Corrigés des TD du chapitre 5

Exercice 1

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\left|a_n z^n\right| = \left|\frac{i^n n^2}{(n^2+1)2^n} z^n\right| = \frac{n^2}{n^2+1}\left(\frac{|z|}{2}\right)^n .$$

La suite $\left(\left|a_n z^n\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|z| \leq 2$, donc $R = 2$ et pour $|z| = 2$, $\left|a_n z^n\right| \to 1$, donc $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement. Ainsi :

$$\boxed{R = 2 \text{ et } \sum a_n z^n \text{ diverge sur le bord du disque de convergence.}}$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\left|a_n z^n\right| = \left|\frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{sh}^2 n} z^n\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\left(\frac{|z|}{e}\right)^n .$$

Comme ci-dessus :

$$\boxed{R = e \text{ et } \sum a_n z^n \text{ diverge sur le bord du disque de convergence.}}$$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\left|a_n z^n\right| \leq 9|z|^n .$$

Or, la suite $\left(9|z|^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée quand $|z| \leq 1$, donc $\left(\left|a_n z^n\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.

Remarquons que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de chiffres (entiers compris entre 0 et 9) qui ne converge pas vers 0, car sinon, elle serait stationnaire sur 0 et $\sqrt{2}$ serait décimal, ce qui est faux. Donc, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la série $\sum a_n (e^{i\theta})^n$ diverge grossièrement et ainsi :

$$\boxed{R = 1 \text{ et } \sum a_n z^n \text{ diverge sur le bord du disque de convergence.}}$$

Pour mémoire : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = E\left(10^n\sqrt{2}\right) - 10E\left(10^{n-1}\sqrt{2}\right)$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = \ln\left(\frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right) = \ln\left[\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-½}\right] = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Donc :

$$a_n = \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{3n\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{3n^{1,5}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{1,5}}\right).$$

Ainsi, $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et comme le rayon de convergence de $\sum \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ est 1, on a $R = 1$.

De plus, les séries $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ convergent (CSSA, la seconde est même absolument convergente), mais pas la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, donc $\sum a_n$ diverge.

De plus, avec ce qui précède, on a immédiatement $(-1)^n a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc $\sum (-1)^n a_n$ diverge.

Finalement :

$$\boxed{R=1 \text{ et } \sum a_n x^n \text{ diverge sur le bord de l'intervalle de convergence.}}$$

e. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction $x\mapsto x^3+nx-1$ est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$, donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et s'annule une unique fois en a_n. Comme elle vaut $-1<0$ en 0 et $n\geq 0$ en 1, on a de plus, $0<a_n\leq 1$. Enfin :

$$a_n{}^3+na_n-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad n=\frac{1-a_n{}^3}{a_n}=g(a_n).$$

La fonction $g: x\mapsto \frac{1-x^3}{x}=\frac{1}{x}-x^2$ est continue sur $]0;1]$ et strictement décroissante de $+\infty$ à 0, donc elle réalise une bijection de $]0;1]$ dans $\mathbb{R}_+$. On a alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=g^{-1}(n)$.

D'après le théorème de la bijection continue, g^{-1} est continue sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante de 1 à 0, donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, de limite nulle.

Comme $a_n{}^3+na_n-1=0$, on a $na_n=1-a_n{}^3\to 1$, donc $a_n\sim\frac{1}{n}$.

Ceci nous permet de conclure que :

- le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est $R=1$;
- la série $\sum a_n$ diverge.

Enfin, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la relation $a_n{}^3+na_n-1=0$ peut se récrire $a_n=\frac{1}{n}-\frac{a_n{}^3}{n}$ et comme $a_n\sim\frac{1}{n}$, on a $a_n{}^3\sim\frac{1}{n^3}$, soit $a_n{}^3=\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et ainsi :

$$a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Alors, comme la série alternée $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ converge et la série $\sum\frac{(-1)^n}{n^4}$ converge absolument :

- la série $\sum(-1)^n a_n$ converge.

Finalement :

$$\boxed{R=1 \text{ et } \sum a_n x^n \text{ diverge pour } x=1 \text{ et converge pour } x=-1.}$$

f. Pour tout entier $n\geq 2$ et tout $x\in\mathbb{R}^*$, on a :

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right|=\frac{\ln(n+1)}{\ln n}|x|=\left(1+\frac{1}{\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)|x|\to|x|.$$

Donc, d'après la règle de d'Alembert, $R=1$.

Les séries $\sum(-1)^n\ln n$ et $\sum\ln n$ divergent grossièrement, donc :

$$\boxed{R=1 \text{ et } \sum a_n x^n \text{ diverge sur le bord de l'intervalle de convergence.}}$$

De plus, pour tout $x\in\,]-1;1[$ et tout entier $N\geq 2$, on a :

$$(1-x)\sum_{n=1}^{N}a_n x^n=(1-x)\sum_{n=1}^{N}(\ln n)x^n=\sum_{n=1}^{N}(\ln n)x^n-\sum_{n=1}^{N}(\ln n)x^{n+1}=\sum_{n=2}^{N}(\ln n)x^n-\sum_{n=2}^{N+1}\big(\ln(n-1)\big)x^n$$
$$=\sum_{n=2}^{N}\big[\ln n-\ln(n-1)\big]x^n+(\ln N)x^{N+1}=-\sum_{n=2}^{N}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)x^n+(\ln N)x^{N+1}$$

Soit, pour tout $x\in\,]-1;1[$ et tout entier $N\geq 2$:

$$\sum_{n=1}^{N}a_n x^n=-\frac{1}{1-x}\sum_{n=2}^{N}\left[\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]x^n+\frac{(\ln N)x^{N+1}}{1-x}.$$

Comme $(\ln N)x^{N+1}\to 0$ quand $N\to+\infty$, on obtient, pour tout $x\in\,]-1;1[$:

$$f(x)=-\frac{1}{1-x}\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)x^n.$$

On a $\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc si $b_n=-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}$, on a $b_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2n^2}$.

Et, pour tout $x\in\,]-1;1[$:

$$f(x)=\frac{1}{1-x}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}+b_n\right)x^n.$$

On a vu dans le cours que pour tout $x\in\,]-1;1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n=-\ln(1-x)$, donc :

$$f(x)=\frac{1}{1-x}\left[\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n+\sum_{n=2}^{+\infty}b_n x^n\right]=\frac{1}{1-x}\left[-\ln(1-x)-x+\sum_{n=2}^{+\infty}b_n x^n\right].$$

Comme $b_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2n^2}$, la série $\sum b_n x^n$ converge normalement sur $[-1;1]$ et donc $\lim\limits_{x\to 1^-}\sum_{n=2}^{+\infty}b_n x^n=\sum_{n=2}^{+\infty}b_n$ est finie.

Enfin, comme $\lim\limits_{x\to 1^-}\big[-\ln(1-x)\big]=+\infty$, on a $-\ln(1-x)-x+\sum_{n=2}^{+\infty}b_n x^n\underset{x\to 1^-}{\sim}-\ln(1-x)$, d'où :

$$\boxed{f(x)\underset{x\to 1^-}{\sim}-\frac{\ln(1-x)}{1-x}}$$

Exercice 2

1) a. On a $a_n \sim n^2$ donc :

$$\boxed{R=1}$$

Pour tout $x\in\,]-1;1[$:

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0}\frac{n^3+n+3}{n+1}x^n = \sum_{n\geq 0}\left(n^2-n+2+\frac{1}{n+1}\right)x^n = \sum_{n\geq 0} n^2x^n - \sum_{n\geq 0} nx^n + 2\sum_{n\geq 0} x^n + \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n+1}.$$

Et pour tout $x\in\,]-1;1[\setminus\{0\}$:

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} n^2x^n - \sum_{n\geq 0} nx^n + 2\sum_{n\geq 0} x^n + \frac{1}{x}\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}.$$

On a :

$$\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x},\quad \sum_{n\geq 0} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2},\quad \sum_{n\geq 0} n^2x^n = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}\quad \text{et}\quad \sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

On obtient, pour tout $x\in\,]-1;1[\setminus\{0\}$:

$$\boxed{\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3} - \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x}}$$

b. On a $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+2)^2}{(n+1)^3} \to 0$, on a :

$$\boxed{R=+\infty}$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)^2}{n!}x^n = \sum_{n\geq 0}\frac{n(n-1)+3n+1}{n!}x^n = \sum_{n\geq 2}\frac{x^n}{(n-2)!} + 3\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{(n-1)!} + \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!} = x^2\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!} + 3x\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!} + \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}.$$

Donc :

$$\boxed{\sum_{n\geq 0} a_n x^n = (x^2+3x+1)e^x}$$

c. On a $a_n \sim \dfrac{1}{n}$, donc :

$$\boxed{R=1}$$

Pour tout $x\in\,]-1;1[$:

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n-(-1)^n}x^n = \sum_{\substack{n\geq 0\\ n \text{ pair}}}\frac{1}{n-1}x^n + \sum_{\substack{n\geq 0\\ n \text{ impair}}}\frac{1}{n+1}x^n.$$

Alors, pour tout $x \in]-1;1[\backslash\{0\}$:

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = -1 + x \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{1}{n-1} x^{n-1} + \frac{1}{x} \sum_{\substack{n\geq 0 \\ n \text{ impair}}} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -1 + x \sum_{\substack{n\geq 0 \\ n \text{ impair}}} \frac{x^n}{n} + \frac{1}{x} \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{x^n}{n}$$

$$= -1 + x \sum_{\substack{n\geq 0 \\ n \text{ impair}}} \frac{x^n}{n} + x \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{x^n}{n} - x \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{x^n}{n} + \frac{1}{x} \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{x^n}{n} = -1 + x \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} + \left(\frac{1}{x} - x\right) \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{x^n}{n}.$$

$$= -1 + x \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} + \left(\frac{1}{x} - x\right) \sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n}}{2n} = -1 + x \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right) \sum_{n\geq 1} \frac{(x^2)^n}{n}$$

Et avec $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, on obtient, pour tout $x \in]-1;1[\backslash\{0\}$:

$$\boxed{\sum_{n\geq 0} a_n x^n = -1 - x\ln(1-x) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right)\ln(1-x^2)}$$

d. On a $\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| \to 2\frac{2n-1}{n+1}|x| = 4|x|$, on a :

$$\boxed{R = \frac{1}{4}}$$

Pour tout $x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$, on a :

$$(1+4x)f'(x) - 2f(x) = (1+4x)\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} - 2\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n + 2\sum_{n\geq 0}(2n-1)a_n x^n$$

$$= \sum_{n\geq 0}(n+1)\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\binom{2n+2}{n+1}x^n + 2\sum_{n\geq 0}(2n-1)\frac{(-1)^n}{2n-1}\binom{2n}{n}x^n$$

$$= \sum_{n\geq 0}\left[(n+1)\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\binom{2n}{n} + 2(2n-1)\frac{(-1)^n}{2n-1}\binom{2n}{n}\right]x^n$$

Donc, on a bien pour tout $x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$:

$$(1+4x)f'(x) - 2f(x) = 0.$$

Ainsi, f est solution sur $\left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$ de l'équation différentielle :

$$(E): y' - \frac{2}{1+4x}y = 0.$$

Les solutions de (E) sont de la forme $x \mapsto k\sqrt{1+4x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Avec $f(0) = a_0 = -1$, on obtient, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$:

$$\boxed{f(x) = -\sqrt{1+4x}}$$

2) a. On a pour tout entier $n \geq 2$:

$$a_n = \frac{2^n + 3^n n}{5^n n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{n-1}\left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Remarquons que $\frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{2}{5}\right)^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\frac{1}{n-1}\left(\frac{3}{5}\right)^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $\sum \frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ et $\sum \frac{1}{n-1}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ convergent et ainsi, la série $\sum a_n$ converge bien et on peut écrire :

$$\sum_{n\geq 2} a_n = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n-1}\left(\frac{3}{5}\right)^n = \sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n-1}\left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Comme ci-dessus, $\sum \frac{1}{n-1}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ et $\sum \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ convergent, d'où :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 2} a_n &= \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n-1}\left(\frac{2}{5}\right)^n - \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n-1}\left(\frac{3}{5}\right)^n \\ &= \frac{2}{5}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n - \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\left(\frac{3}{5}\right)^n. \\ &= \frac{3}{5}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\left(\frac{3}{5}\right)^n - \frac{3}{5}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{2}{5}\end{aligned}$$

De plus, pour tout $x \in]-1;1[$, on a $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, donc :

$$\sum_{n\geq 2} a_n = \frac{3}{5}\left[-\ln\left(1 - \frac{3}{5}\right)\right] - \frac{3}{5}\left[-\ln\left(1 - \frac{2}{5}\right)\right] + \frac{2}{5}.$$

Soit finalement :

$$\boxed{\sum_{n\geq 2} a_n = \frac{3}{5}\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{2}{5}}$$

b. Ici, la série converge clairement.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} = e^z$, donc avec j tel que $j^3 = 1$:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} + \sum_{n\geq 0} \frac{j^n}{n!} + \sum_{n\geq 0} \frac{(j^2)^n}{n!} = e^1 + e^j + e^{j^2}.$$

Or :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} + \sum_{n\geq 0} \frac{j^n}{n!} + \sum_{n\geq 0} \frac{(j^2)^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{1 + j^n + j^{2n}}{n!}.$$

On a $1 + j + j^2 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- si $n = 3k$, $1 + j^n + j^{2n} = 1 + j^{3k} + j^{6k} = 3$;
- si $n = 3k+1$, $1 + j^n + j^{2n} = 1 + j^{3k+1} + j^{6k+2} = 1 + j + j^2 = 0$;
- si $n = 3k+2$, $1 + j^n + j^{2n} = 1 + j^{3k+2} + j^{6k+42} = 1 + j^2 + j = 0$.

Donc :

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1+j^n+j^{2n}}{n!}=\sum_{\substack{n\geq 0\\ 3|n}}\frac{3}{n!}=\sum_{n\geq 0}\frac{3}{(3n)!}=3\sum_{n\geq 0}a_n .$$

Ainsi :

$$3\sum_{n\geq 0}a_n=e+e^j+e^{j^2} .$$

Avec $j^2=\overline{j}$, donc $e^{j^2}=e^{\overline{j}}=\overline{e^j}$, on obtient :

$$e^j+e^{j^2}=e^j+\overline{e^j}=2\operatorname{Re}(e^j)=2\operatorname{Re}(e^{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}})=2e^{-\frac{1}{2}}\operatorname{Re}(e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}})=\frac{2}{\sqrt{e}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Et finalement :

$$\boxed{\sum_{n\geq 0}a_n=\frac{1}{3}\left[e+\frac{2}{\sqrt{e}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]}$$

Exercice 3

1) On notera R le rayon de convergence de la série entière.

a. On a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$:

$$f(x)=\frac{\sin 4x}{\sin x}=\frac{2\cos 2x\sin 2x}{\sin x}=\frac{4\cos 2x\cos x\sin x}{\sin x}=4\cos 2x\cos x=2\left(\cos 3x+\cos x\right).$$

Remarquons que f est prolongeable par continuité en 0.

La fonction cosinus est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ avec $\cos x=\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

D'où pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=2\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n\frac{(3x)^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)$, soit :

$$\boxed{f(x)=\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n 2\frac{9^n+1}{(2n)!}x^{2n}\ \text{ avec }\ R=+\infty}$$

b. Pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$x^4-3x^2+2=(x^2-2)(x^2-1) .$$

Donc, pour tout $X\in\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$:

$$\frac{1}{X^2-3X+2}=\frac{1}{(X-2)(X-1)}=\frac{1}{1-X}-\frac{1}{2-X}=\frac{1}{1-X}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{X}{2}} .$$

Soit, pour tout $X\in\,]-1;1[$:

$$\frac{1}{X^2-3X+2}=\sum_{n=0}^{+\infty}X^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{X}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)X^n .$$

Donc :

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^{2n}\ \text{ avec }\ R=1}$$

c. Posons $u(x)=\dfrac{1+x}{1-x}\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$. La fonction u est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, rationnelle donc dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et :

$$u'(x)=\frac{2}{(1-x)^2}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

La fonction $f:x\mapsto\arctan\big(u(x)\big)$ est alors définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, comme composée de u par la fonction arctangente qui est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$:

$$f'(x)=\frac{u(x)}{1+u(x)^2}=\frac{\dfrac{2}{(1-x)^2}\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{1+\dfrac{(1+x)^2}{(1-x)^2}\tan^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}=\frac{2\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{(1+x^2)\left(1+\tan^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right)-2x\left(1-\tan^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right)}=\frac{\sin\alpha}{x^2-2x\cos\alpha+1}$$

Donc :

$$f'(x)=\frac{\sin\alpha}{(x-e^{i\alpha})(x-e^{-i\alpha})}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-e^{i\alpha}}-\frac{1}{x-e^{-i\alpha}}\right)=\frac{1}{2i}\left(\frac{e^{i\alpha}}{1-e^{i\alpha}x}-\frac{e^{-i\alpha}}{1-e^{-i\alpha}x}\right).$$

Or, pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$, on a $\dfrac{1}{1-z}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}z^n$.

Alors, pour tout $x\in\,]-1;1[$, on a $\left|e^{i\alpha}x\right|<1$ et $\left|e^{-i\alpha}x\right|<1$ donc $\dfrac{1}{1-e^{i\alpha}x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{i\alpha}x)^n$ et $\dfrac{1}{1-e^{-i\alpha}x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-i\alpha}x)^n$, et :

$$f'(x)=\frac{1}{2i}\left(e^{i\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{i\alpha}x)^n-e^{-i\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-i\alpha}x)^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{i(n+1)\alpha}-e^{-i(n+1)\alpha}}{2i}x^n.$$

Soit, pour tout $x\in\,]-1;1[$:

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sin\big((n+1)\alpha\big)x^n.$$

En intégrant terme à terme et avec $f(0)=\arctan\left(\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right)=\dfrac{\alpha}{2}$ (car $\dfrac{\alpha}{2}\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$), on obtient :

$$f(x)=\frac{\alpha}{2}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin\big((n+1)\alpha\big)}{n+1}x^{n+1}=\frac{\alpha}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\alpha)}{n}x^n.$$

Remarquons que si $|x|>1$, alors $\left(\dfrac{\sin(n\alpha)}{n}x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas et finalement :

$$\boxed{f(x)=\frac{\alpha}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\alpha)}{n}x^n\ \text{ avec }\ R=1.}$$

2) Comme $\operatorname{ch}x=1$ uniquement en $x=0$, la fonction $f:x\mapsto\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{\operatorname{ch}x-1}$ est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ en tant que différence de telles fonctions et on a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$:

$$f(x)=\frac{2}{x^2}-\frac{1}{\operatorname{ch}x-1}=\frac{2(\operatorname{ch}x-1)-x^2}{x^2(\operatorname{ch}x-1)}.$$

La fonction ch est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ avec $\operatorname{ch} x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, donc pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$2(\operatorname{ch} x-1)-x^2=2\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}-1\right)-x^2=2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+4}}{(2n+4)!}=x^4g(x)\ \text{ avec } g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(2n+4)!}x^{2n}$$

$$x^2(\operatorname{ch} x-1)=x^2\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}-1\right)=x^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}=x^4h(x)\ \text{ avec } h(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n+2)!}$$

Alors, on a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$:

$$f(x)=\frac{x^4g(x)}{x^4h(x)}=\frac{g(x)}{h(x)}.$$

Remarquons que $h(0)=\frac{1}{2}\neq 0$ et sur $\mathbb{R}^*$, $x^2h(x)=\operatorname{ch} x-1\neq 0$ donc $h(x)\neq 0$. Ainsi, h ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

De plus, les fonctions g et h sont (de par leur définition) développables en série entière sur $\mathbb{R}$, donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

On a alors $\lim_0 f=\frac{g(0)}{h(0)}=\frac{1}{6}$ donc f est prolongeable par continuité en 0 et, ainsi prolongée, $f=\frac{g}{h}$ est le quotient de deux fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule jamais, donc :

La fonction f se prolonge par continuité en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

1) Pour tout $x\in\,]-R;R[$:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

Alors :

$$\begin{aligned}f''(x)+b\,f'(x)+c\,f(x)&=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+b\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+c\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+b(n+1)a_{n+1}+ca_n\right]x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}0x^n=0\end{aligned}$$

Ainsi :

La fonction $f:x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ est bien solution de (E): $y''+by'+cy=0$ sur $]-R;R[$.

2) Si $c=-b-1$, l'équation (E) devient $y''+by'-(b+1)y=0$, qui est une équation différentielle linéaire, d'ordre 2, homogène et à coefficients constants.

L'équation caractéristique associée est $r^2+br-(b+1)=0$, de discriminant $\Delta=b^2+4(b+1)=(b+2)^2$.

Les racines sont $r_1=\frac{-b+(b+2)}{2}=1$ et $r_2=\frac{-b-(b+2)}{2}=-b-1$, et 1 est une racine double quand $b=-2$.

- Quand $b=-2$, les solutions de (E) sont de la forme $x\mapsto(\lambda x+\mu)e^x$ avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$, soit :

$$x\mapsto(\lambda x+\mu)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda n+\mu}{n!}x^n .$$

Par unicité du développement en série entière, on a alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=\dfrac{\lambda n+\mu}{n!}$.

- Quand $b\neq-2$, les solutions de (E) sont de la forme $x\mapsto\lambda e^x+\mu e^{-(b+1)x}$ avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$, soit :

$$x\mapsto\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}+\mu\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-(b+1)x\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda+\mu(-b-1)^n}{n!}x^n .$$

Et, toujours par unicité du développement en série entière, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=\dfrac{\lambda+\mu(-b-1)^n}{n!}$.

Réciproquement, on vérifie que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trouvées vérifient bien la relation de récurrence.

Finalement, on a :

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ a_n=\begin{cases}\dfrac{\lambda+\mu(-b-1)^n}{n!} & \text{quand } b\neq-2\\ \dfrac{\lambda n+\mu}{n!} & \text{quand } b=-2\end{cases}\quad \text{avec } (\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2.}$$

3) Avec $c=-b-1$, la relation de récurrence devient $(n+2)(n+1)a_{n+2}+b(n+1)a_{n+1}-(b+1)a_n=0$ et en multipliant par $n!$, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_{n+2}+bu_{n+1}-(b+1)u_n=0.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire double à coefficients constants.

L'équation caractéristique associée est $r^2+br-(b+1)=0$ (la même que dans la question précédente), et on trouve, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

- $u_n=\lambda n+\mu$ avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$ quand $b=-2$;
- $u_n=\lambda+\mu(-b-1)^n$ avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$ quand $b\neq-2$.

Et avec $a_n=\dfrac{u_n}{n!}$, on retrouve bien les résultats de la question précédente.

Exercice 5

1) a. Comme pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n\geq0$ et *f* est bornée sur $[0;1[$, il existe un réel $M>0$ tel que :

$$\forall\, x\in[0;1[,\ \ 0\leq\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\leq\sum_{k=0}^{+\infty}a_kx^k=f(x)\leq M .$$

On a donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0;1[$, $0\leq\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\leq M$ et en passant à la limite quand $x\to1^-$, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leq\sum_{k=0}^{n}a_k\leq M$. Ainsi, $\sum a_n$ est une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées par un réel fixé, donc :

$$\boxed{\text{La série } \sum a_n \text{ converge.}}$$

On a alors pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[-1;1]$, $\left|a_n x^n\right|\le a_n$ et $\sum a_n$ converge, donc la série $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $[-1;1]$. Sa somme est alors continue sur ce segment et donc $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$, soit :

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} f(x)=\sum_{n\ge 0} a_n}$$

b. Prenons $a_n=(-1)^n$. On a alors pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0;1[$:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k=\sum_{k=0}^{n}(-x)^k=\frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}.$$

Donc, on a bien $R=1$ et $f:x\mapsto\dfrac{1}{1+x}$ est bornée sur $[0;1[$.

Par contre, série $\sum a_n=\sum(-1)^n$ diverge, donc :

$$\boxed{\text{Le résultat ne subsiste pas quand les } a_n \text{ sont de signe quelconque.}}$$

2) a. Posons $S=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.

Commençons par remarquer que la série $\sum\dfrac{S}{(n+1)(n+2)}$ converge absolument , avec :

$$\sum_{n\ge 0}\frac{S}{(n+1)(n+2)}=S\sum_{n\ge 0}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=S.$$

La série entière $\sum\dfrac{S}{(n+1)(n+2)}x^n$ admet 1 pour rayon de convergence et converge alors normalement sur $[-1;1]$ et sa somme est continue sur ce segment, d'où :

$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n\ge 0}\frac{S}{(n+1)(n+2)}x^n=\sum_{n\ge 0}\frac{S}{(n+1)(n+2)}=S.$$

Posons $b_n=a_n R^n-\dfrac{S}{(n+1)(n+2)}$. On a pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} b_k x^k=\sum_{k=0}^{n} a_k(Rx)^k-\sum_{k=0}^{n}\frac{S}{(k+1)(k+2)}x^k.$$

Comme le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est 1, $\sum a_n(Rx)^n$ converge pour $|Rx|<R$, soit $|x|<1$ et diverge pour $|Rx|>R$, soit $|x|>1$, donc le rayon de convergence de $\sum a_n(Rx)^n$ est 1 et ainsi, celui de $\sum b_n x^n$ est aussi égal à 1. De plus, on a :

$$\sum_{n\ge 0} b_n=\sum_{n\ge 0}\left(a_n R^n-\frac{S}{(n+1)(n+2)}\right)=\sum_{n\ge 0} a_n R^n-\sum_{n\ge 0}\frac{S}{(n+1)(n+2)}=S-S=0.$$

Et enfin, si on pose $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, on a pour tout $x\in]-1;1[$:

$$g(x)=f(Rx)-\sum_{k=0}^{n}\frac{S}{(k+1)(k+2)}x^k.$$

Comme $\lim\limits_{x\to 1^-}\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{S}{(n+1)(n+2)}x^n=S$, on a :

$$\lim_{x\to R^-} f(x)=S \iff \lim_{x\to 1^-} f(Rx)=S \iff \lim_{x\to 1^-}\left(f(Rx)-\sum_{k=0}^{n}\frac{S}{(k+1)(k+2)}x^k\right)=S \iff \lim_{x\to 1^-} g(x)=0.$$

Finalement, on a $\lim\limits_{x\to R^-} f(x)=S$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to 1^-}\sum\limits_{n\geq 0} b_n x^n=0$ où rayon de convergence de $\sum b_n x^n$ est 1 et $\sum\limits_{n\geq 0} b_n=0$. Ceci prouve que :

$$\boxed{\text{On peut se ramener au cas où } R=1 \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n=0.}$$

b. Pour tout $x\in\,]0;1[$ et tout $N\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}(S_n-S_{n-1})x^n &= \sum_{n=0}^{N} S_n x^n-\sum_{n=0}^{N} S_{n-1}x^n=\sum_{n=0}^{N} S_n x^n-\sum_{n=1}^{N} S_{n-1}x^n\\ &=\sum_{n=0}^{N} S_n x^n-\sum_{n=0}^{N-1} S_n x^{n+1}=\sum_{n=0}^{N} S_n x^n-\sum_{n=0}^{N} S_n x^{n+1}+S_N x^{N+1}\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N}(S_n-S_{n-1})x^n=\sum_{n=0}^{N} S_n(x^n-x^{n+1})+S_N x^{N+1}}$$

c. Soit $x\in\,]0;1[$. On a :

- $S_N=\sum\limits_{k=0}^{N} a_k\xrightarrow[N\to+\infty]{}\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k=0$, donc $S_N x^{N+1}\xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$;
- pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S_n-S_{n-1}=a_n$, donc $\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{n=0}^{N}(S_n-S_{n-1})x^n=\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{n=0}^{N} a_n x^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n=f(x)$;
- pour tout $N\in\mathbb{N}$, $\sum\limits_{n=0}^{N} S_n(x^n-x^{n+1})=(1-x)\sum\limits_{n=0}^{N} S_n x^n$.

La relation de la question précédente permet de conclure que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$ et existe et que pour tout $x\in\,]0;1[$:

$$\boxed{f(x)=(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n}$$

On a vu que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=0$, donc pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N$, on a $|S_n|\leq\varepsilon$.

Alors, pour tout $x\in\,]0;1[$ et tout entier $n>N$:

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} S_n x^n\right|\leq\sum_{n=N+1}^{+\infty}|S_n|x^n\leq\varepsilon\sum_{n=N+1}^{+\infty}x^n\leq\varepsilon\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{\varepsilon}{1-x}.$$

Donc :

$$|f(x)|=(1-x)\left|\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n\right|=(1-x)\left|\sum_{n=0}^{N} S_n x^n+\sum_{n=N+1}^{+\infty} S_n x^n\right|\leq(1-x)\left|\sum_{n=0}^{N} S_n x^n\right|+(1-x)\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} S_n x^n\right|\leq\left|(1-x)\sum_{n=0}^{N} S_n x^n\right|+\varepsilon.$$

Et la fonction $x\mapsto(1-x)\sum_{n=0}^{N}S_nx^n$ est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 1, donc :

$$\lim_{x\to1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{N}S_nx^n=0\,.$$

Alors, il existe $\alpha\in\,]0;1[$ tel que pour tout $x\in\,]1-\alpha;1[$, on a $\left|(1-x)\sum_{n=0}^{N}S_nx^n\right|\le\varepsilon$ et finalement :

$$\forall\,\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists\,\alpha\in\,]0;1[,\ \forall\,x\in\,]1-\alpha;1[,\ \left|f(x)\right|\le2\varepsilon\,.$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{\lim_{x\to1^-}f(x)=0=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n}$$

Exercice 6

1) a. Remarquons déjà que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n}a_kc_{n-k}=a_0c_n+\sum_{k=1}^{n}a_kc_{n-k}=c_n+\sum_{k=1}^{n}a_kc_{n-k}$, donc :

$$\sum_{k=0}^{n}a_kc_{n-k}=0\quad\Leftrightarrow\quad c_n=-\sum_{k=1}^{n}a_kc_{n-k}=-\,a_1c_{n-1}-a_2c_{n-2}-\ldots-a_{n-1}c_1-a_nc_0\,.$$

Comme $c_0=1$, la suite est définie de manière unique par récurrence (forte : un terme dépend de tous les précédents). Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe bien une unique suite } (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ telle que } c_0=1 \text{ et pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n}a_kc_{n-k}=0.}$$

b. Si $r\in\,]0;R[$, la série $\sum a_nr^n$ converge, donc $a_nr^n\to0$. Or, toute suite convergente est bornée, donc $(a_nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe bien un réel } M>0 \text{ tel que pour tout } n\in\mathbb{N},\ \left|a_nr^n\right|\le M\,.}$$

La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant définie par récurrence forte, prouvons l'inégalité voulue par récurrence forte.

Au rang $n=1$, on a $c_1=-\,a_1c_0=-\,a_1$, donc, avec $\left|a_1r^1\right|\le M$, on a :

$$\left|c_1\right|=\left|a_1\right|\le\frac{M}{r}=\frac{M(M+1)^{1-1}}{r^1}\,.$$

L'inégalité est vraie au rang $n=1$.

Supposons l'inégalité vraie jusqu'à un rang $n\in\mathbb{N}^*$. On a alors :

$$\left|c_{n+1}\right|=\left|-\sum_{k=1}^{n+1}a_kc_{n+1-k}\right|=\left|\sum_{k=1}^{n+1}a_kc_{n+1-k}\right|\le\sum_{k=1}^{n+1}\left|a_k\right|\left|c_{n+1-k}\right|=\sum_{k=1}^{n}\left|a_k\right|\left|c_{n+1-k}\right|+\left|a_{n+1}\right|\left|c_0\right|=\sum_{k=1}^{n}\left|a_k\right|\left|c_{n+1-k}\right|+\left|a_{n+1}\right|.$$

Or, $\left|a_{n+1}\right|\le\dfrac{M}{r^{n+1}}$ et pour tout $k\in\ 1,n\ $, $\left|a_k\right|\le\dfrac{M}{r^k}$ et, $n+1-k\in\ 1,n\ $, donc par hypothèse de récurrence, on a $\left|c_{n+1-k}\right|\le\dfrac{M(M+1)^{n+1-k-1}}{r^{n+1-k}}\ \dfrac{M(M+1)^{n-k}}{r^{n+1-k}}$.

Ainsi :

$$|c_{n+1}| \le \sum_{k=1}^{n} \frac{M}{r^k}\frac{M(M+1)^{n-k}}{r^{n+1-k}} + \frac{M}{r^{n+1}}.$$

Enfin, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{M}{r^k}\frac{M(M+1)^{n-k}}{r^{n+1-k}} + \frac{M}{r^{n+1}} = \frac{M^2}{r^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}(M+1)^{n-k} + \frac{M}{r^{n+1}} = \frac{M^2}{r^{n+1}}\sum_{k=0}^{n-1}(M+1)^{k} + \frac{M}{r^{n+1}}$$

$$= \frac{M^2}{r^{n+1}}\frac{(M+1)^n-1}{(M+1)-1} + \frac{M}{r^{n+1}} = \frac{M}{r^{n+1}}\left[(M+1)^n-1\right] + \frac{M}{r^{n+1}} = \frac{M(M+1)^{(n+1)-1}}{r^{n+1}}$$

Donc $|c_{n+1}| \le \dfrac{M(M+1)^{(n+1)-1}}{r^{n+1}}$ et l'inégalité est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisé et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ |c_n| \le \frac{M(M+1)^{n-1}}{r^n}.}$$

c. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|c_n\left(\dfrac{r}{M+1}\right)^n\right| \le \dfrac{M}{M+1}$. Donc la suite $\left(c_n\left(\dfrac{r}{M+1}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, ce qui prouve que la série entière $\sum c_n x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à $\dfrac{r}{M+1} > 0$, donc :

$$\boxed{\sum c_n x^n \text{ a un rayon de convergence non nul.}}$$

Si on appelle R'' le rayon de convergence de $h(x) = \sum c_n x^n$ et $\rho = \min(R, R'')$, on a pour tout $x \in]-\rho;\rho[$:

$$f(x)h(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k c_{n-k}\right)x^n = a_0 c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 0 x^n = 1.$$

Donc, $h(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ sur $]-\rho;\rho[$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\frac{1}{f} \text{ est développable en série entière au voisinage de 0.}}$$

2) On a $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ avec $R' = 1$, donc g est de classe C^∞ sur $]-1;1[$ avec $g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n b_n x^{n-1}$.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n > 0$, on a $g'(x) > 0$ sur $]0;1[$, donc g est strictement croissante sur cet intervalle.

Si g est bornée sur $]0;1[$, alors on se retrouve dans la situation de la question 1 de l'exercice 5, donc $\sum b_n$ converge, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, g est croissante et non bornée sur $]0;1[$ donc :

$$\boxed{\lim_{x \to 1^-} g(x) = +\infty}$$

Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in \mathbb{R}$, alors pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \ge N$, on a, avec $b_n > 0$:

$$\ell - \varepsilon \le \frac{a_n}{b_n} \le \ell + \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad (\ell-\varepsilon)b_n \le a_n \le (\ell+\varepsilon)b_n.$$

Alors, pour tout $x \in]0;1[$ et tout entier $n > N$:

$$\sum_{k=N+1}^{n} (\ell-\varepsilon)b_k x^k \leq \sum_{k=N+1}^{n} a_k x^k \leq \sum_{k=N+1}^{n} (\ell+\varepsilon)b_k x^k \quad \Leftrightarrow \quad (\ell-\varepsilon)\sum_{k=N+1}^{n} b_k x^k \leq \sum_{k=N+1}^{n} a_k x^k \leq (\ell+\varepsilon)\sum_{k=N+1}^{n} b_k x^k .$$

Soit en passant à la limite quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in]0;1[$:

$$(\ell-\varepsilon)\big(g(x)-g_N(x)\big) \leq f(x)-f_N(x) \leq (\ell+\varepsilon)\big(g(x)-g_N(x)\big).$$

avec $f_N(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$ et $g_N(x) = \sum_{k=0}^{N} b_k x^k$.

Comme $g(x) > 0$ sur $]0;1[$, on a, pour tout $x \in]0;1[$:

$$\ell-\varepsilon+\frac{f_N(x)-(\ell-\varepsilon)g_N(x)}{g(x)} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \ell+\varepsilon+\frac{f_N(x)-(\ell+\varepsilon)g_N(x)}{g(x)} .$$

Or, $\lim_{x\to 1^-} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 1^-}\left[f_N(x)-(\ell\pm\varepsilon)g_N(x)\right] = f_N(1)-(\ell\pm\varepsilon)g_N(1)$, donc $\lim_{x\to 1^-}\frac{f_N(x)-(\ell\pm\varepsilon)g_N(x)}{g(x)} = 0$ et ainsi, il existe $\alpha \in]0;1[$ tel que pour tout $x \in]1-\alpha;1[$, on a :

$$-\varepsilon \leq \frac{f_N(x)-(\ell-\varepsilon)g_N(x)}{g(x)} \leq \varepsilon \quad\text{et}\quad -\varepsilon \leq \frac{f_N(x)-(\ell+\varepsilon)g_N(x)}{g(x)} \leq \varepsilon .$$

Finalement, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha \in]0;1[$ tel que pour tout $x \in]1-\alpha;1[$, on a :

$$\ell-2\varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \ell+2\varepsilon .$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{g(x)} = \ell}$$

Exercice 7

1) Comme les fonctions f et $x \mapsto x$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de telles fonctions. De plus :

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f\,'(0).$$

Donc :

$$\boxed{\text{En posant } \varphi(0) = f\,'(0)\text{, on prolonge } \varphi \text{ en une fonction continue sur } \mathbb{R}.}$$

2) Sur $\mathbb{R}^*$, on a $\varphi = hf$ avec $h : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, qui est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

Avec la formule de Leibniz, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} h^{(n-k)} f^{(k)}$, soit pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\varphi^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n-k+1}} f^{(k)}(x) = (-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-x)^k f^{(k)}(x)}{k!} .$$

Or, la formule de Taylor avec reste intégrale appliquée à f (de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$) entre x et 0 donne :

$$f(0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(-x)^k+\int_x^0\frac{(-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,dt\,.$$

Soit, avec $f(0)=0$:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(-x)^k=-\int_x^0\frac{(-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,dt=\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^x t^n\,f^{(n+1)}(t)\,dt\,.$$

Ainsi :

$$\varphi^{(n)}(x)=(-1)^n\,\frac{n!}{x^{n+1}}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^x t^n\,f^{(n+1)}(t)\,dt=\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x t^n\,f^{(n+1)}(t)\,dt\,.$$

Et donc, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}^*$:

$$\boxed{x^{n+1}\varphi^{(n)}(x)=\int_0^x t^n\,f^{(n+1)}(t)\,dt}$$

3) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Comme f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, $f^{(n+1)}$ est continue en 0, donc pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe un réel $\alpha>0$ tel que pour tout $t\in[-\alpha,\alpha]$, $\left|f^{(n+1)}(t)-f^{(n+1)}(0)\right|\le\varepsilon$ et donc :

$$\left|t^n\left(f^{(n+1)}(t)-f^{(n+1)}(0)\right)\right|\le\varepsilon\left|t^n\right|.$$

Alors, pour tout $x\in[-\alpha,\alpha]$ et tout $t\in[0,x]$ ou $[x,0]$, on a $t\in[-\alpha,\alpha]$ et donc :

$$\left|\int_0^x t^n f^{(n+1)}(t)\,dt-\int_0^x t^n f^{(n+1)}(0)\,dt\right|=\left|\int_0^x t^n\left(f^{(n+1)}(t)-f^{(n+1)}(0)\right)dt\right|\le\left|\int_0^x\left|t^n\left(f^{(n+1)}(t)-f^{(n+1)}(0)\right)\right|dt\right|\le\left|\int_0^x\varepsilon\left|t^n\right|dt\right|.$$

Or :

$$\left|\int_0^x\varepsilon\left|t^n\right|dt\right|=\begin{cases}\varepsilon\int_0^x t^n\,dt=\varepsilon\dfrac{x^{n+1}}{n+1} & \text{quand } x\ge 0\\ \varepsilon\left|\int_0^x(-t)^n dt\right|=\varepsilon(-1)^n\int_x^0 t^n dt=\varepsilon\dfrac{(-x)^{n+1}}{n+1} & \text{quand } x\le 0\end{cases}$$

Dans les deux cas, $\left|\int_0^x\varepsilon\left|t^n\right|dt\right|=\varepsilon\dfrac{|x|^{n+1}}{n+1}$ et donc, pour tout $x\in[-\alpha,\alpha]$:

$$\left|\int_0^x t^n f^{(n+1)}(t)\,dt-\int_0^x t^n f^{(n+1)}(0)\,dt\right|\le\varepsilon\frac{|x|^{n+1}}{n+1}\,.$$

D’après la question précédente :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x t^n f^{(n+1)}(t)\,dt-\int_0^x t^n f^{(n+1)}(0)\,dt\right|&=\left|x^{n+1}\varphi^{(n)}(x)-f^{(n+1)}(0)\int_0^x t^n\,dt\right|\\&=\left|x^{n+1}\varphi^{(n)}(x)-f^{(n+1)}(0)\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|=|x|^{n+1}\left|\varphi^{(n)}(x)-\frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}\right|\end{aligned}$$

Donc, pour tout $x\in[-\alpha,\alpha]$, $|x|^{n+1}\left|\varphi^{(n)}(x)-\dfrac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}\right|\le\varepsilon\dfrac{|x|^{n+1}}{n+1}$ soit pour tout $x\in[-\alpha,\alpha]\setminus\{0\}$:

$$\left|\varphi^{(n)}(x)-\frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}\right|\le\frac{\varepsilon}{n+1}\,.$$

Finalement, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}$:

$$\left| \varphi^{(n)}(x) - \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1} \right| \leq \frac{\varepsilon}{n+1}.$$

Par définition, ceci veut dire que :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \varphi^{(n)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}}$$

4) La fonction $\tilde{\varphi}$ est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$, continue en 0 et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi^{(n)}$ admet une limite finie en 0, qui est $\dfrac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$. Ceci permet de conclure que $\tilde{\varphi}$ est de classe C^∞ en 0 et ainsi que :

$$\boxed{\tilde{\varphi} \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

5) On suppose ici que *f* est développable en série entière au voisinage de 0, autrement dit qu'il existe un réel $R > 0$ et une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Comme $f(0) = 0$, on a $a_0 = 0$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+1}$. Donc, pour tout $x \in]-R, R[\setminus \{0\}$:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^n.$$

Ceci prouve que φ, donc $\tilde{\varphi}$, sont développables en série entière au voisinage de 0, donc que $\tilde{\varphi}$ est de classe C^∞ en 0, et ainsi :

$$\boxed{\tilde{\varphi} \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Exercice 8

1) Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq M$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

- $\left| \dfrac{a_n}{n!} x^n \right| = |a_n| \dfrac{|x|^n}{n!} \leq M \dfrac{|x|^n}{n!}$ et la série $\sum \dfrac{|x|^n}{n!}$ converge, donc $\sum \dfrac{a_n}{n!} x^n$ est absolument convergente ;
- $|S_n| = \left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{n} M = (n+1)M$, donc $\left| \dfrac{S_n}{n!} x^n \right| \leq M(n+1) \dfrac{|x|^n}{n!} = M \dfrac{n|x|^n}{n!} + M \dfrac{|x|^n}{n!}$, et pour $n \geq 1$, $\dfrac{n|x|^n}{n!} = \dfrac{|x|^n}{(n-1)!}$; comme les séries $\sum \dfrac{|x|^n}{n!}$ et $\sum \dfrac{|x|^n}{(n-1)!}$ convergent, $\sum \dfrac{S_n}{n!} x^n$ est absolument convergente.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence des séries entières } f \text{ et } g \text{ est } +\infty.}$$

2) Les fonctions *f* et *g* étant des sommes de séries entières de rayon de convergence infini, elles sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n!} n\, x^{n-1} = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{a_{n+1}}{n!} x^n \,.$$

De même $g'(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{S_{n+1}}{n!} x^n$. Comme $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$, on a :

$$g'(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{S_n + a_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{S_n}{n!} x^n + \frac{a_{n+1}}{n!} x^n \right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{S_n}{n!} x^n + \sum_{n\geq 0} \frac{a_{n+1}}{n!} x^n = g(x) + f'(x) \,.$$

Ainsi :

$$\boxed{g' = g + f'}$$

3) Les fonctions $x \mapsto e^{-x}$ et f sont toutes les deux de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc une intégration par parties donne pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^x e^{-t} f(t)\,dt &= \Big[-e^{-t} f(t) \Big]_0^x - \int_0^x (-e^{-t}) f'(t)\,dt \\
&= \Big[-e^{-t} f(t) \Big]_0^x + \int_0^x e^{-t} f'(t)\,dt \\
&= \Big[-e^{-t} f(t) \Big]_0^x + \int_0^x e^{-t} \big(g'(t) - g(t) \big)\,dt
\end{aligned}$$

Or, $t \mapsto e^{-t}\big(g'(t) - g(t)\big)$ est la dérivée de $t \mapsto e^{-t} g(t)$, donc :

$$\int_0^x e^{-t} f(t)\,dt = \Big[-e^{-t} f(t) \Big]_0^x + \Big[e^{-t} g(t) \Big]_0^x = -e^{-x} f(x) + f(0) + e^{-x} g(x) - g(0) = e^{-x}\big(g(x) - f(x) \big) + f(0) - g(0) \,.$$

Enfin, $f(0) = a_0 = S_0 = g(0)$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\int_0^x e^{-t} f(t)\,dt = e^{-x}\big(g(x) - f(x) \big)}$$

4) Si $a_n = (-1)^n$, on a :

$$S_n = \begin{cases} 1 & \text{quand } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{quand } n \text{ est pair} \end{cases}$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{S_n}{n!} x^n = \sum_{n\in\mathbb{N},\, n \text{ pair}} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch} x \,.$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} g(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} \operatorname{ch} x = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + e^{-2x}}{2} \,.$$

Soit, quand $a_n = (-1)^n$:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} e^{-x} g(x) = \frac{1}{2}}$$

5) On suppose que la série $\sum a_n$ converge, ce qui implique (entre autres) que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Alors, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, on a $|a_n| \leq \varepsilon$.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout entier $n \geq N$, $\left|\frac{a_n}{n!}x^n\right| \leq \varepsilon \frac{x^n}{n!}$, donc :

$$|f(x)| = \left|\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n!}x^n\right| \leq \left|\sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{n!}x^n\right| + \sum_{n\geq N+1}\left|\frac{a_n}{n!}x^n\right| \leq \left|\sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{n!}x^n\right| + \sum_{n\geq N+1} \varepsilon \frac{x^n}{n!} = \left|\sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{n!}x^n\right| + \varepsilon\left(e^x - \sum_{n=0}^{N}\frac{x^n}{n!}\right).$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\left|e^{-x} f(x)\right| \leq e^{-x}\left|\sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{n!}x^n\right| + \varepsilon e^{-x}\left(e^x - \sum_{n=0}^{N}\frac{x^n}{n!}\right) = \left|\sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{n!}e^{-x}x^n\right| - \sum_{n=0}^{N}\frac{e^{-x}x^n}{n!} + \varepsilon.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}x^n = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left|\sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{n!}e^{-x}x^n\right| - \sum_{n=0}^{N}\frac{e^{-x}x^n}{n!}\right] = 0$ et il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que pour out réel $x \geq A$, $\left|\sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{n!}e^{-x}x^n\right| - \sum_{n=0}^{N}\frac{e^{-x}x^n}{n!} \leq \varepsilon$.

Ainsi, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que pour out réel $x \geq A$, $\left|e^{-x} f(x)\right| \leq 2\varepsilon$, ce qui prouve que :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} f(x) = 0.$$

Si on note S la somme de la série $\sum a_n$, la suite $(S_n - S)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et on montre comme ci-dessus que :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\left(g(x) - \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{S}{n!}x^n\right) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{S_n - S}{n!}x^n\right) = 0.$$

Or, $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{S}{n!}x^n = S\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{x^n}{n!} = S\,e^x$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\left(g(x) - S\,e^x\right) = 0$, soit :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} g(x) = S.$$

Alors :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} e^{-x}\left(g(x) - f(x)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}g(x) - e^{-x}f(x)\right) = S - 0 = S.$$

Et ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t} f(t)\,dt = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n}$$

Exercice 9

1) On a $\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc pour tout réel x :

- si $|x| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n = 0$, donc $\left(\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée ;

- si $|x|>1$, $\lim_{n\to+\infty} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} = +\infty$, donc $\left(\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas bornée.

Alors, d'après le lemme d'Abel :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière } f \text{ est } R=1.}$$

La suite $\left(\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroît vers 0, donc la série $\sum \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)(-1)^n$ vérifie le critère spécial des séries alternées : elle converge.

Comme $\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ et la série de Riemann $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, la série $\sum \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ diverge.

Ainsi :

$$\boxed{\text{La série } \sum \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n \text{ converge quand } x=-1 \text{ et diverge quand } x=1.}$$

2) Pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, on a :

$$\begin{aligned}
(1-x)f(x) &= (1-x)\sum_{n\geq 1} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n \\
&= \sum_{n\geq 1} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n - \sum_{n\geq 1} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^{n+1} \\
&= \sum_{n\geq 1} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n - \sum_{n\geq 2} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)x^n \\
&= \tan(1)\,x + \sum_{n\geq 2}\left[\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right]x^n \\
&= \tan(1)\,x - \sum_{n\geq 2}\left[\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) - \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]x^n
\end{aligned}$$

Et pour tout entier $n \geq 2$, $a_n = \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) - \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0$ avec :

$$a_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)}{\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}.$$

On a :

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}} = \frac{1}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)\sqrt{n}\sqrt{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n\sqrt{n}}.$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge, la série $\sum a_n$ converge, donc la série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $[0,1]$: sa somme est donc continue sur ce segment, donc en 1.

Alors :

$$\lim_{x\to 1}\sum_{n\geq 2}\left[\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)-\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]x^n=\sum_{n\geq 2}\left[\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)-\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

Et, par télescopage :

$$\sum_{n\geq 2}\left[\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)-\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]=\tan\left(\frac{1}{\sqrt{2-1}}\right)=\tan(1).$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to 1}(1-x)f(x)=\lim_{x\to 1}\left(\tan(1)\,x-\sum_{n\geq 2}\left[\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)-\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]x^n\right)=\tan(1)-\tan(1).$$

Soit :

$$\boxed{\lim_{x\to 1}(1-x)f(x)=0}$$

Exercice 10

Posons $f(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$.

En supposant que le rayon de convergence R de cette série entière est strictement positif, la série $\sum a_nx^n$ converge absolument pour tout $x\in\left]-R,R\right[$. On peut appliquer la formule du produit de Cauchy :

$$f(x)^2=\left(\sum_{n\geq 0}a_nx^n\right)\left(\sum_{n\geq 0}a_nx^n\right)=\sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n}(a_kx^k)(a_{n-k}x^{n-k})=\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}\right)x^n=\sum_{n\geq 0}a_{n+1}x^n.$$

Donc :

$$x\,f(x)^2=\sum_{n\geq 0}a_{n+1}x^{n+1}=\sum_{n\geq 1}a_nx^n=f(x)-a_0=f(x)-1.$$

Ainsi, pour tout $x\in\left]-R,R\right[$, $x\,f(x)^2-f(x)+1=0$, donc au voisinage de 0 :

$$f(x)=\frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Or, *f* est continue sur $\left]-R,R\right[$, donc :

- *f* continue au voisinage de 0, donc $f(x)$ vaut soit toujours $\dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$, soit toujours $\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ au voisinage de 0 ;
- *f* est continue en 0 avec $f(0)=a_0=1$ et $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}=+\infty$, donc $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ au voisinage de 0.

Or, au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}\sqrt{1-4x}&=1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)(-4x)^n=1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}(-1)^{n-1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\ldots\left(\frac{2n-3}{2}\right)(-4)^nx^n\\&=1-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}1\times 3\times\ldots\times(2n-3)\times 2^nx^n=1-\sum_{n\geq 1}\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}2x^n=1-\sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{(n+1)!n!}2x^{n+1}\\&=1-2x\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n\end{aligned}$$

Ainsi, au voisinage de 0 :

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n .$$

Remarquons que le rayon de convergence de cette série est $\frac{1}{4}>0$.

Par unicité du développement en série entière, on obtient, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$a_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Réciproquement, si on pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, $b_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ et $f(x)=\sum_{n\geq 0}b_nx^n$, on a, pour tout $x\in\left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[$:

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} .$$

Donc, $x\,f(x)^2=f(x)-1$ avec :

$$x\,f(x)^2=\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}b_kb_{n-k}\right)x^{n+1}$$

$$f(x)-1=\sum_{n\geq 1}b_nx^n=\sum_{n\geq 0}b_{n+1}x^{n+1}$$

Et, à nouveau grâce à l'unicité du développement en série entière, on obtient, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$b_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}b_kb_{n-k} .$$

Enfin, $b_0=\frac{1}{0+1}\binom{0}{0}=1$, donc les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont le même premier terme et vérifient la même relation de récurrence, donc elles sont égales et finalement :

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ a_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.}$$