients de *A*. Comme les coefficients des puissances de *A*, sont aussi polynômiaux en les coefficients de *A*, les coefficients de A^{-1} sont polynômiaux en les coefficients de *A*.

Enfin, les fonctions polynômiales sont différentiables sur leur ensemble de définition, donc :

$$\boxed{f\text{ est différentiable sur son ensemble de définition.}}$$

Pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$, on a $A+tE_{i,j}\in GL_n(\mathbb{R})$ pour *t* réel proche de 0 (car $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert) et :

$$\frac{1}{t}\left[f(A+tE_{i,j})-f(A)\right]=\frac{1}{t}\left[(A+tE_{i,j})^{-1}-A^{-1}\right]=\frac{1}{t}(A+tE_{i,j})^{-1}\left(I_n-(A+tE_{i,j})A^{-1}\right)=-(A+tE_{i,j})^{-1}E_{i,j}A^{-1}.$$

Alors, $\frac{\partial f}{\partial a_{i,j}}(A)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}\left[f(A+tE_{i,j})-f(A)\right]\right)=-A^{-1}E_{i,j}A^{-1}$ et donc pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$:

$$df(A)(E_{i,j})=-A^{-1}E_{i,j}A^{-1}.$$

Et ainsi :

$$\boxed{df(A):M\mapsto -A^{-1}MA^{-1}}$$

Exercice 13

Comme φ admet un maximum local en $\big(u(a),v(b)\big)$, il existe une boule ouverte B, de centre $\big(u(a),v(b)\big)$ et de rayon $r>0$, telle que :

$$\forall\,(X,Y)\in B,\ \varphi\big(X,Y\big)\leq\varphi\big(u(a),v(b)\big).$$

Par ailleurs, u et v sont continues respectivement en a et b donc $(x,y)\mapsto\big(u(x),v(y)\big)$ est continue en (a,b).

Ceci implique qu'il existe un réel $\alpha>0$ tel que pour tout $(x,y)\in B\big((a,b),\alpha\big)$:

$$\big(u(x),v(y)\big)\in B.$$

Alors, pour tout $(x,y)\in B\big((a,b),\alpha\big)$, on a :

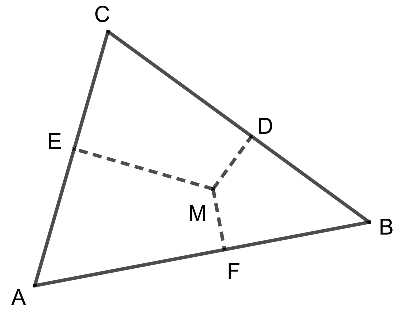
$$f(x,y)=\varphi\big(u(x),v(y)\big)\leq\varphi\big(u(a),v(b)\big).$$

Ceci montre que :

$$\boxed{f\text{ admet un maximum local en }(a,b).}$$

Exercice 14

Faisons un schéma. On note D, E et F les projetés orthogonaux de M sur (BC), (AC) et (AB) respectivement.



On cherche le maximum de $MD\times ME\times MF$.

Appelons S l'aire du triangle ABC. On a :

$$S=S_{MBC}+S_{MAC}+S_{MAB}=\frac{1}{2}\big(MD\times BC+ME\times AC+MF\times AB\big).$$

Posons $x=MD$ et $y=ME$. On a alors $x,y\in\mathbb{R}_+$ et $MF=\dfrac{2S-MD\times BC-ME\times AC}{AB}$, donc :

$$MD\times ME\times MF=\frac{MD\times ME\times\big(2S-MD\times BC-ME\times AC\big)}{AB}.$$

Et $MD\times ME\times MF$ est maximal quand $MD\times ME\times\big(2S-MD\times BC-ME\times AC\big)$ l'est.

Posons $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$ et :

$$f(x,y)=MD\times ME\times\big(2S-MD\times BC-ME\times AC\big)=xy\big(2S-ax-by\big)=2Sxy-ax^2y-bxy^2.$$

La fonction f est polynômiale donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2Sy-2axy-by^2=y\big(2S-2ax-by\big)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2Sx-ax^2-2bxy=x\big(2S-ax-2by\big)$$

On a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \iff \begin{cases} y\left(2S-2ax-by\right)=0 \\ x\left(2S-ax-2by\right)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \text{ ou } 2ax+by=2S \\ x=0 \text{ ou } ax+2by=2S \end{cases}$$

Si $x=0$ ou $y=0$, alors $f(x,y)=0$ donc f est minimale (car $f(x,y)$ est toujours positif : c'est un produit de distances). On s'intéresse donc à l'unique point critique (x,y) tel que $x\neq 0$ et $y\neq 0$, qui est donnée par :

$$\begin{cases} 2ax+by=2S \\ ax+2by=2S \end{cases} \iff (x,y)=\left(\frac{2S}{3a},\frac{2S}{3b}\right).$$

Alors :

$$f\left(\frac{2S}{3a},\frac{2S}{3b}\right)=\frac{8S^3}{27ab}.$$

Or, on peut écrire pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$:

$$f(x,y)=2Sxy-ax^2y-bxy^2=\frac{y(by-2S)^2}{4a}-ay\left(x+\frac{by-2S}{2a}\right)^2\leq\frac{y(by-2S)^2}{4a}=\frac{1}{4a}g(y).$$

Remarquons que comme M reste à l'intérieur du triangle ABC, $y=ME$ reste inférieur à la longueur h de la hauteur issue de B. Or, $S=\frac{h\times AC}{2}=\frac{hb}{2}$, donc $h=\frac{2S}{b}$. Ainsi, $y\in\left[0,\frac{2S}{b}\right]$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec $g'(y)=(by-2S)^2+2by(by-2S)=(3by-2S)(by-2S)$.

On a alors le tableau :

y	0		$\frac{2S}{3b}$		$\frac{2S}{b}$
$g'(y)$		$+$	0	$-$	0
g		$\nearrow$		$\searrow$	

Ainsi, g est maximale quand $y=\frac{2S}{3b}$ et donc, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$ avec $y\in\left[0,\frac{2S}{b}\right]$, on a :

$$f(x,y)\leq\frac{1}{4a}g(y)\leq\frac{1}{4a}g\left(\frac{2S}{3b}\right)=\frac{8S^3}{27ab}.$$

Finalement, $\frac{8S^3}{27ab}$ est le maximum de f atteint quand $x=MD=\frac{2S}{3a}$ et $y=ME=\frac{2S}{3b}$, et dans ce cas, avec $c=AB$, on obtient :

$$MF=\frac{2S-MD\times BC-ME\times AC}{AB}=\frac{2S}{3c}.$$

Ainsi :

> Le maximum du produit des distances d'un point M intérieur à un triangle ABC aux cotés de ce triangle est $\frac{8S^3}{27AB\times BC\times CA}$, atteint quand $d\left(M,(BC)\right)=\frac{2S}{3BC}$, $d\left(M,(AC)\right)=\frac{2S}{3AC}$ et $d\left(M,(AB)\right)=\frac{2S}{3AB}$.

Remarquons que le point M ci-dessus est le centre de gravité G de ABC.

En effet, si, comme plus haut, D est le projeté orthogonal de G sur (BC), on a $S_{GBC}=\dfrac{BC\times GD}{2}$, donc :

$$GD=\frac{2S_{GBC}}{BC}.$$

Or, si $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe du plan, on a :

$$2S_{GBC}=\left\|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BG}\right]\right\|=\left|\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BG})\right|=\left|\det_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{BC},\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})\right)\right|=\left|\det_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{BC},\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}\right)\right|=\frac{1}{3}\left|\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})\right|=\frac{1}{3}2S.$$

Donc :

$$GD=d\left(G,(BC)\right)=\frac{2S}{3BC}.$$

Et on a de même, $d\left(G,(AC)\right)=\dfrac{2S}{3AC}$ et $d\left(G,(AB)\right)=\dfrac{2S}{3AB}$.

Exercice 15

1) On a $f\in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

Commençons par considérer la fonction $h:(x,y)\mapsto\displaystyle\int_0^y\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$.

Soit $x\in\mathbb{R}$ fixé. La fonction $y\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc :

$$y\mapsto\int_0^y\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Soit maintenant $y\in\mathbb{R}$ fixé. Posons $I=[0,y]$ ou $[y,0]$.

- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue et intégrable sur le segment *I*.
- Pour tout $t\in I$, $x\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$ est continue sur *I*.
- Pour tout segment $[a,b]\subset\mathbb{R}$, $x\mapsto\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$ est continue sur $[a,b]$, donc y admet un maximum et $t\mapsto\max\limits_{x\in[a,b]}\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right]$ est continue sur le segment *I*, donc intégrable.

Alors, $x\mapsto\displaystyle\int_0^y\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ est de classe C^1 sur $[a,b]$, de dérivée $x\mapsto\displaystyle\int_0^y\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)dt$.

Ceci étant vrai pour tout segment $[a,b]\subset\mathbb{R}$, la fonction $x\mapsto\displaystyle\int_0^y\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x\mapsto\displaystyle\int_0^y\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)dt$.

Or, pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)=-\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,t)$, donc :

$$\int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)dt=-\int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,t)dt=-\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\right]_0^y=-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,0).$$

Enfin, $x\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ et $x\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc $x\mapsto\displaystyle\int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)dt$ l'est aussi en tant que différence de telles fonctions.

Finalement :

$$x\mapsto\int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}\text{, de dérivée } x\mapsto-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,0).$$

Ainsi, $h:(x,y)\mapsto\displaystyle\int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, de dérivées partielles :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)=-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) \quad\text{et}\quad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y).$$

Enfin, la fonction $\ell:x\mapsto\displaystyle\int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(t,0)dt$ est la primitive qui s'annule en 0 de $x\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc elle est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, de dérivée $x\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$.

En définitive, $g=h-\ell$ est la différence de deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, donc :

$$\boxed{g \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$$

De plus, d'après ce qui précède, on a pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial \ell}{\partial x}(x)=-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial \ell}{\partial y}(x)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

Donc, on a bien :

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{\partial f}{\partial y} \quad\text{et}\quad \frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial x}}$$

2) Posons $\varphi(r,\theta)=f\left(r\cos\theta\,,r\sin\theta\right)$ sur $\mathbb{R}_+\times[0,2\pi]$. Comme $(r,\theta)\mapsto r\cos\theta$ et $(r,\theta)\mapsto r\sin\theta$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+\times[0,2\pi]$, on a :

- pour tout $r\in\mathbb{R}_+$, $\theta\mapsto\varphi(r,\theta)$ est continue, et donc intégrable sur le segment $[0,2\pi]$;
- pour tout $\theta\in[0,2\pi]$, $r\mapsto\varphi(r,\theta)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ avec :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\theta)=\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}\left(r\cos\theta\,,r\sin\theta\right)+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\left(r\cos\theta\,,r\sin\theta\right) ;$$

- Pour tout $r\in\mathbb{R}_+$, $\theta\mapsto\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\theta)$ est continue sur I en tant que somme de telles fonctions ;

- Pour tout segment $[0,a]\subset\mathbb{R}_+$, $(x,y)\mapsto\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|$ et $(x,y)\mapsto\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|$ sont continues sur le compact $[-a,a]\times[-a,a]$ donc y admettent toutes deux un maximum, respectivement M_1 et M_2 ; alors, pour tout $(r,\theta)\in[0,a]\times[0,2\pi]$, on a $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\theta)\right|\le M_1|\cos\theta|+M_2|\sin\theta|$ et $\theta\mapsto M_1|\cos\theta|+M_2|\sin\theta|$ est continue et intégrable sur le segment $[0,2\pi]$.

Ainsi :

$$\boxed{\Phi:r\mapsto\int_0^{2\pi}\varphi(r,\theta)d\theta \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } \Phi'(r)=\int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\theta)d\theta.}$$

On a alors, pour tout $r\in\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}\Phi'(r)&=\int_0^{2\pi}\left[\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}\left(r\cos\theta\,,r\sin\theta\right)+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\left(r\cos\theta\,,r\sin\theta\right)\right]d\theta\\&=\int_0^{2\pi}\left[\cos\theta\frac{\partial g}{\partial y}\left(r\cos\theta\,,r\sin\theta\right)-\sin\theta\frac{\partial g}{\partial x}\left(r\cos\theta\,,r\sin\theta\right)\right]d\theta\end{aligned}$$

Et, pour tout $r\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\Phi'(r)=\frac{1}{r}\int_0^{2\pi}\left[-r\sin\theta\frac{\partial g}{\partial x}\left(r\cos\theta\,,r\sin\theta\right)+r\cos\theta\frac{\partial g}{\partial y}\left(r\cos\theta\,,r\sin\theta\right)\right]d\theta=\frac{1}{r}\int_0^{2\pi}\frac{\partial g}{\partial\theta}\left(r\cos\theta\,,r\sin\theta\right)d\theta.$$

Soit :

$$\Phi'(r)=\frac{1}{r}\Big[g\left(r\cos\theta\,,r\sin\theta\right)\Big]_0^{2\pi}=\frac{1}{r}\Big[g\left(r\,,0\right)-g\left(r\,,0\right)\Big]=0.$$

Ainsi, Φ' est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ et, comme elle est continue sur $\mathbb{R}_+$:

$$\boxed{\Phi'=0}$$

3) L'application $\Phi:r\mapsto\int_0^{2\pi}f\left(r\cos\theta\,,r\sin\theta\right)d\theta$ est de dérivée nulle sur $\mathbb{R}_+$, donc elle y est constante.

Supposons que f possède un extremum local en $(0,0)$. Quitte à changer f en $-f$ (qui vérifie les mêmes hypothèses), on peut supposer que c'est un minimum. Il existe alors un réel $R>0$ tel que pour tout $(x,y)\in B\big((0,0),R\big)$, on a $f(x,y)\ge f(0,0)$.

Soit $r\in[0,R[$. Pour tout $\theta\in[0,2\pi]$, on a $\left(r\cos\theta\,,r\sin\theta\right)\in B\big((0,0),R\big)$, donc $f\left(r\cos\theta\,,r\sin\theta\right)-f(0,0)\ge 0$. De plus, $\theta\mapsto f\left(r\cos\theta\,,r\sin\theta\right)-f(0,0)$ est continue sur $[0,2\pi]$ et :

$$\int_0^{2\pi}\Big[f\left(r\cos\theta\,,r\sin\theta\right)-f(0,0)\Big]d\theta=\int_0^{2\pi}f\left(r\cos\theta\,,r\sin\theta\right)d\theta-\int_0^{2\pi}f(0,0)d\theta=\Phi(r)-\Phi(0)=0.$$

Nous avons donc une fonction continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0,2\pi]$: elle est nulle sur ce segment, soit pour tout $\theta\in[0,2\pi]$, $f\left(r\cos\theta\,,r\sin\theta\right)=f(0,0)$.

Ceci étant vrai pour tout $r\in[0,R[$, on a finalement, $f\left(r\cos\theta\,,r\sin\theta\right)=f(0,0)$ pour tout $(r,\theta)\in[0,R[\times[0,2\pi]$, soit $f(x,y)=f(0,0)$ pour tout $(x,y)\in B\big((0,0),R\big)$, et donc :

$$\boxed{f \text{ est constante au voisinage de } (0,0).}$$

Exercice 16

Soit $\vec{f}$ une éventuelle solution du problème. On a :

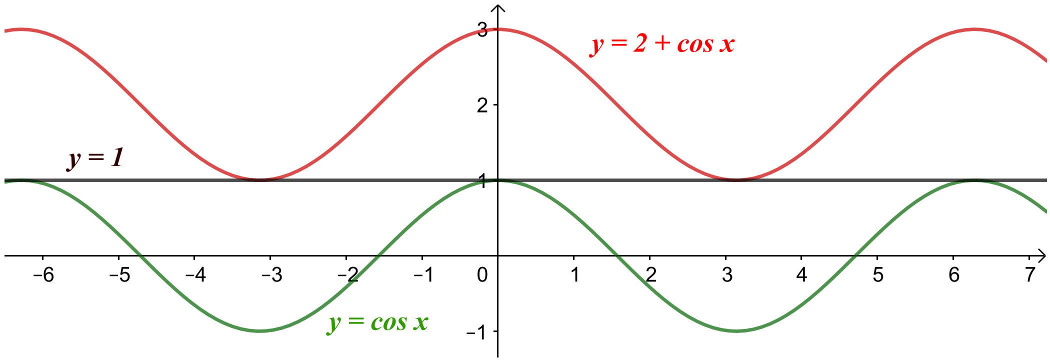
$$\begin{cases} \|\vec{f}\| \le 2 \\ \vec{f}.\vec{f}\,' \ge \sin \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \frac{1}{2}\|\vec{f}\|^2 \le 2 \\ \left(\frac{1}{2}\|\vec{f}\|^2\right)' \ge \sin \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \le \frac{1}{2}\|\vec{f}\|^2 + \cos \le 2 + \cos \\ \left(\frac{1}{2}\|\vec{f}\|^2 + \cos\right)' \ge 0 \end{cases}$$

Posons alors $g = \frac{1}{2}\|\vec{f}\|^2 + \cos = \frac{1}{2}\vec{f}.\vec{f} + \cos$.

La fonction g est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et, comme $\vec{f}$ et cos sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, g est l'est aussi et vérifie :

$$\cos \le g \le 2 + \cos \quad \text{et} \quad g' \ge 0.$$

La deuxième condition implique que g est croissante sur $\mathbb{R}$ et la première condition traduit le fait que la courbe de g est comprise entre les courbes de $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto 2 + \cos x$, représentées ci-dessous (ainsi que la droite horizontale d'équation $y = 1$).



Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_0) > 1$. Alors, comme g est croissante sur $\mathbb{R}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(2k+1)\pi \ge x_0$, on a $g\big((2k+1)\pi\big) \ge g(x_0) > 1$. Or, $g\big((2k+1)\pi\big) \le 2 + \cos\big((2k+1)\pi\big) = 1$, ce qui est absurde.

Ainsi, on a $g(x) \le 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Supposons maintenant qu'il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_1) < 1$. Toujours grâce à la croissance de g, on a $g(2k\pi) \le g(x_1) < 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2k\pi \le x_1$. Or, $g(2k\pi) \ge \cos(2k\pi) = 1$, ce qui est absurde.

Ainsi, on a $g(x) \ge 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Finalement, on obtient $g(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, si $\vec{f}$ est solution du problème, on a :

$$\frac{1}{2}\|\vec{f}\|^2 + \cos = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \|\vec{f}\|^2 = 2(1 - \cos).$$

Réciproquement, on vérifie facilement que toute fonction $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ telle que $\|\vec{f}\|^2 = 2(1-\cos)$ vérifie bien $\|\vec{f}\| \le 2$ et $\vec{f}.\vec{f}\,' \ge \sin$, et finalement :

$$\boxed{\text{Toute fonction } \vec{f} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \text{ telle que } \|\vec{f}\|^2 = 2(1-\cos) \text{ est solution du problème.}}$$

Exercice 17

1) L'équation (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Les solutions de l'équation homogène associée (H): $x^2y'+y=0$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto ke^{\frac{1}{x}}$ avec $k\in\mathbb{R}$. On cherche alors une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ de la forme $x\mapsto k(x)e^{\frac{1}{x}}$ avec k dérivable.

En remplaçant dans l'équation (E), on obtient : $k'(x)e^{\frac{1}{x}}=1$, donc $k'(x)=e^{-\frac{1}{x}}$.

En remarquant que $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{u\to+\infty} e^{-u}=0$, on peut prolonger $x\mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ par continuité en 0 et donc poser :

$$k(x)=\int_0^x e^{-\frac{1}{t}}\,dt\,.$$

Une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est alors $x\mapsto e^{\frac{1}{x}}\int_0^x e^{-\frac{1}{t}}\,dt$ et :

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ sont les fonctions } x\mapsto e^{\frac{1}{x}}\int_0^x e^{-\frac{1}{t}}\,dt+ke^{\frac{1}{x}} \text{ avec } k\in\mathbb{R}.}$$

Remarquons déjà que $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{u\to+\infty} e^{u}=+\infty$.

De plus, la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ et tout $\varepsilon\in\left]0,x\right]$:

$$\forall\, t\in[\varepsilon,x],\quad 0<\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{t}}\le\frac{1}{t^2}e^{-\frac{1}{t}}.$$

Donc :

$$0<\frac{1}{x^2}\int_\varepsilon^x e^{-\frac{1}{t}}\,dt\le\int_\varepsilon^x\frac{1}{t^2}e^{-\frac{1}{t}}\,dt=\left[e^{-\frac{1}{t}}\right]_\varepsilon^x=e^{-\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\le e^{-\frac{1}{x}}.$$

Ceci donne :

$$0<\int_\varepsilon^x e^{-\frac{1}{t}}\,dt\le x^2e^{-\frac{1}{x}}.$$

Et en faisant tendre ε vers 0, on obtient pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$0<\int_0^x e^{-\frac{1}{t}}\,dt\le x^2e^{-\frac{1}{x}}\quad\Leftrightarrow\quad 0<e^{\frac{1}{x}}\int_0^x e^{-\frac{1}{t}}\,dt\le x^2.$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2=0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}\int_0^x e^{-\frac{1}{t}}\,dt=0.$$

Ainsi, pour tout $k\in\mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{\frac{1}{x}}\int_0^x e^{-\frac{1}{t}}\,dt+ke^{\frac{1}{x}}\right)=\mathrm{sgn}(k)\,\infty$ donc :

$$\boxed{\text{La fonction } x\mapsto e^{\frac{1}{x}}\int_0^x e^{-\frac{1}{t}}\,dt \text{ est l'unique solution qui converge en 0.}}$$

2) Supposons qu'il existe une solution f de (E) développable en série entière au voisinage de 0, de rayon de convergence $R>0$. Il existe alors une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x\in\left]-R;R\right[$, $f(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ et :

$$\begin{aligned} x^2f'(x)+f(x)=x^2 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2\sum_{n\geq 1}n\,a_nx^{n-1}+\sum_{n\geq 0}a_nx^n=x^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{n\geq 1}n\,a_nx^{n+1}+a_0+\sum_{n\geq 1}a_nx^n=x^2 \\ &\Leftrightarrow \quad a_0+\sum_{n\geq 0}n\,a_nx^{n+1}+\sum_{n\geq 0}a_{n+1}x^{n+1}=x^2 \\ &\Leftrightarrow \quad a_0+\sum_{n\geq 0}(n\,a_n+a_{n+1})x^{n+1}=x^2 \end{aligned}$$

Soit, par unicité du développement en série entière :

$$\begin{cases} a_0=a_1=0 \\ a_1+a_2=1 \\ \forall\, n\geq 3,\ \ n\,a_n+a_{n+1}=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_0=a_1=0 \\ a_2=1 \\ \forall\, n\geq 3,\ \ a_{n+1}=-\,n\,a_n \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_0=a_1=0 \\ \forall\, n\geq 2,\ \ a_n=(-1)^n(n-1)! \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $x\in\left]-R;R\right[$:

$$f(x)=\sum_{n\geq 0}(-1)^n(n-1)!\,x^n\ .$$

Or, pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $\left|(-1)^n(n-1)!\,x^n\right|\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$, donc la série $\sum(-1)^n(n-1)!\,x^n$ diverge grossièrement et $R=0$, ce qui contredit notre hypothèse.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Il n'existe pas de solution de } (E) \text{ développable en série entière au voisinage de 0.}}$$

Exercice 18

1) Posons pour tout $x\in[a,b]$:

$$G(x)=\int_a^x \varphi(t)g(t)\,dt \quad \text{et} \quad \Phi(x)=\int_a^x\varphi(t)\,dt\,.$$

Les fonctions G et Φ sont toutes les deux de classe C^1 sur $[a,b]$ car φ et g sont continues.

Comme φ est positive sur $[a,b]$, on a pour tout $x\in[a,b]$:

$$\begin{aligned} g(x)\leq c+\int_a^x\varphi(t)g(t)\,dt \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi(x)e^{-\Phi(x)}g(x)\leq c\,\varphi(x)e^{-\Phi(x)}+\varphi(x)e^{-\Phi(x)}\int_a^x\varphi(t)g(t)\,dt \\ &\Leftrightarrow \quad e^{-\Phi(x)}G'(x)\leq c\,\Phi'(x)e^{-\Phi(x)}+\Phi'(x)e^{-\Phi(x)}G(x) \\ &\Leftrightarrow \quad e^{-\Phi(x)}G'(x)-\Phi'(x)e^{-\Phi(x)}G(x)\leq c\,\Phi'(x)e^{-\Phi(x)} \end{aligned}\ .$$

Alors, par croissance de l'intégrale, on obtient pour tout $x\in[a,b]$:

$$\int_a^x\left[e^{-\Phi(t)}G'(t)-\Phi'(t)e^{-\Phi(t)}G(t)\right]dt\leq\int_a^x c\,\Phi'(t)e^{-\Phi(t)}dt \quad \Leftrightarrow \quad \left[e^{-\Phi(t)}G(t)\right]_a^x\leq\left[-\,c\,e^{-\Phi(t)}\right]_a^x.$$

Avec $G(a)=\Phi(a)=0$, on obtient pour tout $x\in[a,b]$:

$$e^{-\Phi(x)}G(x)\leq c-c\,e^{-\Phi(x)} \quad \Leftrightarrow \quad c+G(x)\leq c\,e^{\Phi(x)}.$$

Or, $g(x)\le c+\int_a^x \varphi(t)g(t)\,dt=c+G(x)$, donc $g(x)\le c+G(x)\le c\,e^{\Phi(x)}$, ce qui donne pour tout $x\in[a,b]$:

$$\boxed{g(x)\le c\,e^{\int_a^x \varphi(t)\,dt}}$$

2) Soit *f* une solution de $y''+qy=0$ sur $\mathbb{R}_+$ (*f* est donc au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$). Alors :

$$f''+qf=0 \quad\Leftrightarrow\quad f''=-qf \quad\Rightarrow\quad 2f''f'=-qf'f \quad\Leftrightarrow\quad \left((f')^2\right)'=-q\left(f^2\right)'.$$

Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$:

$$\int_0^x\left((f')^2\right)'=-\int_0^x q\left(f^2\right)' \quad\Leftrightarrow\quad \left(f'(x)\right)^2-\left(f'(0)\right)^2=-\int_0^x q\left(f^2\right)'.$$

Comme *f* est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$, elle y est de classe C^1, donc f^2 aussi. Alors, comme par hypothèse, *q* est de classe C^1, on peut réaliser une intégration par parties :

$$\int_0^x q\left(f^2\right)'=\left[qf^2\right]_0^x-\int_0^x q'f^2=q(x)\left(f(x)\right)^2-q(0)\left(f(0)\right)^2-\int_0^x q'f^2\,.$$

Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$:

$$\left(f'(x)\right)^2-\left(f'(0)\right)^2=-\left[q(x)\left(f(x)\right)^2-q(0)\left(f(0)\right)^2-\int_0^x q'(t)\left(f(t)\right)^2dt\right]$$

Soit :

$$q(x)\left(f(x)\right)^2=\left(f'(0)\right)^2+q(0)\left(f(0)\right)^2+\int_0^x q'(t)\left(f(t)\right)^2dt-\left(f'(x)\right)^2.$$

Comme, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, on a $\left(f'(x)\right)^2\ge 0$, on obtient :

$$q(x)\left(f(x)\right)^2\le\left(f'(0)\right)^2+q(0)\left(f(0)\right)^2+\int_0^x q'(t)\left(f(t)\right)^2dt\,.$$

Comme la fonction *q* est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, elle ne s'y annule pas et, en posant $g=qf^2$ et $c=\left(f'(0)\right)^2+q(0)\left(f(0)\right)^2$, on obtient pour tout $x\in\mathbb{R}_+$:

$$g(x)\le c+\int_0^x\frac{q'(t)}{q(t)}g(t)\,dt\,.$$

Or, la fonction *q* est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc $q'\ge 0$ et *q* est de classe C^1 et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, donc la fonction $\varphi=\dfrac{q'}{q}\in C^0\left(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+\right)$. On peut donc utiliser le résultat de la question 1 sur $[0,x]$, ce qui donne :

$$g(x)\le ce^{\int_0^x\frac{q'(t)}{q(t)}dt}=ce^{\left[\ln\left(q(t)\right)\right]_0^x}=ce^{\ln\left(q(x)\right)-\ln\left(q(0)\right)}=c\,\frac{q(x)}{q(0)}.$$

Soit, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$:

$$q(x)\left(f(x)\right)^2\le c\,\frac{q(x)}{q(0)}.$$

Et avec $q(x)>0$, on obtient pour tout $x\in\mathbb{R}_+$:

$$\left(f(x)\right)^2\le\frac{c}{q(0)}.$$

Enfin $\dfrac{c}{q(0)}=\dfrac{\left(f'(0)\right)^2}{q(0)}+\left(f(0)\right)^2\geq 0$ (car $q(0)>0$), et en définitive, on a pour tout $x\in\mathbb{R}_+$:

$$|f(x)|\leq\sqrt{\frac{c}{q(0)}}\,.$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{\text{Toute solution } f \text{ de l'équation différentielle } y''+qy=0 \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_+.}$$

Exercice 19

1) Posons pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $g_n:t\mapsto\dfrac{e^{-nt}}{n^2}$ et $g=\sum_{n=1}^{+\infty}g_n$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction g_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ (car proportionnelle à une fonction exponentielle) et, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, on a :

$$0<g_n(t)\leq\frac{1}{n^2}\,.$$

Comme la série de Riemann $\sum\dfrac{1}{n^2}$ converge, la série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement (donc uniformément et simplement) sur $\mathbb{R}_+$, et ainsi, $g=\sum_{n=1}^{+\infty}g_n$ est bien définie et même continue sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, $\lim\limits_{t\to+\infty}g_n(t)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. La convergence normale de $\sum g_n$ sur $\mathbb{R}_+$ permet alors de conclure que :

$$\lim_{t\to+\infty}g(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{t\to+\infty}g_n(t)=0\,.$$

Enfin, pour tout réel $a>0$, tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $t\in[a,+\infty[$, on a :

$$|g_n'(t)|=\left|-n\frac{e^{-nt}}{n^2}\right|=\frac{e^{-nt}}{n}\leq e^{-na}$$

$$|g_n''(t)|=\left|n^2\,\frac{e^{-nt}}{n^2}\right|=e^{-nt}\leq e^{-na}$$

Comme la série géométrique $\sum e^{-na}$ converge car $e^{-a}\in\,]0,1[$, les séries de fonctions $\sum g_n'$ et $\sum g_n''$ converge normalement (donc uniformément) sur $[a,+\infty[$, donc g est de classe C^2 sur $[a,+\infty[$.

Ceci étant vrai pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$, g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, avec pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$:

$$g'(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}g_n'(t)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-nt}}{n}<0$$

$$g''(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}g_n''(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-nt}=\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}$$

Ainsi, g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+$ (car continue en 0).

Finalement, la fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement décroissante de $g(0)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ à $\lim_{+\infty} g=0$, donc d'après le théorème de la bijection continue, g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\left]0,\frac{\pi^2}{6}\right]$ et ainsi :

$$g(\mathbb{R}_+)=\left]0,\frac{\pi^2}{6}\right].$$

Or, quand (x,y) décrit $\mathbb{R}^2$, x^2+y^2 décrit $\mathbb{R}_+$, donc $f(\mathbb{R}^2)=g(\mathbb{R}_+)$, soit :

$$\boxed{f(\mathbb{R}^2)=\left]0,\frac{\pi^2}{6}\right]}$$

2) On a vu que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$:

$$g''(t)=\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}.$$

Donc, pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$:

$$g'(t)=\ln(1-e^{-t})+k \quad \text{avec } k\in\mathbb{R}.$$

Or, sur $[1,+\infty[$, $g'=\sum_{n=1}^{+\infty}g_n'$ et la convergence est uniforme. Comme pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim_{t\to+\infty}g_n'(t)=0$, on a :

$$\lim_{t\to+\infty}g'(t)=0.$$

Comme $\lim_{t\to+\infty}\ln(1-e^{-t})=0$, on obtient $k=0$ et donc pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $g'(t)=\ln(1-e^{-t})$.

Alors, pour tous $\varepsilon,t\in\mathbb{R}_+^*$:

$$g(t)=g(\varepsilon)+\int_\varepsilon^t g'(u)\,du=g(\varepsilon)+\int_\varepsilon^t\ln(1-e^{-u})\,du.$$

Enfin :

$$\ln(1-e^{-u})=\ln\Big(1-\big[1-u+\underset{0}{o}(u)\big]\Big)=\ln\big(u+\underset{0}{o}(u)\big)=\ln u+\ln\big(1+\underset{0}{o}(1)\big)=\ln u+\underset{0}{o}(\ln u).$$

Comme $u\mapsto\ln u$ est de signe constant au voisinage de 0 et intégrable en 0, $\int_0^t\ln(1-e^{-u})\,du$ converge et comme g est continue en 0, on peut écrire :

$$g(t)=\lim_{\varepsilon\to0}\left[g(\varepsilon)+\int_\varepsilon^t\ln(1-e^{-u})\,du\right]=g(0)+\int_0^t\ln(1-e^{-u})\,du.$$

Soit, pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{g(t)=\frac{\pi^2}{6}+\int_0^t\ln(1-e^{-u})\,du}$$

3) La fonction *f* est la composée de $(x,y)\mapsto x^2+y^2$ par *g*, qui comme on vient de le voir est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, la fonction $(x,y)\mapsto x^2+y^2$ est de classe C^1 (car polynomiale) sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et à images dans $\mathbb{R}_+^*$. Alors, *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ (composée de fonctions C^1) avec pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xg'(x^2+y^2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2yg'(x^2+y^2)$$

Comme g' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ (on a vu que $g'<0$), *f* n'admet pas de point critique dans $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, donc pas d'extremum (local ou global) sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Par contre, on a vu que pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $g(t)\leq g(0)=\dfrac{\pi^2}{6}$, donc pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y)\leq f(0,0)=g(0)=\frac{\pi^2}{6}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'a pas de minimum, mais admet un maximum global, } \frac{\pi^2}{6}\text{, atteint uniquement en } (0,0).}$$

Exercice 20

On a $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$; $X\mapsto C^\top X+X^\top SX$.

Comme *S* est une matrice symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée, d'après le théorème spectral. Autrement dit, il existe $D=diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P\in O_n(\mathbb{R})$ telles que $D=P^\top SP$.

Alors, en posant $C'=P^\top C$, on a pour tout $X\in\mathbb{R}^n$:

$$f(PX)=C^\top(PX)+(PX)^\top S(PX)=(C^\top P)X+X^\top(P^\top SP)X=C'^\top X+X^\top DX=g(X).$$

Or, comme *P* est inversible, *PX* décrit $\mathbb{R}^n$ quand *X* décrit $\mathbb{R}^n$, donc les (éventuels) extrema de *f* sont ceux de *g* (attention : pas atteint au même endroit a priori).

Cherchons alors les éventuels extrema de *g*. Soient $X_0\in\mathbb{R}^n$ et $H\in\mathbb{R}^n$. On a :

$$\begin{aligned}g(X_0+H)&=C'^\top(X_0+H)+(X_0+H)^\top D(X_0+H)\\&=C'^\top X_0+C'^\top H+X_0{}^\top DX_0+X_0{}^\top DH+H^\top DX_0+H^\top DH\\&=g(X_0)+C'^\top H+X_0{}^\top DH+H^\top DX_0+H^\top DH\end{aligned}$$

Or, ${}^tHDX_0$ est un scalaire, donc $H^\top DX_0=(H^\top DX_0)^\top=(DX_0)^\top H$ et :

$$\begin{aligned}g(X_0+H)&=g(X_0)+C'^\top H+X_0{}^\top DH+(DX_0)^\top H+H^\top DH\\&=g(X_0)+\left(C'^\top+X_0{}^\top D+(DX_0)^\top\right)H+H^\top DH\\&=g(X_0)+E^\top H+H^\top DH\end{aligned}$$

avec $E=\left(C'^\top+X_0{}^\top D+(DX_0)^\top\right)^\top=C'+D^\top X_0+DX_0=C'+2DX_0$ (car *D* est diagonale donc $D^\top=D$).

Si on note $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$; $H\mapsto E^\top H+H^\top DH$, *g* admet un extremum (local ou global) en X_0 si et seulement si l'application φ admet un extremum (local ou global) en $(0,\dots,0)$.

Si on pose $E=(a_1,\dots,a_n)$, on a pour tout $H=(h_1,\dots,h_n)\in\mathbb{R}^n$:

$$\varphi(H)=\varphi(h_1,\dots,h_n)=E^{\mathrm{T}}H+H^{\mathrm{T}}DH=a_1h_1+\dots+a_nh_n+\lambda_1h_1^2+\dots+\lambda_nh_n^2.$$

Ainsi, φ est polynomiale, donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ avec pour tout $(h_1,\dots,h_n)\in\mathbb{R}^n$ et tout $k\in\llbracket 1,n\rrbracket$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial h_k}(h_1,\dots,h_n)=a_k+2\lambda_kh_k.$$

Pour que φ admette un extremum en $(0,\dots,0)$, il faut au moins que $(0,\dots,0)$ soit un point critique, c'est-à-dire que $\dfrac{\partial\varphi}{\partial h_k}(0,\dots,0)=a_k=0$ pour tout $k\in\llbracket 1,n\rrbracket$, donc que $E=0$.

Dans ce cas, on a $\varphi(h_1,\dots,h_n)=\lambda_1h_1^2+\dots+\lambda_nh_n^2$ et s'il existe $k,\ell\in\llbracket 1,n\rrbracket$ tels que $k\neq\ell$, $\lambda_k>0$ et $\lambda_\ell<0$, alors pour tous $h_k,h_\ell\in\mathbb{R}^*$, on a :

$$\varphi(0,\dots,0,h_k,0,\dots,0)=\lambda_kh_k^2>0=\varphi(0,\dots,0)$$
$$\varphi(0,\dots,0,h_\ell,0,\dots,0)=\lambda_\ell h_\ell^2<0=\varphi(0,\dots,0)$$

Donc, φ n'admet pas d'extremum en $(0,\dots,0)$.

Par contre, si tous les λ_k sont positifs (*resp*. négatifs), alors pour tout $(h_1,\dots,h_n)\in\mathbb{R}^n$:

$$\varphi(h_1,\dots,h_n)=\lambda_1h_1^2+\dots+\lambda_nh_n^2\geq 0=\varphi(0,\dots,0)\quad(\textit{resp. }\leq 0=\varphi(0,\dots,0))$$

et φ admet $\varphi(0,\dots,0)=0$ pour minimum (*resp*. maximum) global.

Ainsi, φ présente un extremum (global) sur $\mathbb{R}^n$ en $(0,\dots,0)$ si et seulement si $E=C'+2DX_0=0$ et $Sp(S)\subset\mathbb{R}_-$ ou $Sp(S)\subset\mathbb{R}_+$. Alors, g présente un extremum (global) sur $\mathbb{R}^n$ en X_0 si et seulement si $E=C'+2DX_0=0$ et $Sp(S)\subset\mathbb{R}_-$ ou $Sp(S)\subset\mathbb{R}_+$. Et donc, comme $f(PX_0)=g(X_0)$, *f* présente un extremum (global) sur $\mathbb{R}^n$ en $X_1=PX_0$ si et seulement si $E=C'+2DX_0=0$ et $Sp(S)\subset\mathbb{R}_-$ ou $Sp(S)\subset\mathbb{R}_+$.

Enfin, on a :

$$E=C'+2DX_0=0\quad\Leftrightarrow\quad P^{\mathrm{T}}C+2DX_0=0\quad\Leftrightarrow\quad C=S(-2PX_0)=S(-2X_1).$$

Cette dernière relation n'est possible que si $C\in\operatorname{Im}S$, et, dans ce cas, il existe toujours $X_1\in\mathbb{R}^n$ tel que $C=S(-2X_1)$. Finalement :

$$\boxed{f\text{ présente un extremum sur }\mathbb{R}^n\text{ si et seulement si }C\in\operatorname{Im}S\text{ et }Sp(S)\subset\mathbb{R}_-\text{ ou }Sp(S)\subset\mathbb{R}_+.}$$

Et dans ce cas, l'extremum est global.

Exercice 21

La fonction $g:(x,y)\mapsto f\left(\dfrac{x^2+y^2}{y}\right)$ est de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ comme composée de la fonction $(x,y)\mapsto\dfrac{x^2+y^2}{y}$, de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et à images dans $\mathbb{R}_+^*$ par *f* qui est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\frac{2x}{y}\,f'\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)=\frac{2}{y}\,f'\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)+\left(\frac{2x}{y}\right)^2 f''\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\left(-\frac{x^2}{y^2}+1\right)f'\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=\frac{2x^2}{y^3}\,f'\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)+\left(-\frac{x^2}{y^2}+1\right)^2 f''\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)&=\left(\frac{2}{y}+\frac{2x^2}{y^3}\right)f'\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)+\left[\left(\frac{2x}{y}\right)^2+\left(-\frac{x^2}{y^2}+1\right)^2\right]f''\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)\\&=2\frac{x^2+y^2}{y^3}\,f'\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)+\left[\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^2+2\frac{x^2}{y^2}+1\right]f''\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)\\&=2\frac{x^2+y^2}{y^3}\,f'\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)+\left(\frac{x^2+y^2}{y^2}\right)^2 f''\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)\\&=\frac{x^2+y^2}{y^3}\left[2f'\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)+\frac{x^2+y^2}{y}\,f''\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)\right]\end{aligned}$$

Donc, g est solution de $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=0$ si et seulement si pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\frac{x^2+y^2}{y^3}\left[2f'\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)+\frac{x^2+y^2}{y}\,f''\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)\right]=0\iff 2f'\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)+\frac{x^2+y^2}{y}\,f''\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)=0.$$

Or, à $y\in\mathbb{R}_+^*$ fixé, $\frac{x^2+y^2}{y}=\frac{x^2}{y}+y$ décrit $[y,+\infty[$ quand x décrit $\mathbb{R}_+^*$, donc quand (x,y) décrit $(\mathbb{R}_+^*)^2$, $t=\frac{x^2+y^2}{y}$ décrit $\bigcup_{y\in\mathbb{R}_+^*}[y,+\infty[=\mathbb{R}_+^*$.

Alors, g est solution de $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=0$ si et seulement si pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$:

$$2f'(t)+t\,f''(t)=0.$$

Autrement dit, si et seulement si f' est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E): $y'+\frac{2}{t}y=0$.

Or, les solutions de cette équation différentielle linéaire, homogène et d’ordre 1 sont les fonctions de la forme $t\mapsto ke^{-2\ln t}=\frac{k}{t^2}$ avec $k\in\mathbb{R}$, et si f' est de cette forme, alors $f:t\mapsto\frac{a}{t}+b$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

Finalement, g est solution de $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=0$ si et seulement si f a la forme ci-dessus, donc :

$$\boxed{\text{Les fonctions } f \text{ recherchées sont les fonctions de la forme } t\mapsto\frac{a}{t}+b \text{ avec } (a,b)\in\mathbb{R}^2.}$$