# *Corrigés des TD du chapitre 6*

## *Exercice 1*

1) Avec la formule de Grassmann, on a :

$$\dim(F+G+H)=\dim(F+G)+\dim H-\dim\big((F+G)\cap H\big).$$

Or :

$$\left.\begin{array}{l} F\subset F+G \quad\Rightarrow\quad F\cap H\subset (F+G)\cap H \\ G\subset F+G \quad\Rightarrow\quad G\cap H\subset (F+G)\cap H \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad F\cap H+G\cap H\subset (F+G)\cap H\ .$$

Donc :

$$\dim\big(F\cap H+G\cap H\big)\le \dim\big((F+G)\cap H\big).$$

Alors :

$$\dim(F+G+H)\ge \dim(F+G)+\dim H-\dim\big(F\cap H+G\cap H\big).$$

En utilisant à nouveau la formule de Grassmann pour évaluer $\dim(F+G)$ et $\dim\big(F\cap H+G\cap H\big)$, et avec $(F\cap H)\cap(G\cap H)=F\cap G\cap H$ ), on obtient :

$$\begin{array}{l} \dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G) \\ \dim\big(F\cap H+G\cap H\big)=\dim(F\cap H)+\dim(G\cap H)-\dim(F\cap G\cap H) \end{array}$$

D’où :

$$\boxed{\dim(F+G+H)\le \dim F+\dim G+\dim H-\dim(F\cap G)-\dim(F\cap H)-\dim(G\cap H)+\dim(F\cap G\cap H)}$$

2) On a par hypothèse $F=(F\cap G)\oplus F'$ et $G=(F\cap G)\oplus G'$.

Alors, $F\cap G'\subset\big(F\cap G\big)\cap G'=\{0\}$ et donc $F\cap G'=\{0\}$. D’où :

$$F+G'=F\oplus G'=(F\cap G)\oplus F'\oplus G'.$$

La somme de $F\cap G$, $F'$ et $G'$ est directe.

De plus, on a :

$$F+G=\big((F\cap G)\oplus F'\big)+\big((F\cap G)\oplus G'\big)=F'+(F\cap G)+(F\cap G)+G'=(F\cap G)+F'+G'.$$

Et on vient de voir que la somme est directe, donc :

$$\boxed{F+G=(F\cap G)\oplus F'\oplus G'}$$

3) Soient $H_1, H_2, \dots, H_{n-1}$ des hyperplans de $E$ (tous de dimension $n-1$) On a :

$$\dim(H_1\cap H_2)=\dim H_1+\dim H_2-\dim(H_1+H_2)=2(n-1)-\dim(H_1+H_2).$$

Or, $\dim(H_1+H_2)\le n$, donc :

$$\dim(H_1\cap H_2)\ge 2(n-1)-n=n-2.$$

Montrons alors par récurrence finie que pour tout $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$, $\dim(H_1 \cap \ldots \cap H_k) \geq n-k$.

On vient de voir que cela est vrai pour $k = 2$. Supposons l'inégalité vraie pour $k \in \llbracket 2, n-2 \rrbracket$ (s'il y en a, c'est-à-dire quand $n \geq 4$). On alors :

$$\dim(H_1 \cap \ldots \cap H_k \cap H_{k+1}) = \dim(H_1 \cap \ldots \cap H_k) + \dim H_{k+1} - \dim\big((H_1 \cap \ldots \cap H_k) + H_{k+1}\big).$$

Et :

$$\dim(H_1 \cap \ldots \cap H_k) \geq n-k \quad \text{(par hypothèse de récurrence)}$$
$$\dim H_{k+1} = n-1$$
$$\dim\big((H_1 \cap \ldots \cap H_k) + H_{k+1}\big) \leq n$$

Donc :

$$\dim(H_1 \cap \ldots \cap H_k \cap H_{k+1}) \geq n-k+n-1-n = n-(k+1).$$

Et ainsi, la propriété est vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ et en particulier pour $k = n-1$, ce qui donne :

$$\dim(H_1 \cap \ldots \cap H_{n-1}) \geq n-(n-1) = 1.$$

Ainsi, $H_1 \cap \ldots \cap H_{n-1}$ est de dimension au moins 1, donc :

$$\boxed{\text{L'intersection } H_1 \cap \ldots \cap H_{n-1} \text{ n'est pas réduite à } \{0\}.}$$

## *Exercice 2*

Comme *f* et *g* sont linéaires et vérifient $f^2 = g^2 = id_E$, ce sont des symétries de *E*. Elles sont donc bijectives entre autres (et même involutives).

Si $F = \ker(f - id_E)$ et $G = \ker(f + id_E)$, *f* est la symétrie par rapport à F, parallèlement à G et $E = F \oplus G$.

Soit $x \in F$. On a $f(x) = x$, donc $g\big(f(x)\big) = g(x)$ et avec $gf = -fg$, on a $f\big(g(x)\big) = -g(x)$, donc $g(x) \in G$.

Ainsi : $g(F) \subset G$.

On prouve de la même façon que $g(G) \subset F$ et donc $g^2(G) \subset g(F)$, soit (avec $g^2 = id_E$) : $G \subset g(F)$.

Finalement :

$$g(F) = G.$$

Or, g est bijective, donc $\dim g(F) = \dim F$, ce qui nous donne :

$$\dim F = \dim G.$$

Comme $E = F \oplus G$, on a $\dim F + \dim G = n$ et en notant *p* la dimension commune de *F* et *G*, on obtient :

$$n = 2p.$$

Donc :

$$\boxed{n \text{ est pair.}}$$

Soit maintenant $(e_1, e_2, ..., e_p)$ une base de *F*.

Comme $g(F) = G$ avec *g* bijective, $\big(g(e_1), g(e_2), ..., g(e_p)\big)$ est une base de *G*.

Posons pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $g(e_k) = e_{p+k}$ et $\mathcal{B} = \big(e_1, ..., e_p, g(e_1), ..., g(e_p)\big) = \big(e_1, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_{2p}\big)$.

Comme $E = F \oplus G$, $\mathcal{B}$ est une base de *E* et, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$ :

- $e_k \in F$ donc $f(e_k) = e_k$ et $g(e_k) = e_{p+k}$ ;
- $e_{p+k} \in G$ donc $f(e_{p+k}) = -e_{p+k}$ et $g(e_{p+k}) = g^2(e_k) = e_k$.

Ainsi :

Les matrices de *f* et *g* sont respectivement $\left(\begin{array}{c:c} I_p & 0_p \\ \hdashline 0_p & -I_p \end{array}\right)$ et $\left(\begin{array}{c:c} 0_p & I_p \\ \hdashline I_p & 0_p \end{array}\right)$ dans la base $\mathcal{B}$.

## *Exercice 3*

1) On a :

$$(f \text{ non injective}) \Leftrightarrow (\ker f \neq \{0\})$$

Et :

$(f = 0$ ou $f$ est un diviseur de zéro à gauche$)$ $\Leftrightarrow$ (Il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \neq 0$ et $fg = 0$)

$\Leftrightarrow$ (Il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Im} g \neq \{0\}$ et $\operatorname{Im} g \subset \ker f$)

Il est alors immédiat que s'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Im} g \neq \{0\}$ et $\operatorname{Im} g \subset \ker f$, alors $\ker f \neq \{0\}$.

Réciproquement, si $\ker f \neq \{0\}$, alors si *p* est un projecteur sur $\ker f$, parallèlement à un supplémentaire quelconque de $\ker f$, on a $p \neq 0$ et $fp = 0$.

Ainsi, on a bien :

$(f$ non injective$)$ $\Leftrightarrow$ $(f = 0$ ou $f$ est un diviseur de zéro à gauche$)$.

2) On a :

$$(f \text{ non surjective}) \Leftrightarrow (\operatorname{Im} f \neq E)$$

Et :

$(f = 0$ ou $f$ est un diviseur de zéro à droite$)$ $\Leftrightarrow$ (Il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \neq 0$ et $gf = 0$)

$\Leftrightarrow$ (Il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\ker g \neq E$ et $\operatorname{Im} f \subset \ker g$)

Il est alors immédiat que s'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\ker g \neq E$ et $\operatorname{Im} f \subset \ker g$, alors $\operatorname{Im} f \neq E$.

Réciproquement, si $\operatorname{Im} f \neq E$, alors si *p* est un projecteur sur un supplémentaire quelconque de $\operatorname{Im} f$ (qui n'est pas réduit à {0}) et parallèlement à $\operatorname{Im} f$, on a $p \neq 0$ et $pf = 0$.

Ainsi, on a bien :

$(f$ non surjective$)$ $\Leftrightarrow$ $(f = 0$ ou $f$ est un diviseur de zéro à droite$)$.

***Exercice 4***

1) On a $P = P_1P_2 = P_2P_1$, donc $P(f) = P_1(f)P_2(f) = P_2(f)P_1(f) = uv = vu$ et comme $P(f) = 0$, on a bien :

$$\boxed{uv = vu = 0}$$

Si $uv = 0$, alors $\operatorname{Im} v \subset \ker u$ et en passant aux dimensions, on obtient avec le théorème du rang :

$$rg(v) \leq \dim(\ker u) \quad \Leftrightarrow \quad n - \dim(\ker v) \leq \dim(\ker u).$$

Soit :

$$\boxed{\dim(\ker u) + \dim(\ker v) \geq n}$$

2) On a admis le théorème de Bézout pour les polynômes, donc il existe $(U,V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $UP_1 + VP_2 = 1$. Ceci se traduit par :

$$U(f)P_1(f) + V(f)P_2(f) = U(f)u + V(f)v = id_E.$$

Donc pour tout $x \in E$ :

$$x = U(f)\big(u(x)\big) + V(f)\big(v(x)\big).$$

Si $x \in \ker u \cap \ker v$, on a $u(x) = v(x) = 0$ et donc :

$$x = U(f)(0) + V(f)(0) = 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\ker u \cap \ker v = \{0\}}$$

On a alors :

$$\ker u + \ker v = \ker u \oplus \ker v \subset E.$$

Donc, $\dim(\ker u \oplus \ker v) = \dim(\ker u) + \dim(\ker v) \leq n$. Avec $\dim(\ker u) + \dim(\ker v) \geq n$ obtenu plus haut, on obtient :

$$\dim(\ker u \oplus \ker v) = \dim(\ker u) + \dim(\ker v) = n.$$

Et donc :

$$\boxed{E = \ker u \oplus \ker v}$$

3) Comme $u = P_1(f)$ est un polynôme en *f*, *u* et *f* commutent. Alors, pour tout $x \in \ker u$, on a :

$$u\big(f(x)\big) = f\big((u(x)\big) = f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \in \ker u.$$

Ainsi, $f(\ker u) \subset \ker u$, donc :

$$\boxed{\ker u \text{ est stable par } f.}$$

Notons $f_u$ l'endomorphisme induit par *f* sur $\ker u$, soit $f_u : \ker u \to \ker u\,;\, x \mapsto f(x)$.

Pour tout $x \in \ker u$, on a $P_1(f_u)(x) = P_1(f)(x) = u(x) = 0$. Donc, $P_1(f_u) = 0$ et ainsi :

$$\boxed{P_1 \text{ est un polynôme annulateur de l'endomorphisme induit par } f \text{ sur } \ker u.}$$

4) Soient $(e_1, e_2, ..., e_p)$ une base de $\ker u$ et $(e_{p+1}, e_{p+2}, ..., e_n)$ une base de $\ker v$.

Comme $E = \ker u \oplus \ker v$, la famille $\mathcal{B} = \left(e_1, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_n\right)$ est une base de *E*.

Comme $\ker u$ est stable par *f*, pour tout $j \in [\![ 1, p ]\!]$, $f(e_j) \in \ker u$ donc $f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} e_i$.

Or, *u* et *v* jouent le même rôle, donc on prouve comme plus haut que $\ker v$ est stable par *f*, et donc, pour tout $j \in [\![ p+1, n ]\!]$, $f(e_j) \in \ker v$ donc $f(e_j) = \sum_{i=p+1}^{n} a_{i,j} e_i$.

Posons $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $B = (a_{i,j})_{p+1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$, on a alors :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c:c} A & 0 \\ \hdashline 0 & B \end{array}\right).$$

On a $A = M_{(e_1, e_2, ..., e_p)}(f_u)$ et $P_1(f_u) = 0$, donc $P_1(A) = 0_p$. On prouve de même que $P_2(B) = 0_{n-p}$ et ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Il existe une base } \mathcal{B} \text{ de } E \text{ dans laquelle } M_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c:c} A & 0 \\ \hdashline 0 & B \end{array}\right) \text{ où } A \text{ et } B \\ \text{sont des matrices carrées telles que } P_1(A) = 0_p \text{ et } P_2(B) = 0_{n-p}.\end{array}}$$

5) Comme on vient de le prouver pour $r = 2$, tentons de généraliser par récurrence le fait que si $P(f) = 0$ où $P = P_1 P_2 ... P_r$ avec $r \ge 2$ et où les $P_i$ sont des polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux sans racine commune (réelle ou complexe), alors on peut trouver une base de *E* dans laquelle la matrice de *f* est diagonale par blocs.

Supposons la propriété vraie à un rang $r \ge 2$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $P(f) = 0$ avec $P = P_1 P_2 ... P_r P_{r+1}$ où les $P_i$ sont des polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux sans racine commune (réelle ou complexe).

Posons $Q = P_1 P_2 ... P_r$. Les racines réelles ou complexes de *Q* sont celles des $P_i$ pour $i \in [\![ 1, r ]\!]$, donc ne sont pas racines de $P_{r+1}$ (qui n'a de racine commune avec aucun des autres $P_i$). On a de plus $P = Q P_{r+1}$.

On peut donc utiliser le résultat que l'on vient de prouver : il existe deux matrices carrées *A* et *B*, et une base $\mathcal{B} = \left(e_1, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_n\right)$ de *E* telle que $(e_1, e_2, ..., e_p)$ une base de $\ker Q(f)$ et $(e_{p+1}, e_{p+2}, ..., e_n)$ une base de $\ker P_{r+1}(f)$ et dans laquelle :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c:c} A & 0 \\ \hdashline 0 & B \end{array}\right).$$

De plus, $Q = P_1 P_2 ... P_r$ est un polynôme annulateur de l'endomorphisme induit par *f* sur $\ker Q(f)$ et *A* est la matrice de cet endomorphisme dans la base $(e_1, e_2, ..., e_p)$ de $\ker Q(f)$.

On peut donc utiliser l'hypothèse de récurrence : il existe une base $(f_1, f_2,..., f_p)$ de $\ker Q(f)$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme induit par $f$ sur $\ker Q(f)$ est diagonale par blocs.

La matrice de $f$ dans la base $(f_1, f_2,..., f_p, e_{p+1}, e_{p+2},..., e_n)$ sera alors elle aussi diagonale par bloc, donc la propriété est vraie au rang $r+1$.

La propriété est donc initialisée et héréditaire donc vraie pour tout $r \geq 2$, autrement dit :

> Si $P(f)=0$ où $P = P_1P_2...P_r$ avec $r \geq 2$ et où les $P_i$ sont des polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux sans racine commune (réelle ou complexe), alors on peut trouver une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est diagonale par blocs.

***Exercice 5***

Remarquons que si $A$ est une matrice nilpotente, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$ est finie, donc $\exp(A)$ est bien définie.

1) Soient $p$ et $q$ les indices de nilpotence respectifs de $A$ et $B$. On a donc pour tout entier $k \geq p$, $A^k = 0_n$ et pour tout entier $k \geq q$, $B^k = 0_n$. Alors, comme $A$ et $B$ commutent, on peut écrire :

$$(A+B)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} A^k B^{p+q-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p+q}{k} A^k B^{p+q-k} + \sum_{k=p+1}^{p+q} \binom{p+q}{k} A^k B^{p+q-k} .$$

Or :

- pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, on a $p+q-k \geq q$, donc $B^{p+q-k} = 0_n$ ;
- pour tout $k \in \llbracket p+1, p+q \rrbracket$, on a $A^k = 0_n$.

Ainsi, dans la somme précédente, tous les termes sont nuls, donc $(A+B)^{p+q} = 0_n$, ce qui prouve que :

$$\boxed{A+B \text{ est nilpotente.}}$$

On a alors :

$$\exp(A) \times \exp(B) = \left( \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} A^i \right) \times \left( \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} B^j \right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} \frac{1}{j!} A^i B^j = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!(k-i)!} A^i B^{k-i}$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left( \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i B^{k-i} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (A+B)^k = \exp(A+B)$$

Et comme $A+B = B+A$, on a $\exp(B) \times \exp(A) = \exp(B+A) = \exp(A+B) = \exp(A) \times \exp(B)$ et ainsi :

$$\boxed{\exp(A+B) = \exp(A) \times \exp(B) = \exp(B) \times \exp(A)}$$

2) Remarquons que $0_n$ est nilpotente et $\exp(0_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} {0_n}^k = I_n + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} {0_n}^k = I_n$. Alors :

$$\exp(A) \times \exp(-A) = \exp(-A) \times \exp(A) = \exp(A-A) = \exp(0_n) = I_n .$$

Donc :

$$\boxed{\exp(A) \text{ est inversible, d'inverse } \exp(-A).}$$

***Exercice 6***

Commençons par traiter le cas où $a=0$. La relation devient $tr(M)A=B$ et il existe une matrice $M$ vérifiant cela si et seulement si $B=\lambda A$. Dans ce cas, toute matrice $M$ de trace $\lambda$ convient.

On suppose maintenant que $a\neq 0$. S'il existe $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $aM+tr(M)A=B$, alors :

$$tr\big(aM+tr(M)A\big)=tr(B) \quad\Leftrightarrow\quad a\,tr(M)+tr(M)\times tr(A)=tr(B) \quad\Leftrightarrow\quad \big(a+tr(A)\big)tr(M)=tr(B).$$

Plusieurs cas se présentent alors.

- Si $a+tr(A)\neq 0$, alors $tr(M)=\dfrac{tr(B)}{a+tr(A)}$ et :

$$M=\frac{1}{a}\left(B-\frac{tr(B)}{a+tr(A)}A\right).$$

  On montre facilement que cette matrice vérifie bien la relation voulue.

- Si $a+tr(A)=0$ et $tr(B)=0$, alors $M=\dfrac{1}{a}\big(B-\lambda A\big)$ convient pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$.

  En effet, avec $a=-tr(A)$ et $tr(B)=0$, on a pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$ :

$$a\left[\frac{1}{a}\big(B-\lambda A\big)\right]+tr\left[\frac{1}{a}\big(tr(B)-\lambda tr(A)\big)\right]A=B-\lambda A+\frac{1}{a}\big(tr(B)-\lambda\,tr(A)\big)A=B-\lambda A+\lambda A=B.$$

- Si $a+tr(A)=0$ et $tr(B)\neq 0$, il n'y a alors pas de solution.

Finalement :

> Il existe $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $aM+tr(M)A=B$ quand :
> - $a=0$ et $B=\lambda A$ ($\lambda\in\mathbb{K}$) ;
> - ou $a\neq 0$ et $a+tr(A)\neq 0$ ;
> - ou $a\neq 0$, $a+tr(A)=0$ et $tr(B)=0$.

***Exercice 7***

Posons $f=\sum_{g\in G} g$.

Pour tout $g_0\in G$, soit l'application $\psi: G\to G\,;\, g\mapsto g_0 g$. Cette application est bien à images dans $G$ car $G$ est sable par composition et bijective de réciproque $g\mapsto g_0^{-1}g$ car $g_0$ est bijective et $g_0^{-1}\in G$.

On a donc $\psi(G)=\{g_0 g,\, g\in G\}=G$ et :

$$g_0 f=g_0\sum_{g\in G} g=\sum_{g\in G} g_0 g=\sum_{g\in\psi(G)} g=\sum_{g\in G} g=f.$$

On a donc pour tout $g\in G$, $gf=f$, donc :

$$\sum_{g\in G} gf=\sum_{g\in G} f \quad\Leftrightarrow\quad \left(\sum_{g\in G} g\right)f=rf \quad\Leftrightarrow\quad f^2=rf.$$

Comme $G$ est non vide, on a $r \neq 0$ et si on pose $p = \frac{1}{r} f$ , $p$ est linéaire et :

$$p^2 = \frac{1}{r^2} f^2 = \frac{1}{r^2} rf = \frac{1}{r} f = p .$$

Donc, $p$ est un projecteur de $E$ et on a :

$$rg(p) = tr(p) = \frac{1}{r} tr(f) = \frac{1}{r} tr\left( \sum_{g \in G} g \right) = \frac{1}{r} \sum_{g \in G} tr(g) .$$

1) Si $\sum_{g \in G} tr(g) = 0$ , on a immédiatement $rg(p) = 0$, ce qui implique que $p = 0$ et donc que :

$$\boxed{f = \sum_{g \in G} g = 0}$$

2) Remarquons déjà que pour tout $x \in F$ , on a $g(x) = x$ pour tout $g \in G$, donc :

$$p(x) = \frac{1}{r} f(x) = \frac{1}{r} \sum_{g \in G} g(x) = \frac{1}{r} \sum_{g \in G} x = \frac{1}{r} r x = x .$$

Ainsi, $p(x) = x$, donc $x \in \operatorname{Im} p$ . Ceci prouve que :

$$\underline{F \subset \operatorname{Im} p .}$$

Soit maintenant $x \in \operatorname{Im} p$ . On a $p(x) = x$, soit $x = \frac{1}{r} f(x)$ .

Soit $g \in G$. On a vu plus haut que $gf = f$ , donc :

$$g(x) = \frac{1}{r} gf(x) = \frac{1}{r} f(x) = p(x) = x .$$

Ainsi, $g(x) = x$ pour tout $g \in G$, donc $x \in F$ . Ceci prouve que :

$$\underline{\operatorname{Im} p \subset F .}$$

Finalement, on a $F = \operatorname{Im} p$ et donc :

$$\boxed{F \text{ est bien un sous-espace de } E \text{ de dimension } rg(p) = \frac{1}{r} \sum_{g \in G} tr(g) .}$$

***Exercice 8***

1) a. Pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$, on a $\ker g \subset \ker f \circ g$ et $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g$ .

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$ , si on prend $g = f^k$ , on a $\ker f^k \subset \ker f \circ f^k$ et $\operatorname{Im} f^k \circ f \subset \operatorname{Im} f^k$ , soit :

$$\ker f^k \subset \ker f^{k+1} \text{ et } \operatorname{Im} f^{k+1} \subset \operatorname{Im} f^k .$$

Ainsi :

$$\boxed{\left(\ker f^k\right)_{k \in \mathbb{N}} \text{ et } \left(\operatorname{Im} f^k\right)_{k \in \mathbb{N}} \text{ sont respectivement croissante et décroissante pour l'inclusion.}}$$

b. Supposons que pour $p\in\mathbb{N}$, on a $\operatorname{Im} f^{p}=\operatorname{Im} f^{p+1}$.

Montrons alors par récurrence sur *k* que pour tout entier $k\geq p$, $\operatorname{Im} f^{k}=\operatorname{Im} f^{p}$.

Pour $k=p$, c'est immédiat.

Supposons la propriété vraie à un rang $k\geq p$. On a alors :

$$\operatorname{Im} f^{k+1}=f^{k+1}(E)=f\left(f^{k}(E)\right)=f\left(\operatorname{Im} f^{k}\right)\underset{HR}{=}f\left(\operatorname{Im} f^{p}\right)=f\left(f^{p}(E)\right)=f^{p+1}(E)=\operatorname{Im} f^{p+1}=\operatorname{Im} f^{p}.$$

Donc, la propriété est vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout entier $k\geq p$, soit :

$$\boxed{\text{Si } \operatorname{Im} f^{p}=\operatorname{Im} f^{p+1}\text{, alors } \operatorname{Im} f^{k}=\operatorname{Im} f^{p} \text{ pour tout entier } k\geq p.}$$

c. Supposons que pour $p\in\mathbb{N}$, on a $\ker f^{p}=\ker f^{p+1}$.

Soit un entier $k\geq p$.

On a toujours $\underline{\ker f^{k}\subset\ker f^{k+1}}$ (car la suite $\left(\ker f^{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion) et si $x\in\ker f^{k+1}$ :

$$f^{k+1}(x)=f^{k-p+p+1}(x)=f^{p+1}\left(f^{k-p}(x)\right)=0.$$

Donc, $f^{k-p}(x)\in\ker f^{p+1}=\ker f^{p}$, d'où :

$$f^{p}\left(f^{k-p}(x)\right)=f^{k}(x)=0.$$

Donc, $x\in\ker f^{k}$ et ainsi, $\underline{\ker f^{k+1}\subset\ker f^{k}}$.

Ainsi, $\ker f^{k+1}=\ker f^{k}$ pour tout entier $k\geq p$, donc la suite $\left(\ker f^{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est constante pour l'inclusion à partir du rang *p*, soit :

$$\boxed{\text{Si } \ker f^{p}=\ker f^{p+1}\text{, alors } \ker f^{k}=\ker f^{p} \text{ pour tout entier } k\geq p.}$$

d. On veut prouver que $f(N)\subset N$ et $f(I)\subset I$.

Soit $x\in N=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\ker f^{k}$. Il existe $a\in\mathbb{N}$ tel que $x\in\ker f^{a}$.

Or, $\ker f^{a}\subset\ker f^{a+1}$, donc $x\in\ker f^{a+1}$, soit $f^{a+1}(x)=f^{a}\left(f(x)\right)=0$, donc $f(x)\in\ker f^{a}\subset N$.

Ainsi, pour tout $x\in N$, $f(x)\in N$, soit :

$$\boxed{f(N)\subset N}$$

Soit $x\in I=\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\operatorname{Im} f^{k}$. On a $x\in\operatorname{Im} f^{k}$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

Alors, $f(x)\in f\left(\operatorname{Im} f^{k}\right)=\operatorname{Im} f^{k+1}$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, soit $f(x)\in\operatorname{Im} f^{k}$ pour tout $k\in\mathbb{N}^{*}$. Enfin, comme $f(x)\in\operatorname{Im} f^{0}=\operatorname{Im} id_{E}=E$, on a $f(x)\in\operatorname{Im} f^{k}$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, donc $f(x)\in I$.

Ainsi, pour tout $x\in I$, $f(x)\in I$, soit :

$$\boxed{f(I)\subset I}$$

2) a. La suite $\left(\operatorname{Im} f^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, donc pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\operatorname{Im} f^{k+1}\subset \operatorname{Im} f^k$.

Ceci implique que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $rg(f^k)\leq rg(f^{k+1})$. La suite $\left(rg(f^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc une suite d'entier décroissante : elle est stationnaire. Ceci veut dire qu'il existe un entier naturel $p$ tel que $rg(f^k)=rg(f^p)$ pour tout entier $k\geq p$ et si $p\neq 0$, $rg(f^p)<rg(f^{p-1})$.

Alors, si $p\neq 0$, on a $\operatorname{Im} f^p\neq \operatorname{Im} f^{p-1}$ et, comme pour tout entier $k\geq p$, $\operatorname{Im} f^k\subset \operatorname{Im} f^p$, l'égalité des rangs implique $\operatorname{Im} f^k=\operatorname{Im} f^p$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe } p\in\mathbb{N} \text{ tel que } \operatorname{Im} f^p\neq \operatorname{Im} f^{p-1} \text{ si } p\neq 0 \text{ et } \operatorname{Im} f^k=\operatorname{Im} f^p \text{ pour tout entier } k\geq p.}$$

b. Avec la croissance de $\left(\ker f^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ pour l'inclusion et le théorème du rang, on a pour tout entier $k\geq p$ :

$$rg(f^k)=rg(f^p)\ \Rightarrow\ n-rg(f^k)=n-rg(f^p)\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{r}\dim\left(\ker f^k\right)=\dim\left(\ker f^p\right)\\ \ker f^p\subset\ker f^k\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \ker f^k=\ker f^p.$$

Et si $p\neq 0$ :

$$rg(f^p)<rg(f^{p-1})\ \Rightarrow\ \dim\left(\ker f^p\right)=n-rg(f^p)>n-rg(f^{p-1})=\dim\left(\ker f^{p-1}\right)\ \Rightarrow\ \ker f^p\neq\ker f^{p-1}.$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\ker f^p\neq\ker f^{p-1} \text{ si } p\neq 0 \text{ et } \ker f^k=\ker f^p \text{ pour tout entier } k\geq p.}$$

c. Si $p=0$, alors $p\leq n$. On suppose que $p\geq 1$.

Supposons qu'il existe $k\in\llbracket 0,p-1\rrbracket$ tel que $\operatorname{Im} f^{k+1}=\operatorname{Im} f^k$.

Alors, d'après la question 1b, on a $\operatorname{Im} f^{K+1}=\operatorname{Im} f^K=\operatorname{Im} f^k$ pour tout entier $K\geq k$ et en particulier pour $K=p-1$, on obtient $\operatorname{Im} f^p=\operatorname{Im} f^{p-1}$, qui est contradictoire. Donc, pour tout $k\in\llbracket 0,p-1\rrbracket$, $\operatorname{Im} f^{k+1}\neq\operatorname{Im} f^k$.

Comme on a $\operatorname{Im} f^{k+1}\subset\operatorname{Im} f^k$, on en déduit que pour tout $k\in\llbracket 0,p-1\rrbracket$, $rg(f^{k+1})<rg(f^k)$.

De plus, $\operatorname{Im} f^0=\operatorname{Im} id_E=E$, donc $rg(f^0)=n$ et ainsi, on a :

$$0\leq rg(f^p)<rg(f^{p-1})<\ldots<rg(f^2)<rg(f)<n$$

Alors :

$$\left\{rg(f),rg(f^2),\ldots,rg(f^p)\right\}\subset\llbracket 0,n-1\rrbracket\quad\Rightarrow\quad\operatorname{Card}\left(\left\{rg(f),rg(f^2),\ldots,rg(f^p)\right\}\right)\leq\operatorname{Card}\left(\llbracket 0,n-1\rrbracket\right)=n.$$

Enfin, comme les $rg(f^k)$ sont distincts deux à deux quand $k\in\llbracket 1,n\rrbracket$, on a :

$$\operatorname{Card}\left(\left\{rg(f),rg(f^2),\ldots,rg(f^p)\right\}\right)=p.$$

Et ainsi :

$$\boxed{p\leq n}$$

d. On a :

- $\ker f^k = \ker f^p$ et $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^p$ pour tout entier $k \geq p$, donc :

$$\bigcup_{k\geq p} \ker f^k = \ker f^p \quad \text{et} \quad \bigcap_{k\geq p} \operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^p.$$

- $\ker f^k \subset \ker f^p$ et $\operatorname{Im} f^p \subset \operatorname{Im} f^k$ pour tout entier $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$ donc :

$$\bigcup_{0\leq k\leq p} \ker f^k = \ker f^p \quad \text{et} \quad \bigcap_{0\leq k\leq p} \operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^p.$$

Alors, on a bien :

$$\boxed{N = \ker f^p \text{ et } I = \operatorname{Im} f^p.}$$

Soit $x \in \ker f^p \cap \operatorname{Im} f^p$. On a $f^p(x) = 0$ et il existe $z \in E$ tel que $x = f^p(z)$, alors :

$$f^p(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f^p\left(f^p(z)\right) = f^{2p}(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad z \in \ker f^{2p} = \ker f^p \quad \Rightarrow \quad f^p(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Ainsi :

$$\ker f^p \cap \operatorname{Im} f^p = \{0\}.$$

On a donc $\ker f^p + \operatorname{Im} f^p = \ker f^p \oplus \operatorname{Im} f^p \subset E$ et d'après le théorème du rang :

$$\dim\left(\ker f^p \oplus \operatorname{Im} f^p\right) = \dim\left(\ker f^p\right) + \dim\left(\operatorname{Im} f^p\right) = n = \dim E.$$

Donc :

$$\boxed{E = \ker f^p \oplus \operatorname{Im} f^p}$$

e. On a vu que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Im} f^{k+1} \subset \operatorname{Im} f^k$. Or, $\operatorname{Im} f^{k+1} = f\left(\operatorname{Im} f^k\right)$, donc $\operatorname{Im} f^k$ est stable par *f*.

Appelons $f_k$ l'endomorphisme induit par *f* sur $\operatorname{Im} f^k$. On a :

$$\operatorname{Im} f_k = f\left(\operatorname{Im} f^k\right) = \operatorname{Im} f^{k+1} \quad \text{et} \quad \ker f_k = \left\{x \in \operatorname{Im} f^k, f(x) = 0\right\} = \operatorname{Im} f^k \cap \ker f.$$

Le théorème du rang appliqué à $f_k$ donne alors :

$$\dim\left(\operatorname{Im} f_k\right) + \dim\left(\ker f_k\right) = \dim\left(\operatorname{Im} f^k\right) \quad \Leftrightarrow \quad rg(f^k) - rg(f^{k+1}) = \dim\left(\operatorname{Im} f^k \cap \ker f\right).$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Im} f^{k+1} \subset \operatorname{Im} f^k$, donc $\operatorname{Im} f^{k+1} \cap \ker f \subset \operatorname{Im} f^k \cap \ker f$ et :

$$\dim\left(\operatorname{Im} f^{k+1} \cap \ker f\right) \leq \dim\left(\operatorname{Im} f^k \cap \ker f\right).$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{\text{La suite } \left(rg(f^k) - rg(f^{k+1})\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

Par ailleurs, on a vu que $0 \leq rg(f^p) < rg(f^{p-1}) < \ldots < rg(f^2) < rg(f) < n$.

Ceci entraine que pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $rg(f^k) - rg(f^{k+1}) > 0$, et comme $rg(f^k) - rg(f^{k+1})$ est entier, on obtient $rg(f^k) - rg(f^{k+1}) \geq 1$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } \left(rg(f^k)-rg(f^{k+1})\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est minorée par 1 jusqu'au rang } p-1.}$$

On a alors pour tout $k\in \llbracket 0,p-1\rrbracket$ et pour tout $i\in \llbracket 0,k\rrbracket$ :

$$1\leq rg(f^i)-rg(f^{i+1})\leq rg(f^0)-rg(f^1)=rg(id_E)-rg(f)=n-rg(f).$$

Et en sommant de $i=1$ à $i=k$, on obtient pour tout $k\in \llbracket 1,p-1\rrbracket$ (quand $p\geq 2$) :

$$\sum_{i=1}^{k}1\leq \sum_{i=1}^{k}\left[rg(f^i)-rg(f^{i+1})\right]\leq \sum_{i=1}^{k}\left[n-rg(f)\right].$$

Soit par télescopage, pour tout $k\in \llbracket 1,p-1\rrbracket$ (quand $p\geq 2$) :

$$\boxed{k\leq rg(f)-rg(f^{k+1})\leq k\left[n-rg(f)\right]}$$

3) a. Comme $\alpha$, l'indice de nilpotence de *f*, est le plus petit entier naturel non nul $\alpha$ tel que $f^\alpha=0$, on a $f^{\alpha-1}\neq 0$ et $\mathrm{Im}\, f^{\alpha-1}\neq\{0\}=\mathrm{Im}\, f^\alpha$.

De plus, pour tout entier $k\geq\alpha$, $f^k=f^{k-\alpha}f^\alpha=0$.

Ainsi, on a $\mathrm{Im}\, f^\alpha\neq \mathrm{Im}\, f^{\alpha-1}$ et pour tout entier $k\geq\alpha$, $\mathrm{Im}\, f^k=\mathrm{Im}\, f^\alpha=\{0\}$. D'après la question 2, $\alpha=p$, autrement dit :

$$\boxed{\text{L'indice de nilpotence de } f \text{ est } p.}$$

b. On a vu que $\alpha=p\leq n$. Or, pour tout entier $k\geq\alpha$, $f^k=0$. En particulier pour $k=n$ :

$$\boxed{f^n=0}$$

c. Comme $\mathrm{Im}\, f^{p-1}\neq \mathrm{Im}\, f^p=\{0\}$, $\mathrm{Im}\, f^{p-1}$ contient un vecteur non nul, autrement dit :

$$\boxed{\text{Il existe un vecteur } x\in E \text{ tel que } f^{p-1}(x)\neq 0.}$$

Soit $(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_{p-1})\in\mathbb{K}^p$ tel que :

$$\lambda_0 x+\lambda_1 f(x)+\dots+\lambda_{p-1}f^{p-1}(x)=0 \quad \textbf{(1)}.$$

Rappelons que pour tout entier $k\geq p\geq 1$, $f^k(x)=0$.

Supposons qu'il existe un ou plusieurs $\lambda_i$ non nul(s). Notons $\lambda_m$ celui de plus petit indice avec $m\in\llbracket 0,p-1\rrbracket$.

On a donc $\lambda_m\neq 0$ et $\lambda_k=0$ pour tout entier $k\in\llbracket 0,m-1\rrbracket$ (s'il y a lieu), et **(1)** se récrit :

$$\lambda_m f^m(x)+\lambda_{m+1}f^{m+1}(x)+\dots+\lambda_{p-1}f^{p-1}(x)=0.$$

En appliquant $f^{p-1-m}$, on obtient, avec $f^p(x)=\dots=f^{2(p-1)-m}(x)=0$ :

$$\lambda_m f^{p-1}(x)+\lambda_{m+1}f^p(x)+\dots+\lambda_{p-1}f^{2(p-1)-m}(x)=0 \iff \lambda_m f^{p-1}(x)=0.$$

Or, $f^{p-1}(x) \neq 0$, donc $\lambda_m f^{p-1}(x) = 0$ implique $\lambda_m = 0$, ce qui est absurde.

Ainsi, tous les $\lambda_i$ sont nuls et donc :

$$\boxed{\text{La famille } \left(x,\ f(x),\ f^2(x), \dots,\ f^{p-1}(x)\right) \text{ est libre.}}$$

d. Posons $e_k = f^{n-k}(x)$ pour tout $k \in \llbracket 1,n \rrbracket$. On a alors :

$$\mathcal{B} = \left(e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n\right) = \left(f^{n-1}(x),\ f^{n-2}(x), \dots,\ f(x),\ x\right).$$

D'après la question précédente, si $p = n$, cette famille est libre et comme elle contient *n* vecteurs d'un espace de dimension *n*, c'est une base.

Enfin, on a $f(e_1) = f\left(f^{n-1}(x)\right) = f^n(x) = 0$ et pour tout $k \in \llbracket 2,n \rrbracket$, $f(e_k) = f\left(f^{n-k}(x)\right) = f^{n-k+1}(x) = e_{k-1}$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{La matrice de f dans la base } \mathcal{B} \text{ est } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

4) Notons $f_N$ (*resp.* $f_I$) l'endomorphisme induit par *f* sur *N* (*resp.* sur *I*).

On a vu dans la question 2.d que $N = \ker f^p$.

Alors, pour tout $x \in N = \ker f^p$, on a $f_N{}^p(x) = f^p(x) = 0$, donc $f_N{}^p = 0$ et ainsi :

$$\boxed{f_N \text{ est nilpotent.}}$$

On a vu aussi dans la question 2.d que $I = \operatorname{Im} f^p$. Alors :

$$f_I(I) = f(I) = f\left(\operatorname{Im} f^p\right) = \operatorname{Im} f^{p+1} = \operatorname{Im} f^p = I.$$

Ainsi, $f_I(I) = I$, donc l'endomorphisme $f_I$ est surjectif et, comme on est en dimension finie, il est bijectif, soit :

$$\boxed{f_I \in GL(I)}$$

5) Supposons qu'il existe $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors :

$$A^4 = (A^2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^6 = A^4 A^2 = 0_3.$$

Donc, *A* est nilpotente. Alors, d'après la question 3.b, on a $A^3 = 0_3$.

Mais alors $A^4 = A^3 A = 0_3 A = 0_3$, ce qui est absurde, donc :

$$\boxed{\text{Il n'existe pas de matrice } A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}) \text{ telle que } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

## *Exercice 9*

1) Notons $A = (a_{i,j})$, $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice $A$ et $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Rappelons que toute matrice semblable à $A$ est la matrice de $u$ dans une certaine base de $\mathbb{R}^n$. On cherche donc une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle le premier coefficient diagonal de la matrice de $u$ est nul.

Considérons deux cas.

- Il existe un $k \in 1,n$ tel que $a_{k,k} = 0$.

  La matrice de $u$ dans la base $\mathcal{B}_1 = (e_k, e_2, \ldots, e_{k-1}, e_1, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ convient.

- Tous les coefficients diagonaux de $A$ sont non nuls.
  - S'il existe $k \in 2,n$ tel que $a_{1,k} \neq 0$, alors en posant $\varepsilon_1 = a_{1,k}e_1 - a_{1,1}e_k$, la famille $\mathcal{B}_2 = (\varepsilon_1, e_2, \ldots, e_n)$ est encore une base de $\mathbb{R}^n$ et :

    $$\begin{aligned} u(\varepsilon_1) &= a_{1,k}u(e_1) - a_{1,1}u(e_k) \\ &= a_{1,k}\left[a_{1,1}e_1 + a_{2,1}e_2 + \ldots + a_{n,1}e_n\right] - a_{1,1}\left[a_{1,k}e_1 + a_{2,k}e_2 + \ldots + a_{n,k}e_n\right] \\ &= (a_{1,k}a_{2,1} - a_{1,1}a_{2,k})e_2 + \ldots + (a_{1,k}a_{n,1} - a_{1,1n,k})e_n \end{aligned}$$

    Donc, $u(\varepsilon_1) \in \mathrm{Vect}(e_2, \ldots, e_n)$, donc la matrice de $u$ dans la base $\mathcal{B}_2$ convient.

  - S'il existe $k, k' \in 1,n$ tels que $k \neq k'$ et $a_{k,k'} = 0$, alors en se plaçant dans la base $\mathcal{B}_1$ définie plus haut, on se ramène au cas précédent.

  - Si pour tous $k, k' \in 1,n$ tels que $k \neq k'$, alors $A$ est diagonale.

    On pose alors $\mathcal{B}_3 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ avec :

    $$\varepsilon_1 = e_1 + e_2 + \ldots + e_n \text{ et pour tout } k \in 2,n\ ,\ \varepsilon_k = e_k - e_1.$$

    On a :

    $$\begin{aligned} \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_3) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) &= \mathrm{Vect}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \ldots - \varepsilon_n, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \\ &= \mathrm{Vect}(ne_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) = \mathrm{Vect}(e_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \\ &= \mathrm{Vect}(e_1, \varepsilon_2 + e_1, \ldots, \varepsilon_n + e_1) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_n) = \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

    Ainsi, $\mathcal{B}_3$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$ et contient $n = \dim \mathbb{R}^n$ vecteurs, donc c'est une base de $\mathbb{R}^n$.

    De plus, comme $A = diag(a_{1,1}, \ldots, a_{n,n})$ et $Tr(A) = a_{1,1} + a_{2,2} + \ldots + a_{n,n} = 0$ :

    $$u(\varepsilon_1) = \sum_{k=1}^{n} u(e_k) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}e_k = a_{1,1}e_1 + \sum_{k=2}^{n} a_{k,k}e_k = \left(-\sum_{k=2}^{n} a_{k,k}\right)e_1 + \sum_{k=2}^{n} a_{k,k}e_k = \sum_{k=2}^{n} a_{k,k}(e_k - e_1) = \sum_{k=2}^{n} a_{k,k}\varepsilon_k.$$

    Donc, la matrice de $u$ dans la base $\mathcal{B}_3$ convient.

Finalement, on trouve une base convenable dans tous les cas et ainsi :

$$\boxed{A \text{ est semblable à une matrice dont le premier coefficient diagonal est nul.}}$$

2) Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que la matrice $A$ est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

- Pour $n=1$, $A=(a)\in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $Tr(A)=a=0$, donc l'unique coefficient diagonal de $A$ est nul et la propriété est vraie au rang $n=1$.
- Supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $Tr(A)=0$.

  D'après la question précédente, $A$ est semblable à une matrice de la forme $A'=\begin{pmatrix} 0 & L \\ C & B \end{pmatrix}$ avec $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, $Tr(A)=0=Tr(A')=Tr(B)$.

  On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $B$ : il existe $B' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls et $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $B'=Q^{-1}BQ$.

  En posant alors $P=\begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & Q \end{pmatrix}$, on a $P\begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & Q^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & QQ^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & I_n \end{pmatrix}=I_{n+1}$, donc $P \in GL_{n+1}(\mathbb{R})$ avec $P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & Q^{-1} \end{pmatrix}$ et :

  $$P^{-1}A'P=\begin{pmatrix} 0 & LQ \\ Q^{-1}C & Q^{-1}BQ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & LQ \\ Q^{-1}C & B' \end{pmatrix}.$$

  Comme tous les coefficients diagonaux de $B'$ sont nuls, ceux de $P^{-1}A'P$ le sont aussi.

  Ainsi, $A'$, donc $A$, est semblable à une matrice dont le premier coefficient diagonal est nul et la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et ainsi, toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

On a alors $A=P^{-1}DP$ où tous les coefficients diagonaux de $D$ sont nuls.

On peut alors écrire $D=\begin{pmatrix} 0 & d_{1,2} & \cdots & d_{1,n} \\ d_{2,1} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & d_{n-1,n} \\ d_{n,1} & \cdots & d_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}=N_1+N_2$ avec :

$$N_1=\begin{pmatrix} 0 & d_{1,2} & \cdots & d_{1,n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & d_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ d_{2,1} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ d_{n,1} & \cdots & d_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices $N_1$ et $N_2$ étant triangulaires strictes, elles sont nilpotentes. Il en va de même pour $P^{-1}N_1P$ et $P^{-1}N_2P$, et :

$$A=P^{-1}DP=P^{-1}(N_1+N_2)P=P^{-1}N_1P+P^{-1}N_2P.$$

Ainsi :

$$\boxed{A \text{ peut se décomposer en une somme de deux matrices nilpotentes.}}$$

3) On a $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on veut :

$$A \text{ et } -A \text{ semblables} \Leftrightarrow Tr(A)=0.$$

($\Rightarrow$) Si $A$ et $-A$ sont semblables, alors elles ont même trace, donc :

$$Tr(A)=Tr(-A)=-Tr(A).$$

Ceci donne immédiatement :

$$\underline{Tr(A)=0}.$$

($\Leftarrow$) On suppose que $Tr(A)=0$.

D'après la question précédente, $A$ est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix}0&\lambda\\\mu&0\end{pmatrix}$ et $A$ et $-A$ sont semblables si et seulement si $\begin{pmatrix}0&\lambda\\\mu&0\end{pmatrix}$ et $-\begin{pmatrix}0&\lambda\\\mu&0\end{pmatrix}$ le sont.

On cherche donc $P=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}\begin{pmatrix}0&\lambda\\\mu&0\end{pmatrix}P=-\begin{pmatrix}0&\lambda\\\mu&0\end{pmatrix}$, soit :

$$\begin{pmatrix}0&\lambda\\\mu&0\end{pmatrix}P=-P\begin{pmatrix}0&\lambda\\\mu&0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0&\lambda\\\mu&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\lambda\\\mu&0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda c=-\mu b\\\lambda d=-\lambda a\\\mu a=-\mu d\\\mu b=-\lambda c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda c=-\mu b\\\lambda(a+d)=0\\\mu(a+d)=0\end{cases}$$

Si on prend $d=-a$, $b=\lambda$ et $c=-\mu$, soit $P=\begin{pmatrix}a&\lambda\\-\mu&-a\end{pmatrix}$, le système ci-dessus est vérifié.

De plus, on alors $\det P=-a^2+\lambda\mu$ et pour avoir $P\in GL_2(\mathbb{R})$, il suffit de prendre $a^2\neq\lambda\mu$.

Ainsi, on a trouvé $P\in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}\begin{pmatrix}0&\lambda\\\mu&0\end{pmatrix}P=-\begin{pmatrix}0&\lambda\\\mu&0\end{pmatrix}$ et donc :

$$\underline{A \text{ et } -A \text{ sont semblables}}.$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{A \text{ et } -A \text{ sont semblables si et seulement si } Tr(A)=0.}$$

***Exercice 10***

On notera $(E_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Rappelons que pour tous $i,j,k,\ell\in [\![1,n]\!]$, on a $E_{i,k}E_{\ell,j}=\delta_{k,\ell}E_{i,j}$ où $\delta_{k,\ell}$ est le symbole de Kronecker.

1) Soit $\varphi\in\mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\mathbb{R}\big)$. Pour toute $M=(x_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $M=\sum_{1\le i,j\le n}x_{i,j}E_{i,j}$, et comme $\varphi$ est linéaire :

$$\varphi(M)=\sum_{1\le i,j\le n}x_{i,j}\varphi(E_{i,j})=\sum_{1\le i,j\le n}x_{i,j}\varphi(E_{i,j})=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(E_{i,j})x_{i,j}.$$

Or, pour toute $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $Tr(AM)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{j,i}x_{i,j}$ donc, en posant $a_{i,j}=\varphi(E_{j,i})$ pour tous $i,j\in\ 1,n$ , on a $\varphi(M)=Tr(AM)$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe une unique } A=\left(\varphi(E_{j,i})\right)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que pour toute } M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(M)=Tr(AM).}$$

2) Soit $\varphi$ une éventuelle forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour toutes $M,N\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(MN)=\varphi(NM)$.

D'après la question précédente, il existe une unique $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour toute $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\varphi(M)=Tr(AM)$. Alors, pour tous $i,j,k,\ell\in\ 1,n$ , on a $\varphi(E_{i,k}E_{\ell,j})=\varphi(E_{\ell,j}E_{i,k})$ et :

$$AE_{i,k}E_{\ell,j}=\delta_{k,\ell}AE_{i,j}=\delta_{k,\ell}\begin{pmatrix}0_{n,j-1} & C_i & 0_{n,n-j}\end{pmatrix}$$

où $C_i$ est la $i^{\text{ième}}$ colonne de $A$. Alors :

$$\varphi(E_{i,k}E_{\ell,j})=Tr(AE_{i,k}E_{\ell,j})=\delta_{k,\ell}Tr\begin{pmatrix}0_{n,j-1} & C_i & 0_{n,n-j}\end{pmatrix}=\delta_{k,\ell}a_{j,i}.$$

De même, $\varphi(E_{\ell,j}E_{i,k})=\delta_{i,j}a_{k,\ell}$, donc :

$$\varphi(E_{i,k}E_{\ell,j})=\varphi(E_{\ell,j}E_{i,k}) \quad\Leftrightarrow\quad \delta_{k,\ell}a_{j,i}=\delta_{i,j}a_{k,\ell}.$$

Ceci est vrai pour tous $i,j,k,\ell\in\ 1,n$ , donc :

- pour tous $i,j\in\ 1,n$ tels que $i\neq j$, $a_{j,i}=\delta_{1,1}a_{j,i}=\delta_{i,j}a_{1,1}=0$ ;
- pour tous $i,k\in\ 1,n$ , $a_{i,i}=\delta_{k,k}a_{i,i}=\delta_{i,i}a_{k,k}=a_{k,k}$.

Ceci implique que $A$ est une matrice scalaire : $A=\lambda I_n$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.

Ainsi, si $\varphi\in\mathcal{L}\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\mathbb{R}\right)$ vérifie $\varphi(MN)=\varphi(NM)$ pour toutes $M,N\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\varphi: M\mapsto Tr(\lambda M)=\lambda Tr(M)$, soit $\varphi=\lambda Tr$.

Réciproquement, si $\varphi=\lambda Tr$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$, alors $\varphi$ vérifie bien la propriété voulue (c'est du cours : $Tr(MN)=Tr(NM)$ pour toutes matrices $M,N\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Finalement :

$$\boxed{\text{Les formes linéaires recherchées sont les } \lambda Tr \text{ avec } \lambda\in\mathbb{R}.}$$

## ***Exercice 11*** (*Mines-Ponts*)

1) On $u\in\mathcal{L}(E)$ et $u^3=id_E$, soit :

$$P(u)=(u-id_E)(u^2+u+id_E)=(u^2+u+id_E)(u-id_E)=0.$$

avec $P=X^3-1=(X-1)(X^2+X+1)$.

Ceci implique immédiatement que :

$$\mathrm{Im}(u^2+u+id_E)\subset\ker(u-id_E) \text{ et } \mathrm{Im}(u-id_E)\subset\ker(u^2+u+id_E).$$

De plus, si $x \in \ker(u - id_E) \cap \ker(u^2 + u + id_E)$, on a $u(x) = x$ (donc $u^2(x) = u(x) = x$) et $u^2(x) + u(x) + x = 0$, d'où :

$$x = \frac{1}{3}\left(u^2(x) + u(x) + x\right) = 0 .$$

Ainsi :

$$\ker(u - id_E) \cap \ker(u^2 + u + id_E) = \{0\} .$$

Alors, avec $\mathrm{Im}(u - id_E) \subset \ker(u^2 + u + id_E)$, on obtient immédiatement :

$$\ker(u - id_E) \cap \mathrm{Im}(u - id_E) = \{0\}$$

Et avec le théorème du rang :

$$\dim\left[\ker(u - id_E) \oplus \mathrm{Im}(u - id_E)\right] = \dim\ker(u - id_E) + rg(u - id_E) = \dim E .$$

Ainsi :

$$\underline{\ker(u - id_E) \oplus \mathrm{Im}(u - id_E) = E .}$$

Enfin, $\mathrm{Im}(u - id_E) \subset \ker(u^2 + u + id_E)$ donne :

$$E = \ker(u - id_E) \oplus \mathrm{Im}(u - id_E) \subset \ker(u - id_E) \oplus \ker(u^2 + u + id_E) \subset E .$$

Donc :

$$\ker(u - id_E) \oplus \ker(u^2 + u + id_E) = E .$$

On en déduite alors que :

$$\dim\ker(u^2 + u + id_E) = \dim E - \ker(u - id_E) = rg(u - id_E) .$$

Donc $\mathrm{Im}(u - id_E) \subset \ker(u^2 + u + id_E)$ devient :

$$\underline{\mathrm{Im}(u - id_E) = \ker(u^2 + u + id_E) .}$$

On montre de même que :

$$\underline{\ker(u - id_E) = \mathrm{Im}(u^2 + u + id_E) .}$$

*C'est un exemple du théorème de décomposition des noyaux (vu dans le cours, mais hors programme).*

Par ailleurs, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\ker P(u)$ et $\mathrm{Im}\, P(u)$ sont sables par *u*.

2) Ici $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

On a alors $P = (X-1)(X-j)(X-\overline{j})$ avec $j = e^{2i\pi/3}$ et le polynôme *P* est scindé à racines simples, donc *u* est diagonalisable et $Sp(u) \subset \{1, j, \overline{j}\}$.

Les sous-espaces $\ker(u - id_E)$, $\ker(u - j\, id_E)$ et $\ker(u - \overline{j}\, id_E)$ sont supplémentaires et stables par *u*.

Comme, pour tout $a \in \{1, j, \overline{j}\}$, l'endomorphisme induit par *u* sur $\ker(u - a\, id_E)$ est une homothétie, tout sous-espace de $\ker(u - a\, id_E)$ est stable par *u*.

De plus, pour tous $a, b \in \{1, j, \overline{j}\}$, $\ker(u - a\, id_E) \oplus \ker(u - b\, id_E)$ est aussi stable par *u* et il en va de même pour les sommes directes de sous-espaces de $\ker(u - id_E)$, $\ker(u - j\, id_E)$ et/ou $\ker(u - \overline{j}\, id_E)$.

Réciproquement, soit un sous-espace $F$ stable par $u$ et notons $\tilde{u}$ l'endomorphisme de $F$ induit par $u$. On a $\tilde{u}^3 = id_F$ et donc comme plus haut :

$$\ker(\tilde{u} - id_F) \oplus \ker(\tilde{u} - j\, id_F) \oplus \ker(\tilde{u} - \overline{j}\, id_F) = F .$$

Or, pour tout $a \in \{1, j, \overline{j}\}$ :

$$\ker(\tilde{u} - a\, id_F) = \ker(u - a\, id_E) \cap F .$$

Donc, $\ker(\tilde{u} - a\, id_F)$ est un sous-espace de $\ker(u - a\, id_E)$.

Ainsi, $F$ est une somme directe de sous-espaces de $\ker(u - id_E)$, $\ker(u - j\, id_E)$ et/ou $\ker(u - \overline{j}\, id_E)$.

Finalement :

> Les sous-espaces stables par $u$ sont les sous-espaces de la forme $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$ où $F_1, F_2, F_3$ sont des sous-espaces de $\ker(u - id_E)$, $\ker(u - j\, id_E)$ et $\ker(u - \overline{j}\, id_E)$ respectivement.

3) Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a $\ker(u - id_E) \oplus \operatorname{Im}(u^2 + u + id_E) = E$.

Les sous-espaces $\ker(u - id_E)$ et $\ker(u^2 + u + id_E)$ sont stables par $u$.

Comme dans question précédente, tout sous-espace de $\ker(u - id_E)$ est lui aussi stable par $u$, ainsi que tout sous-espace de $E$ de la forme $F_1 \oplus F_2$ où $F_1$ est un sous-espace de $\ker(u - id_E)$ et $F_2$ est un sous-espace de $\ker(u^2 + u + id_E)$ stable par $u$.

Réciproquement, on montre comme plus haut que tout sous-espace de $E$ stable par $u$ est de la forme ci-dessus.

Reste à déterminer les sous-espaces de $F = \ker(u^2 + u + id_E)$ stables par $u$, autrement dit les sous-espaces de $F$ stables par $v$, l'endomorphisme induit par $u$ sur $F$.

On a $v^2 + v + id_F = 0$.

Pour tout $x \in F$ non nul, la famille $(x, v(x))$ est libre car les seules valeurs propres possibles de $v$ sont complexes ($j$ et $\overline{j}$). De plus, $v(x) \in \operatorname{Vect}(x, v(x))$ (!) et $v(v(x)) = v^2(x) = -v(x) - x \in \operatorname{Vect}(x, v(x))$, donc $\operatorname{Vect}(x, v(x))$ est un plan de $F$ stable par $v$.

Tout sous-espace de $F$ stable par $v$ sera alors de la forme $G = \operatorname{Vect}(x_1, v(x_1), \ldots, x_p, v(x_p))$ avec $\dim G = 2p$.

En effet, tout sous-espace de cette forme est bien stable par $v$. Réciproquement, soit $G$ un sous-espace de $F$ stable par $v$.

- L'endomorphisme $w$ induit par $v$ sur $G$ vérifie $w^2 + w + id_G = 0$, donc $P = X^2 + X + 1 = (X - j)(X - \overline{j})$ est annulateur de $w$ et $Sp_{\mathbb{C}}(w) \subset \{j, \overline{j}\}$, donc si $p$ et $p'$ sont les multiplicités respectives de $j$ et $\overline{j}$ dans le polynôme caractéristique de $w$, on a :

$$Tr(w) = pj + p'\overline{j} = -\frac{1}{2}(p + p') + i\frac{\sqrt{3}}{2}(p - p') \in \mathbb{R}$$

  donc $p = p'$ et $\dim G = p + p' = 2p$.

- Alors si $p = 1$, il existe $x_1 \in G \setminus \{0\}$ tel que $G = \operatorname{Vect}(x_1, v(x_1))$.

  Si $p > 1$, il existe $x_2 \in G$ tel que $(x_1, v(x_1), x_2)$ est libre. Si $(x_1, v(x_1), x_2, v(x_2))$ est liée, alors il existe trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que :

$$v(x_2) = ax_1 + bv(x_1) + cx_2 .$$

Donc :

$$\begin{aligned} & v^2(x_2) = av(x_1) + bv^2(x_1) + cv(x_2) \\ \Leftrightarrow \quad & -x_2 - v(x_2) = av(x_1) - bx_1 - bv(x_1) + cv(x_2) \\ \Leftrightarrow \quad & (c+1)v(x_2) = bx_1 + (b-a)v(x_1) - x_2 \end{aligned}$$

Donc :

$$a(c+1)x_1 + b(c+1)v(x_1) + c(c+1)x_2 = bx_1 + (b-a)v(x_1) - x_2 \,.$$

Ceci donne entre autres $c^2 + c + 1 = 0$ qui n'a pas de solution réelle. Donc, supposer la famille $\left(x_1, v(x_1), x_2, v(x_2)\right)$ liée mène à une absurdité, donc elle est libre.

Si $p > 2$, on considère $x_3 \in G$ tel que $\left(x_1, v(x_1), x_2, v(x_2), x_3\right)$ est libre et on montre comme ci-dessus que $\left(x_1, v(x_1), x_2, v(x_2), x_3, v(x_3)\right)$ est libre aussi.

En continuant ainsi, on aboutit à une famille libre $\left(x_1, v(x_1), x_2, v(x_2), \ldots, x_p, v(x_p)\right)$ qui contient $2p = \dim G$ vecteurs, donc à une base de $G$ et ainsi, $G = \mathrm{Vect}\left(x_1, v(x_1), \ldots, x_p, v(x_p)\right)$.

Finalement :

> Les sous-espaces de $E$ stables par $u$ sont les sous-espaces de $E$ de la forme $F_1 \oplus F_2$ où $F_1$ est un sous-espace de $\ker(u - id_E)$ et $F_2$ est un sous-espace de $\ker(u^2 + u + id_E)$ de la forme $F_2 = \mathrm{Vect}\left(x_1, v(x_1), \ldots, x_p, v(x_p)\right)$ avec $\dim F_2 = 2p$.