Corrigés des TD du chapitre 7

Exercice 1

1) En effectuant $C_j \leftarrow C_j - C_n$ pour tout $j \in\ 1, n-1\ $:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ n & \dots & n & n-1 & n \\ n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} 1-n & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 2-n & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & n \\ 0 & \dots & n & -1 & n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}_n = (1-n)(2-n)\dots(-1)n = (-1)^{n-1}(n-1)(n-2)\dots(1)n\,.$$

Soit :

$$\boxed{\Delta_1 = (-1)^{n-1}n!}$$

En développant par rapport à la première colonne :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}_{n-1} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

Soit :

$$\boxed{\Delta_2 = 1 + (-1)^{n+1}}$$

En effectuant $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$, puis $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}$, puis $L_{n-2} \leftarrow L_{n-2} - L_{n-3}$, puis … , puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$:

$$\Delta_3 = D_n = \begin{vmatrix} \binom{1}{1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{2} - \binom{1}{1} & \binom{2}{1} - 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \binom{n-1}{n-1} - \binom{n-2}{n-2} & \dots & \dots & \binom{n-1}{1} - 1 & 1 \\ \binom{n}{n} - \binom{n-1}{n-1} & \binom{n}{n-1} - \binom{n-1}{n-2} & \dots & \binom{n}{2} - \binom{n-1}{1} & \binom{n}{1} - 1 \end{vmatrix}_n$$

Avec la formule de Pascal $\binom{p}{k} - \binom{p-1}{k-1} = \binom{p-1}{k}$ (pour $1 \le k \le p-1$), on obtient :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \binom{1}{1} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \binom{n-2}{1} & 1 \\ 0 & \binom{n-1}{n-1} & \cdots & \binom{n-1}{2} & \binom{n-1}{1} \end{vmatrix}_n$$

Et en développant par rapport à la première colonne :

$$D_n = \begin{vmatrix} \binom{1}{1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{2} & \binom{2}{1} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \binom{n-2}{1} & 1 \\ \binom{n-1}{n-1} & \binom{n-1}{n-2} & \cdots & \binom{n-1}{2} & \binom{n-1}{1} \end{vmatrix}_{n-1} = D_{n-1}.$$

Ainsi, $D_n = D_{n-1} = D_{n-2} = ... = D_2 = \begin{vmatrix} \binom{1}{1} & 1 \\ \binom{2}{2} & \binom{2}{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$, donc :

$$\boxed{\Delta_3 = 1}$$

2) On fixe $x \in \mathbb{R}$.

En développant par rapport à la première colonne, on obtient pour tout $n \geq 2$:

$$D_n(x) = xD_{n-1}(x) - \frac{x^2}{2!}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x^2/2! & x & 1 & \ddots & \vdots \\ x^3/3! & x^2/2! & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & x & 1 \\ x^{n-1}/(n-1)! & x^{n-2}/(n-2)! & \cdots & x^2/2! & x \end{vmatrix}_{n-1} + \frac{x^3}{3!}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ x^3/3! & x^2/2! & x & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ x^{n-1}/(n-1)! & x^{n-2}/(n-2)! & \cdots & x^2/2! & x \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$- ... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ x^2/2! & x & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ x^{n-2}/(n-2)! & \cdots & x^2/2! & x & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

En développant chacun des déterminants $(n-1)\times(n-1)$ obtenus par rapport à la première ligne plusieurs fois de suite si nécessaire, on obtient, en posant $D_0(x) = 1$:

$$D_n(x) = xD_{n-1}(x) - \frac{x^2}{2!}D_{n-2}(x) + \frac{x^3}{3!}D_{n-3}(x) - ... + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}D_1(x) + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!}D_0(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k!}D_{n-k}(x).$$

On a de plus :

$$D_0(x) = 1 \qquad D_1(x) = x \qquad D_2(x) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ x^2/2! & x \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2!} \qquad D_3(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x^2/2! & x & 1 \\ x^3/3! & x^2/2! & x \end{vmatrix} = \frac{x^3}{3!}.$$

On conjecture alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$. On le prouve par récurrence forte sur *n*.

La propriété est vraie au rang $n = 0$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, supposons la propriété vraie jusqu'à un rang $n-1$. On a alors pour tout $k\in \llbracket 0,n-1\rrbracket$, $D_k(x)=\dfrac{x^k}{k!}$ (par hypothèse de récurrence), soit pour tout $k\in\llbracket 1,n\rrbracket$, $D_{n-k}(x)=\dfrac{x^{n-k}}{(n-k)!}$ (car $n-k\in\llbracket 0,n-1\rrbracket$) et :

$$D_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k!}D_{n-k}(x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k!}\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^n}{k!(n-k)!}$$
$$=-\frac{x^n}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}=-\frac{x^n}{n!}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=\frac{x^n}{n!}\left[1-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\right]=\frac{x^n}{n!}\left[1-(-1+1)^n\right]=\frac{x^n}{n!}$$

La propriété est donc vraie au rang *n*.

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Finalement, on obtient pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{D_n(x)=\frac{x^n}{n!}}$$

Exercice 2

On a toujours :

- $AB\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\operatorname{Im}AB\subset\operatorname{Im}A$ donc $rg(AB)\le rg(A)\le\min(n,p)$;
- $BA\in\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ avec $\operatorname{Im}BA\subset\operatorname{Im}B$ donc $rg(BA)\le rg(B)\le\min(n,p)$.

Comme $n\neq p$, on a $n<p$ ou $p<n$.

- Si $p<n$, on a $\min(n,p)=p$ donc $rg(AB)\le p<n$: AB n'est pas inversible et $\det AB=0$.
- Si $n<p$, on a $\min(n,p)=n$ donc $rg(BA)\le n<p$: BA n'est pas inversible et $\det BA=0$.

Ainsi, on a toujours :

$$\boxed{\det AB=0 \text{ ou } \det BA=0.}$$

Exercice 3

Le déterminant d'une matrice est polynômial en chacun de ses coefficients, donc la fonction $f:x\mapsto\det(A+xB)$ est une fonction polynômiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Elle est donc entre autres continue sur $\mathbb{R}$.

Or, $f(0)=\det A\neq 0$ car A est inversible. Comme f est continue en 0, elle ne s'annule pas au voisinage de 0, autrement dit, il existe un réel $\varepsilon>0$ tel que pour tout $x\in[-\varepsilon,\varepsilon]$, $f(x)=\det(A+xB)\neq 0$, ce qui implique que $A+xB$ est inversible. Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe un réel } \varepsilon>0 \text{ tel que pour tout } x\in[-\varepsilon,\varepsilon],\ A+xB\in GL_n(\mathbb{R}).}$$

Exercice 4

1) a. On a :

$$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D & 0_n\\ -C & D^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AD-BC & BD^{-1}\\ CD-DC & I_n\end{pmatrix}.$$

Et comme C et D commutent, on a $CD - DC = 0_n$, donc :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD-BC & BD^{-1} \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\det\left[\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}\right] = \det\begin{pmatrix} AD-BC & BD^{-1} \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = \det(AD-BC)\times\det I_n = \det(AD-BC).$$

Et :

$$\det\left[\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}\right] = \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\times\det\begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} = \det M\times\det D\times\det(D^{-1}) = \det M\ .$$

Ainsi :

$$\boxed{\det M = \det\left(AD-BC\right)}$$

b. Posons $f(x) = \det\left(D(x)\right) = \det\left(D + xI_n\right)$. La fonction f est polynomiale en x.

On a $f(0) = \det D = 0$ (car D n'est pas inversible), donc 0 est racine de f.

Si f admet au moins une autre racine réelle (autre que 0), l'ensemble $R = \left\{z \in \mathbb{R}^*,\ f(z) = 0\right\}$ est non vide et fini, donc on peut poser $\alpha = \min\left\{|z|, z \in R\right\}$. Si f n'admet pas de autre racine réelle autre que 0, on peut prendre $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque. Dans les deux cas, On a alors, pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[\backslash\{0\}$, $f(x) \neq 0$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe bien un réel } \alpha > 0 \text{ tel que pour tout } x \in]-\alpha, \alpha[\backslash\{0\},\ \det\left(D(x)\right) \neq 0.}$$

c. D'après ce qui précède, on a pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[\backslash\{0\}$, $\det\left(D(x)\right) \neq 0$, donc $D(x)$ est inversible.

Or, si C et D commutent, C et $D(x)$ commutent aussi pour tout réel x (C et I_n commutent). Alors, d'après la question a., on a, pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[\backslash\{0\}$:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D(x) \end{pmatrix} = \det\left(AD(x) - BC\right).$$

Or, les deux déterminants ci-dessus sont des fonctions polynomiales en x, donc continues en 0 et ainsi :

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D(0) \end{pmatrix} = \lim_{x\to 0}\left[\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D(x) \end{pmatrix}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\det\left(AD(x)-BC\right)\right] = \det\left(AD(0)-BC\right).$$

Soit :

$$\boxed{\det M = \det\left(AD-BC\right)}$$

2) a. Comme A et B commutent, on peut utiliser la question précédente :

$$\det N = \det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = \det\left(A^2 - B(-B)\right) = \det(A^2 + B^2).$$

Posons $Z = A + iB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice $\overline{Z}$ étant la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de Z, on a $\overline{Z} = A - iB$ (car A et B sont deux matrices à coefficients réels).

De plus, l'expression du déterminant d'une matrice étant polynômiale en ses coefficients, on a $\det \overline{Z} = \overline{\det Z}$.

Alors :

$$\det(Z\overline{Z}) = (\det Z)(\det \overline{Z}) = (\det Z)(\overline{\det Z}) = \left|\det Z\right|^2 \geq 0 .$$

Or, comme A et B commutent, on a :

$$Z\overline{Z} = (A+iB)(A-iB) = A^2 - i(AB - BA) + B^2 = A^2 + B^2 .$$

Ainsi :

$$\boxed{\det N = \det(A^2 + B^2) \geq 0}$$

b. On peut écrire :

$$\det N = \det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \underset{\substack{L_{j+n} \leftarrow L_{j+n} + iL_j \\ j \in [\![1,n]\!]}}{=} \det\begin{pmatrix} A & B \\ -B+iA & A+iB \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & B \\ i(A+iB) & A+iB \end{pmatrix}$$

Comme $i(A+iB)$ et $A+iB$ commutent, on peut utiliser la question 1 :

$$\begin{aligned} \det N &= \det\left(A(A+iB) - B\left[i(A+iB)\right]\right) = \det\left((A-iB)(A+iB)\right) \\ &= \det\left(A - iB\right)\det\left(A+iB\right) = \overline{\det\left(A+iB\right)}\det\left(A+iB\right) = \left|\det\left(A+iB\right)\right|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, même si A et B ne commutent pas :

$$\boxed{\det N \geq 0}$$

3) On a :

$$\begin{pmatrix} xI_p & A \\ B & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I_p & 0_{p,q} \\ B & -xI_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB - xI_p & -xA \\ 0_{q,p} & -xI_q \end{pmatrix} \quad \textbf{(1)}.$$

$$\begin{pmatrix} xI_p & A \\ B & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I_p & A \\ 0_{q,p} & -xI_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xI_p & 0_{p,q} \\ -B & BA - xI_q \end{pmatrix} \quad \textbf{(2)}.$$

Alors, avec **(1)**, on a :

$$\det\begin{pmatrix} xI_p & A \\ B & I_q \end{pmatrix} \times \det\begin{pmatrix} -I_p & 0_{p,q} \\ B & -xI_q \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} AB - xI_p & -xA \\ 0_{q,p} & -xI_q \end{pmatrix} = \det\left(AB - xI_p\right) \times \det\left(-xI_q\right).$$

Or, $\det\left(-xI_q\right) = (-x)^q$ et $\det\begin{pmatrix} -I_p & 0_{p,q} \\ B & -xI_q \end{pmatrix} = \det\left(-I_p\right) \times \det\left(-xI_q\right) = (-1)^p \times (-x)^q$, donc :

$$\det\left(AB - xI_p\right) \times (-x)^q = \det\begin{pmatrix} xI_p & A \\ B & I_q \end{pmatrix} \times (-1)^p \times (-x)^q .$$

De même avec **(2)**, on obtient :

$$\det\left(BA - xI_q\right) \times (-x)^p = \det\begin{pmatrix} xI_p & A \\ B & I_q \end{pmatrix} \times (-1)^p \times (-x)^q .$$

Et ainsi :

$$\boxed{(-x)^q \det\left(AB - xI_p\right) = (-x)^p \det\left(BA - xI_q\right)}$$

4) Considérons deux cas.

<u>*1^er cas*</u> : $a = 0$

Alors, $\det M = \det\begin{pmatrix} 0_n & bA \\ cA & dA \end{pmatrix}$ et on effectue $L_i \leftrightarrow L_{i+n}$ pour tout $i \in \ 1, n\ $.

Chaque interversion multiplie le déterminant par – 1 et ainsi, on obtient :

$$\det M = (-1)^n \det\begin{pmatrix} cA & dA \\ 0_n & bA \end{pmatrix}.$$

Avec le déterminant par blocs :

$$\det M = (-1)^n \det\left(cA\right)\det\left(bA\right) = (-1)^n c^n \times \det A \times b^n \times \det A = (-bc)^n (\det A)^2.$$

Et avec $a = 0$, on a $\det B = -bc$, donc :

$$\det M = (\det B)^n (\det A)^2.$$

<u>*2^nd cas*</u> : $a \neq 0$

On effectue $L_{i+n} \leftrightarrow L_{i+n} - \dfrac{c}{a} L_i$ pour tout $i \in \ 1, n\ $, ce qui donne :

$$\det M = \det\begin{pmatrix} aA & bA \\ 0_n & \left(d - \dfrac{c}{a} b\right) A \end{pmatrix}.$$

Alors, à nouveau avec le déterminant par blocs :

$$\det M = \det\left(aA\right)\det\left(\left(d - \frac{c}{a} b\right) A\right) = a^n \times \det A \times \left(d - \frac{c}{a} b\right)^n \times \det A = \left(ad - cb\right)^n (\det A)^2.$$

Soit, à nouveau :

$$\det M = (\det B)^n (\det A)^2.$$

Donc, dans tous les cas :

$$\boxed{\det M = (\det B)^n (\det A)^2}$$

Exercice 5

Posons :

$$P(X) = \begin{vmatrix} 1 & X & \cdots & X^{k-1} & X^k & X^k & \cdots & X^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^k & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-1} & a_2^k & a_2^{k+1} & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^k & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première ligne, on justifie facilement que P est un polynôme (en X), de degré au plus n.

Le coefficient de X^n est, au signe près, un déterminant de Vandermonde :

$$(-1)^{n+2}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{\,k} & a_1^{\,k+1} & \cdots & a_1^{\,n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{\,k} & a_2^{\,k+1} & \cdots & a_2^{\,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{\,k} & a_n^{\,k+1} & \cdots & a_n^{\,n-1} \end{vmatrix} = (-1)^n V_n(a_1,a_2,\dots,a_n) = (-1)^n \prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i) \neq 0$$

Donc, P est de degré n.

De plus, pour tout $\ell \in [\![1,n]\!]$, on a $P(a_\ell)=0$ (car c'est le déterminant d'une matrice possédant deux lignes identiques). Comme les a_ℓ sont deux à deux distincts, ce sont les n racines simples de P et ainsi :

$$P(X) = (-1)^n \prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)\prod_{\ell=1}^{n}(X-a_\ell).$$

Dans le développement par rapport à la première ligne, le coefficient de X^k est :

$$(-1)^{k+2}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{\,k-1} & a_1^{\,k+1} & \cdots & a_1^{\,n} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{\,k-1} & a_2^{\,k+1} & \cdots & a_2^{\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{\,k-1} & a_n^{\,k+1} & \cdots & a_n^{\,n} \end{vmatrix} = (-1)^k \Delta_k$$

Or, si $P(X) = \alpha_n X^n + \dots + \alpha_k X^k + \dots + \alpha_1 X + \alpha_0$ (avec P scindé, de racines les a_ℓ), on a :

$$\alpha_k = (-1)^{n-k}\alpha_n \sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_{n-k}\le n} a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_{n-k}} .$$

Ainsi :

$$(-1)^k\Delta_k = (-1)^{n-k}(-1)^n \prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i) \sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_{n-k}\le n} a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_{n-k}} .$$

Soit :

$$\boxed{\Delta_k = \prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i) \sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_{n-k}\le n} a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_{n-k}}}$$

Exercice 6

1) Soit $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = QDQ^{-1}$. Pour tout $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on a alors :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k = \sum_{k=0}^{p} a_k (QDQ^{-1})^k = \sum_{k=0}^{p} a_k QD^kQ^{-1} = Q\left(\sum_{k=0}^{p} a_k D^k\right)Q^{-1} = Q\big(P(D)\big)Q^{-1}.$$

Or, $D = diag\left(\lambda_1, \dots, \lambda_n\right)$, donc :

$$P(D) = \sum_{k=0}^{p} a_k D^k = \sum_{k=0}^{p} a_k diag\left(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k\right) = diag\left(\sum_{k=0}^{p} a_k\lambda_1^k, \dots, \sum_{k=0}^{p} a_k\lambda_n^k\right) = diag\big(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)\big) = \sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i)E_{i,i}$$

où $E_{i,i}$ est la matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans laquelle le 1 est le $i^{\text{ième}}$ coefficient diagonal.

Alors :

$$P(A)=Q\left(\sum_{i=1}^{p}P(\lambda_i)E_{i,i}\right)Q^{-1}=\sum_{i=1}^{p}P(\lambda_i)QE_{i,i}Q^{-1}.$$

Et, en posant $A_i=QE_{i,i}Q^{-1}$ pour tout $i\in\llbracket 1,n\rrbracket$ (qui ne dépend pas de *P*), on obtient :

$$\boxed{\text{Pour tout } P\in\mathbb{K}[X],\ P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(\lambda_i)A_i.}$$

2) Soit $i\in\llbracket 1,n\rrbracket$. On veut montrer que $A_i=QE_{i,i}Q^{-1}$ est un polynôme en *A*, autrement dit qu'il existe $P_i\in\mathbb{C}[X]$ tel que :

$$A_i=P_i(A)\quad\Leftrightarrow\quad QE_{i,i}Q^{-1}=Q\big(P_i(D)\big)Q^{-1}\quad\Leftrightarrow\quad P_i(D)=E_{i,i}\quad\Leftrightarrow\quad\forall\,k\in\llbracket 1,n\rrbracket,\ P_i(\lambda_k)=\delta_{i,k}.$$

Comme les λ_i sont deux à deux distincts, il suffit de prendre pour P_i le polynôme interpolateur de Lagrange associé aux λ_k et $\delta_{i,k}$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Pour tout } i\in\llbracket 1,n\rrbracket,\text{ il existe bien un polynôme } P_i\in\mathbb{C}[X] \text{ tel que } A_i=P_i(A).}$$

Exercice 7

Remarquons que comme la famille $\left(f_1,\,f_2,\dots,\,f_n\right)$ contient *n* fonctions, $rg\left(f_1,\,f_2,\dots,\,f_n\right)=n$ si et seulement la famille est libre. On veut donc prouver que :

$$\left(f_1,\,f_2,\dots,\,f_n\right)\text{ est libre}\quad\Leftrightarrow\quad\exists\,(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\ \det\left[\left(f_j(x_i)\right)_{1\le i,j\le n}\right]\neq 0.$$

Soit par contraposée :

$$\left(f_1,\,f_2,\dots,\,f_n\right)\text{ est liée}\quad\Leftrightarrow\quad\forall\,(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \det\left[\left(f_j(x_i)\right)_{1\le i,j\le n}\right]=0.$$

Par ailleurs, pour fixer les idées, notons que :

$$\det\left[\left(f_j(x_i)\right)_{1\le i,j\le n}\right]=\begin{vmatrix}f_1(x_1)&f_2(x_1)&\cdots&f_n(x_1)\\f_1(x_2)&f_2(x_2)&\cdots&f_n(x_2)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\f_1(x_n)&f_2(x_n)&\cdots&f_n(x_n)\end{vmatrix}_n.$$

($\Rightarrow$) On suppose que la famille $\left(f_1,\,f_2,\dots,\,f_n\right)$ est liée, donc il existe $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\lambda_1f_1+\lambda_2f_2+\dots+\lambda_nf_n=0_{\mathbb{R}}$, soit pour tout réel *x* :

$$\lambda_1f_1(x)+\lambda_2f_2(x)+\dots+\lambda_nf_n(x)=0.$$

Soit $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. On a alors pour tout $j\in\llbracket 1,n\rrbracket$, $\lambda_1f_1(x_j)+\lambda_2f_2(x_j)+\dots+\lambda_nf_n(x_j)=0$.

Donc :

$$\lambda_1\begin{pmatrix}f_1(x_1)\\f_1(x_2)\\\vdots\\f_1(x_n)\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}f_2(x_1)\\f_2(x_2)\\\vdots\\f_2(x_n)\end{pmatrix}+\dots+\lambda_n\begin{pmatrix}f_n(x_1)\\f_n(x_2)\\\vdots\\f_n(x_n)\end{pmatrix}=0.$$

Autrement dit, les colonnes de la matrice $\left(f_j(x_i)\right)_{1\le i,j\le n}$ sont liées et donc $\det\left[\left(f_j(x_i)\right)_{1\le i,j\le n}\right]=0$.

($\Leftarrow$) On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour $n=1$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\det\left[\left(f_1(x)\right)\right] = f_1(x) = 0$, donc $f_1 = 0_{\mathbb{R}}$ et (f_1) est liée.

- On suppose la propriété vraie à un rang *n*.

  Soit $\left(f_1, f_2, \dots, f_n, f_{n+1}\right)$ pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\det\left[\left(f_i(x_j)\right)_{1\le i, j\le n+1}\right] = 0$, soit :

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) & f_{n+1}(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) & f_{n+1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_n(x_n) & f_{n+1}(x_n) \\ f_1(x_{n+1}) & f_2(x_{n+1}) & \cdots & f_n(x_{n+1}) & f_{n+1}(x_{n+1}) \end{vmatrix}_{n+1} = 0.$$

  Si la famille $\left(f_1, f_2, \dots, f_n\right)$ est liée, alors $\left(f_1, f_2, \dots, f_n, f_{n+1}\right)$ aussi.

  Supposons que la famille $\left(f_1, f_2, \dots, f_n\right)$ est libre. Alors, par hypothèse de récurrence, il existe

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \det\left[\left(f_j(x_i)\right)_{1\le i, j\le n}\right] = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix}_n \neq 0.$$

  Par hypothèse, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) & f_{n+1}(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) & f_{n+1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_n(x_n) & f_{n+1}(x_n) \\ f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) & f_{n+1}(x) \end{vmatrix}_{n+1} = 0.$$

  En développant par rapport à la dernière ligne, on obtient :

$$(-1)^{n+2} f_1(x) \begin{vmatrix} f_2(x_1) & f_3(x_1) & \cdots & f_{n+1}(x_1) \\ f_2(x_2) & f_3(x_2) & \cdots & f_{n+1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_2(x_n) & f_3(x_n) & \cdots & f_{n+1}(x_n) \end{vmatrix}_n + \dots + (-1)^{n+1+n+1} f_{n+1}(x) \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix}_n = 0.$$

  Ainsi, si on note λ_k le coefficient de $f_k(x)$ (indépendant de *x*) dans la relation ci-dessus, on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_{n+1} f_{n+1}(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_{n+1} f_{n+1} = 0_{\mathbb{R}}.$$

  Comme $\lambda_{n+1} = \det\left[\left(f_j(x_i)\right)_{1\le i, j\le n}\right] \neq 0$, les λ_k ne sont pas tous nuls, et ainsi, la famille $\left(f_1, f_2, \dots, f_n, f_{n+1}\right)$ est liée. La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{rg\left(f_1, f_2, \dots, f_n\right) = n \quad \Leftrightarrow \quad \left(f_1, f_2, \dots, f_n\right) \text{ est libre} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \det\left[\left(f_j(x_i)\right)_{1\le i, j\le n}\right] \neq 0}$$

Exercice 8

Exercice classique (qui revient souvent à l'oral).

1) Tel qu'indiqué, procédons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour $n=1$, la seule matrice nilpotente de $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ est (0) qui commute avec toute matrice $A=(a)$ de $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ et on a immédiatement $\det(A+B)=\det(A+0_1)=\det A$. La propriété est vraie au rang $n=1$.
- Supposons la propriété vraie jusqu'à un rang $n-1 \in \mathbb{N}^*$.

  Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB=BA$ et B est nilpotente : il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^q = 0_n$.
  Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et $p = \dim \ker\left(A-\lambda I_n\right) \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (dans $\mathbb{C}^n$). Il existe alors $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$P^{-1}AP = A' = \begin{pmatrix} \lambda I_p & A_2 \\ 0_{n-p,p} & A_1 \end{pmatrix}.$$

  On a alors :

$$\det A = \det A' = \det \begin{pmatrix} \lambda I_p & A_2 \\ 0_{n-p,p} & A_1 \end{pmatrix} = \det(\lambda I_p) \times \det(A_1).$$

  Remarquons de plus que A' est la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A dans une base $\mathcal{B}$ dont les p premiers vecteurs forment une base de $\ker\left(A-\lambda I_n\right)$.
  Comme $AB=BA$, si $X \in \ker\left(A-\lambda I_n\right)$, on a :

$$A(BX) = ABX = BAX = B(\lambda X) = \lambda BX.$$

  Donc, $BX \in \ker\left(A-\lambda I_n\right)$.
  On en conclut que $\ker\left(A-\lambda I_n\right)$ est stable par B, donc la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à B dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$B' = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} B_3 & B_2 \\ 0_{n-p,p} & B_1 \end{pmatrix}.$$

  Alors :

$$\begin{aligned}
\det(A+B) &= \det\left(P^{-1}(A+B)P\right) = \det(P^{-1}AP + P^{-1}BP) = \det(A'+B') \\
&= \det\left[\begin{pmatrix} \lambda I_p & A_2 \\ 0_{n-p,p} & A_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_3 & B_2 \\ 0_{n-p,p} & B_1 \end{pmatrix}\right] = \det \begin{pmatrix} \lambda I_p + B_3 & A_2 + B_2 \\ 0_{n-p,p} & A_1 + B_1 \end{pmatrix} . \\
&= \det(\lambda I_p + B_3) \times \det(A_1 + B_1)
\end{aligned}$$

  De plus, avec le produit par blocs :

  - $B'^q = \begin{pmatrix} B_3^q & C_2 \\ 0_{n-p,p} & B_1^q \end{pmatrix} = P^{-1}B^qP = 0_n$ donc $B_3^q = 0_p$ et $B_1^q = 0_{n-p}$: B_1 et B_3 sont nilpotentes ;
  - $A'B' = (P^{-1}AP)(P^{-1}BP) = P^{-1}(AB)P = P^{-1}(BA)P = (P^{-1}BP)(P^{-1}AP) = B'A'$, soit :

$$\begin{pmatrix} \lambda I_p & A_2 \\ 0_{n-p,p} & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_3 & B_2 \\ 0_{n-p,p} & B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda B_3 & \times \\ 0_{n-p,p} & A_1B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_3 & B_2 \\ 0_{n-p,p} & B_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda I_p & A_2 \\ 0_{n-p,p} & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda B_3 & \times \\ 0_{n-p,p} & B_1A_1 \end{pmatrix}.$$

    Donc, $A_1B_1 = B_1A_1$.

  Ainsi, si $p<n$, $A_1, B_1 \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ avec $1 \leq n-p \leq n-1$, $A_1B_1 = B_1A_1$ et B_1 est nilpotente, donc on peut utiliser l'hypothèse de récurrence pour conclure que :

$$\det(A_1 + B_1) = \det A_1.$$

Si $p = n$, les matrices A_1 et B_1 n'existe pas et A est scalaire.

Par ailleurs, comme $B_3^q = 0_p$, le polynôme X^q est annulateur de B_3, donc 0 est la seule valeur propre (réelle ou complexe) de B_3. Comme B_3 est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, elle est semblable à une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \times & \cdots & \times \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \times \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\det(\lambda I_p + B_3) = \det \begin{pmatrix} \lambda & \times & \cdots & \times \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \times \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^p = \det(\lambda I_p).$$

Finalement :

$$\det(A+B) = \det(\lambda I_p + B_3) \times \det(A_1 + B_1) = \det(\lambda I_p) \times \det(A_1) = \det A.$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Autrement dit, pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$ et B est nilpotente, on a bien :

$$\boxed{\det(A+B) = \det A}$$

2) Avec $\det(A+B) = \det A$, cette question est immédiate :

$$A+B \in GLn_n(\mathbb{K}) \iff \det(A+B) \neq 0 \iff \det A \neq 0 \iff A \in GLn_n(\mathbb{K}).$$

Ainsi :

$$\boxed{A+B \text{ est inversible si et seulement si } A \text{ l'est.}}$$

Exercice 9

Posons $P(x) = \det(xA+B)$.

Tous les coefficients de $xA+B$ sont affines en x et $\det(xA+B)$ est une combinaison linéaires de produits de trois coefficients de $xA+B$, donc $P(x)$ est polynômiale en x, de degré au plus 3.

Or, $\det B = \det(A+B) = \det(A-B) = (-1)^3 \det(-A+B) = 0$, donc – 1, 0 et 1 sont racines de P.

Ainsi, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$P(x) = ax(x-1)(x+1) = a(x^3 - x).$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{P(x)}{x^3} = \frac{1}{x^3}\det(xA+B) = \det\left(A + \frac{1}{x}B\right).$$

On montre comme ci-dessus que l'application $t \mapsto \det\left(A+tB\right)$ est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}$. Alors :

$$\lim_{x\to+\infty} \det\left(A+\frac{1}{x}B\right) = \lim_{t\to 0}\det\left(A+tB\right) = \det A = 0 .$$

Or :

$$\lim_{x\to+\infty} \det\left(A+\frac{1}{x}B\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a(x^3-x)}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \left(a-\frac{a}{x^2}\right) = a .$$

Ainsi, $a=0$ et donc $P(x)=0$, soit :

$$\boxed{\text{Pour tout } x\in\mathbb{R},\ \det(xA+B)=0 .}$$