Corrigés des TD du chapitre 3

Exercice 1

Pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \left\| \frac{1}{1+\|x\|} x \right\| = \frac{\|x\|}{1+\|x\|} < 1$, donc $f(x) \in B(0,1)$ et ainsi, *f* est à images dans $B(0,1)$.

Par ailleurs, l'application $x \mapsto \|x\|$ est continue sur *E* et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc $x \mapsto \frac{1}{1+\|x\|}$ est continue sur *E* en tant que composée d'applications continues.

Enfin, $x \mapsto x$ est continue sur *E*, donc *f* est continue sur *E* en tant que produit de fonctions continues (l'une scalaire, l'autre vectorielle).

Soit $y \in B(0,1)$. On a :

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+\|x\|} x = y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\|x\|}{1+\|x\|} = \|y\| < 1 \\ x = \left(1+\|x\|\right) y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \|x\| = \frac{\|y\|}{1-\|y\|} \\ x = \left(1+\|x\|\right) y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{1-\|y\|} y$$

Ceci prouve que *f* est bijective de réciproque $y \mapsto \frac{1}{1-\|y\|} y$, définie sur $B(0,1)$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ est continue sur $[0,1[$, donc on prouve comme plus haut que $y \mapsto \frac{1}{1-\|y\|} y$ est continue sur $B(0,1)$. Finalement :

> L'application *f* est continue sur *E*, bijective de *E* dans $B(0,1)$ et f^{-1} est continue sur $B(0,1)$.

Exercice 2

L'application ϕ est linéaire (par linéarité de l'intégrale). Soient $f, g \in E$. On a :

$$|\phi(f) - \phi(g)| = |\phi(f-g)| = \left| \int_0^1 \left(f(t) - g(t) \right) dt \right| \leq \int_0^1 |f(t) - g(t)| \, dt = \|f-g\|.$$

Donc, pour tout $(f,g) \in E^2$, $|\phi(f) - \phi(g)| \leq \|f-g\|$, autrement dit, ϕ est 1- lipschitzienne, donc :

> ϕ est continue sur *E*.

Exercice 3

1) a. Comme α et β sont positifs, les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ et $y \mapsto y^\beta$ (éventuellement prolongées par continuité en 0) sont définies et continues sur $\mathbb{R}_+$. La fonction polynômiale $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ et ne s'annule qu'en $(0,0)$, donc :

> La fonction *f* est définie sur $D = \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\}$.

b. On a vu que les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ et $y \mapsto y^\beta$ (prolongées par continuité en 0) sont continues sur $\mathbb{R}_+$, donc $(x,y) \mapsto x^\alpha y^\beta$ est continue sur $\mathbb{R}_+^2$, donc sur *D*.

Il en va de même pour la fonction polynômiale $(x,y) \mapsto x^2+y^2$.

Ainsi, *f* est un quotient de fonctions continues sur *D*, donc :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } D.}$$

c. Pour tout $(\theta,r) \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{R}_+^*$, $|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = \dfrac{r^{\alpha+\beta}\left|\cos^\alpha\theta \sin^\beta\theta\right|}{r^2} \leq \dfrac{r^{\alpha+\beta}}{r^2}$, donc pour tout $(x,y) \in D$:

$$|f(x,y)| \leq (x^2+y^2)^{\frac{\alpha+\beta-2}{2}}.$$

Distinguons plusieurs cas selon α et β.

- Pour $\alpha+\beta<2$, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x,x) = \dfrac{x^{\alpha+\beta-2}}{2} = +\infty$, donc *f* n'est pas prolongeable par continuité en $(0,0)$.
- Pour $\alpha+\beta=2$, on $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x,x) = \dfrac{1}{2}$ et :
  - $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x,0) = 0 \neq \dfrac{1}{2}$ quand $\beta>0$;
  - $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x,0) = 1 \neq \dfrac{1}{2}$ quand $\beta=0$ (donc $\alpha=2$).

  Donc, *f* n'est pas prolongeable par continuité en $(0,0)$.
- Pour $\alpha+\beta>2$, on a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{\frac{\alpha+\beta-2}{2}} = 0$, donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ et *f* est prolongeable par continuité en $(0,0)$ en posant $f(0,0)=0$.

Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } (0,0) \text{ si et seulement si } \alpha+\beta>2.}$$

Comme la fonction *f* est définie sur $D = \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\}$, elle est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+^2$ si et seulement elle l'est en $(0,0)$, donc :

$$\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité sur } \mathbb{R}_+^2 \text{ si et seulement si } \alpha+\beta>2.}$$

Pour prolonger par continuité la fonction *f* sur $\mathbb{R}^2$, il faut au moins la prolonger par continuité en $(0,0)$, en posant $f(0,0)=0$. Il faut donc que $\alpha+\beta>2$. Cette condition étant remplie, si on pose $\tilde{f} : (x,y) \mapsto f\left(|x|,|y|\right)$, (où $f(0,0)=0$), les fonctions $\tilde{f}$ et *f* coïncident sur $(\mathbb{R}_+)^2$ et $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ en tant que composée de $(x,y) \mapsto \left(|x|,|y|\right)$, continue sur $\mathbb{R}^2$ et à images dans $(\mathbb{R}_+)^2$, par *f*, continue sur $(\mathbb{R}_+)^2$. Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité sur } \mathbb{R}^2 \text{ si et seulement si } \alpha+\beta>2.}$$

Remarque : N'importe quelle fonction $\tilde{f}$, continue sur $\mathbb{R}^2$ et coïncidant avec *f* sur $(\mathbb{R}_+)^2$ fait l'affaire.

2) Notons $B = B\big((0,0),1\big)$, $\bar{B} = \bar{B}\big((0,0),1\big)$ et $S = S\big((0,0),1\big)$, respectivement la boule ouverte, la boule fermée et la sphère de centre $(0,0)$ et de rayon 1. On a alors :

$$g:(x,y)\mapsto \begin{cases} 2x^2+y^2-1 & \text{si } (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\bar{B} \\ x^2 & \text{si } (x,y)\in\bar{B} \end{cases}$$

Sur les ouverts B et $\mathbb{R}^2\setminus\bar{B}$, *g* est polynomiale, donc continue. Reste à prouver la continuité de *g* sur *S*.

Soit $(\cos\alpha,\sin\alpha)\in S$ avec $\alpha\in[0,2\pi[$.

Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, il existe un unique couple $(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[$ tel que $(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ et $(x,y)\to(\cos\alpha,\sin\alpha)$ revient à $(r,\theta)\to(1,\alpha)$. On a :

$$g(x,y)=g(r\cos\theta,r\sin\theta)=\begin{cases} 2r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta-1 & \text{si } r>1 \\ r^2\cos^2\theta & \text{si } r\le 1\end{cases}=\begin{cases} r^2\cos^2\theta+r^2-1 & \text{si } r>1 \\ r^2\cos^2\theta & \text{si } r\le 1\end{cases}$$

Et :

$$\lim_{(r,\theta)\to(1^+,\alpha)} g(r\cos\theta,r\sin\theta)=\lim_{(r,\theta)\to(1^+,\alpha)}\left(r^2\cos^2\theta+r^2-1\right)=\cos^2\alpha=g(\cos\alpha,\sin\alpha)$$
$$\lim_{(r,\theta)\to(1^-,\alpha)} g(r\cos\theta,r\sin\theta)=\lim_{(r,\theta)\to(1^-,\alpha)}\left(r^2\cos^2\theta\right)=\cos^2\alpha=g(\cos\alpha,\sin\alpha)$$

Ainsi, $\lim\limits_{(x,y)\to(\cos\alpha,\sin\alpha)} g(x,y)=\lim\limits_{(r,\theta)\to(1,\alpha)} g(r\cos\theta,r\sin\theta)=g(\cos\alpha,\sin\alpha)$, et *g* est continue en $(\cos\alpha,\sin\alpha)$.

Finalement, *g* est continue sur B, *S* et $\mathbb{R}^2\setminus\bar{B}$, donc, sur $B\cup S\cup\left(\mathbb{R}^2\setminus\bar{B}\right)=\mathbb{R}^2$ et ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2.}$$

Exercice 4

1) Supposons qu'il existe $(a,b)\in F^2$ tel que $f(a)=a$ et $f(b)=b$.

Comme *f* est λ-lipschitzienne pour la norme infinie, on a : $\|f(a)-f(b)\|_\infty\le\lambda\|a-b\|_\infty$, soit :

$$\|a-b\|_\infty\le\lambda\|a-b\|_\infty.$$

Or, si $\|a-b\|_\infty\ne 0$, on obtient $1\le\lambda$, ce qui est absurde car $\lambda\in]0,1[$, donc $\|a-b\|_\infty=0$, soit $a=b$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } f \text{ possède un point fixe alors il est unique.}}$$

2) Prouvons les deux résultats par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$.

Pour $n=0$, on a $x_0\in F$ par hypothèse et $\|x_1-x_0\|_\infty=\lambda^0\|x_1-x_0\|_\infty$, donc la propriété est vraie au rang 0.

Supposons la propriété vraie à un rang $n\in\mathbb{N}$. On a alors :

- $x_n\in F \Rightarrow f(x_n)\in F$ (car $f(F)\subset F$) $\Rightarrow x_{n+1}\in F$.
- On a $\|x_{n+1}-x_n\|_\infty\le\lambda^n\|x_1-x_0\|_\infty$ et :

$$\|x_{n+2}-x_{n+1}\|_\infty=\|f(x_{n+1})-f(x_n)\|_\infty\le\lambda\|x_{n+1}-x_n\|_\infty\le\lambda\left(\lambda^n\|x_1-x_0\|_\infty\right)=\lambda^{n+1}\|x_1-x_0\|_\infty.$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit :

$$\boxed{x_n \in F \text{ et } \|x_{n+1} - x_n\|_\infty \leq \lambda^n \|x_1 - x_0\|_\infty .}$$

3) Soit $i \in \ 1;p$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|x_{i,n+1} - x_{i,n}| \leq \|x_{n+1} - x_n\|_\infty \leq \lambda^n \|x_1 - x_0\|_\infty .$$

Or, $\lambda \in]0,1[$, donc la série géométrique $\sum \lambda^n \|x_1 - x_0\|_\infty$ est convergente et par comparaison :

$$\boxed{\text{La série } \sum \left(x_{i,n+1} - x_{i,n}\right) \text{ est absolument convergente.}}$$

4) Pour tout $i \in \ 1;p$, la série $\sum \left(x_{i,n+1} - x_{i,n}\right)$ est absolument convergente, donc elle est convergente. Ceci implique que la suite $(x_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge. La suite de vecteurs $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge coordonnée par coordonnée, donc :

$$\boxed{\text{La suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers un vecteur } a.}$$

On a vu que pour tout $i \in \ 1;p$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|x_{i,n+1} - x_{i,n}| \leq \lambda^n \|x_1 - x_0\|_\infty \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda^n \|x_1 - x_0\|_\infty \leq x_{i,n+1} - x_{i,n} \leq \lambda^n \|x_1 - x_0\|_\infty .$$

Comme les séries $\sum \left(x_{i,n+1} - x_{i,n}\right)$ et $\sum \lambda^n$ convergent, on a pour tout $i \in \ 1;p$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$-\|x_1 - x_0\|_\infty \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda^k \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \left(x_{i,k+1} - x_{i,k}\right) \leq \|x_1 - x_0\|_\infty \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda^k .$$

Si pour tout $i \in \ 1;p$, $(x_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a_i, on a $\sum_{k=n}^{+\infty} \left(x_{i,k+1} - x_{i,k}\right) = a_i - x_{i,n}$.

Et comme $\sum_{k=n}^{+\infty} \lambda^k = \frac{\lambda^n}{1-\lambda}$, on obtient pour tout $i \in \ 1;p$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$-\|x_1 - x_0\|_\infty \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \leq a_i - x_{i,n} \leq \|x_1 - x_0\|_\infty \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad |x_{i,n} - a_i| \leq \frac{\|x_1 - x_0\|_\infty}{1-\lambda} \lambda^n .$$

L'inégalité ci-dessus étant vraie pour toutes les composantes de $x_n - a$, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\|x_n - a\|_\infty \leq \frac{\|x_1 - x_0\|_\infty}{1-\lambda} \lambda^n}$$

5) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de *F*, qui est fermé, donc sa limite *a* appartient à *F*.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = a$ et *f* est continue sur *F* (car lipschitzienne), donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n) = f(a)$.

Ainsi :

$$\boxed{f(a) = a}$$

Nous venons donc de trouver une vecteur a de F tel que $f(a)=a$, autrement f admet un point fixe dans F.
Finalement, avec le résultat de la première question, on peut conclure que :

$$\boxed{f \text{ possède un unique point fixe dans } F.}$$

Exercice 5

1) Commençons par reformuler la continuité de f sur E. f est continue sur E si et seulement si :

$$\forall\, a\in E,\ \forall\, \varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x\in E,\ \|x-a\|\leq\alpha\ \Rightarrow\ \|f(x)-f(a)\|\leq\varepsilon.$$

On peut rendre stricte les inégalités sans altérer l'équivalence :

$$\forall\, a\in E,\ \forall\, \varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x\in E,\ \|x-a\|<\alpha\ \Rightarrow\ \|f(x)-f(a)\|<\varepsilon.$$

Ceci se reformule alors en :

$$\begin{aligned} & \left[\forall\, a\in E,\ \forall\, \varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha\in\mathbb{R}_+^*,\ x\in B(a,\alpha)\ \Rightarrow\ f(x)\in B\big(f(a),\varepsilon\big)\right] \\ \Leftrightarrow\ & \left[\forall\, a\in E,\ \forall\, \varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha\in\mathbb{R}_+^*,\ x\in B(a,\alpha)\ \Rightarrow\ x\in f^{-1}\Big(B\big(f(a),\varepsilon\big)\Big)\right] \\ \Leftrightarrow\ & \left[\forall\, a\in E,\ \forall\, \varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha\in\mathbb{R}_+^*,\ B(a,\alpha)\subset f^{-1}\Big(B\big(f(a),\varepsilon\big)\Big)\right] \end{aligned}$$

Ainsi :

$$f \text{ est continue sur } E\ \ \Leftrightarrow\ \ \left[\forall\, a\in E,\ \forall\, \varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha\in\mathbb{R}_+^*,\ B(a,\alpha)\subset f^{-1}\Big(B\big(f(a),\varepsilon\big)\Big)\right].$$

($\Rightarrow$) Supposons f continue sur E.

Soit O une partie ouverte de F. Si $f^{-1}(O)$ est vide alors elle est ouverte. Sinon, pour tout $a\in f^{-1}(O)$, on a $f(a)\in O$. Comme O est ouverte, il existe $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $B(f(a),\varepsilon)\subset O$ et donc, $f^{-1}\Big(B\big(f(a),\varepsilon\big)\Big)\subset f^{-1}(O)$.

Or, d'après ce qui précède, il existe $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a,\alpha)\subset f^{-1}\Big(B\big(f(a),\varepsilon\big)\Big)$, donc $B(a,\alpha)\subset f^{-1}(O)$.

Ainsi, pour tout $a\in f^{-1}(O)$, il existe $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a,\alpha)\subset f^{-1}(O)$, ce qui prouve que $f^{-1}(O)$ est ouverte.

($\Leftarrow$) Supposons que l'image réciproque de toute partie ouverte de F est une partie ouverte de E.

Soient $a\in E$ et $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$.

Comme $B\big(f(a),\varepsilon\big)$ est une partie ouverte de F, $f^{-1}\Big(B\big(f(a),\varepsilon\big)\Big)$ est une partie ouverte de E.

Or, $f(a)\in B\big(f(a),\varepsilon\big)$, donc $a\in f^{-1}\Big(B\big(f(a),\varepsilon\big)\Big)$ et ainsi, il existe $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a,\alpha)\subset f^{-1}\Big(B\big(f(a),\varepsilon\big)\Big)$.

Ainsi, pour tout $a\in E$ et pour tout $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, il existe $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a,\alpha)\subset f^{-1}\Big(B\big(f(a),\varepsilon\big)\Big)$, ce qui prouve que f est continue sur E.

Finalement, on a bien :

$$\boxed{f \text{ est continue sur } E \text{ si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de } F \text{ est un ouvert de } E.}$$

2) ($\Rightarrow$) Supposons f continue sur E.

Soit A une partie fermée de F. Si $f^{-1}(A)$ est vide alors elle est fermée. Sinon, soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $f^{-1}(A)$ convergeant vers $a\in E$. On a $a_n\to a$ et f continue en a, donc $f(a_n)\to f(a)$.

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n\in f^{-1}(A)$, donc $f(a_n)\in A$ et comme A est fermée et $f(a_n)\to f(a)$, on a $f(a)\in A$.

Ainsi, $a \in f^{-1}(A)$ et donc toute suite convergente de $f^{-1}(A)$ converge dans $f^{-1}(A)$, ce qui prouve que $f^{-1}(A)$ est fermée.

($\Leftarrow$) Supposons que l'image réciproque de toute partie fermée de *F* est une partie fermée de *E*.

Soit *A* une partie ouverte de *F*. On a $f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$. En effet :

$$x \in f^{-1}(F \setminus A) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in F \setminus A \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \notin A \quad \Leftrightarrow \quad x \notin f^{-1}(A) \quad \Leftrightarrow \quad E \setminus f^{-1}(A).$$

Comme *A* est ouverte, $F \setminus A$ est fermée, donc $f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$ est fermée, ce qui prouve que $f^{-1}(A)$ est ouverte. Ainsi, l'image réciproque de toute partie ouverte de *F* est une partie ouverte de *E*, donc *f* est continue sur *E* d'après la question précédente.

Finalement, on a bien :

> *f* est continue sur *E* si et seulement si l'image réciproque de tout fermé de *F* est un fermé de *E*.

3) Posons $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. La fonction *f* est définie et continue (car rationnelle) sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On a $f(\mathbb{R}) = [0,1[$ qui n'est ni ouvert, ni fermé. Or, $\mathbb{R}$ est un fermé et un ouvert de $\mathbb{R}$, donc :

> L'image d'un ouvert (*resp*. fermé) par une application continue n'est pas forcément ouverte (*resp*. fermée).

Exercice 6

Pour toute matrice *M* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det M$ est polynomiale (et même affine) en chacun des coefficients de *M*, donc l'application $\det : M \mapsto \det M$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Or, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus GL_n(\mathbb{K}) = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det M = 0\right\} = \det^{-1}\left(\{0\}\right)$.

Comme $\{0\}$ est fermé dans $\mathbb{K}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus GL_n(\mathbb{K})$ est l'image réciproque d'une partie fermée de $\mathbb{K}$ par une application continue, donc est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, d'après l'exercice précédent.

Finalement, comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus GL_n(\mathbb{K})$ est fermé :

$$\boxed{GL_n(\mathbb{K}) \text{ est un ouvert de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).}$$

On veut montrer que $\overline{GL_n(\mathbb{K})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donc que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \subset \overline{GL_n(\mathbb{K})}$, autrement dit que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est limite d'une suite de matrices de $GL_n(\mathbb{K})$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang $r \in 0, n$. Il existe deux matrices inversibles *P* et *Q* telles que $M = PJQ$ où :

$$J = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Posons alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $M_k = PJ_kQ$ avec $J_k = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & \dfrac{1}{k} I_{n-r} \end{pmatrix}$.

On a immédiatement $J_k \to J$ quand $k \to +\infty$ (car $\|J_k - J\|_\infty = \dfrac{1}{k}$) et, comme l'application $X \mapsto PXQ$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a : $M_k \to PJQ = M$.

Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\det J = \dfrac{1}{k^{n-r}} \neq 0$ donc $\det M_k = \det P \times \det J_k \times \det Q \neq 0$ et $M_k \in GL_n(\mathbb{K})$.

Finalement, on a trouvé une suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de matrices inversibles qui converge vers *M*, donc $M \in \overline{GL_n(\mathbb{K})}$.

Ceci prouve que :

$$\boxed{\overline{GL_n(\mathbb{K})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$$

Exercice 7

D'après l'exercice 7 du TD sur les espaces vectoriels normés, $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée, bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (pour n'importe quelle norme). De plus, l'application $M \mapsto \|M - B\|$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc elle admet un minimum sur $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$, atteint en $A \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$. Comme $\|A - B\|$ est le minimum de $M \mapsto \|M - B\|$ sur $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$, on a alors immédiatement $\|A - B\| \le \|M - B\|$ pour tout $M \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$.

Supposons qu'il existe une deuxième matrice A' de $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $M \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$, .

Comme *A* et A' appartiennent toutes deux à $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$, on a $\|A' - B\| \le \|A - B\|$ et $\|A - B\| \le \|A' - B\|$, donc :

$$\|A' - B\| = \|A - B\|.$$

Toujours d'après l'exercice 7 du TD sur les espaces vectoriels normés, $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ est une partie convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc pour tout $t \in [0,1]$, $tA + (1-t)A' \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ et $\|A - B\| \le \|tA + (1-t)A' - B\|$. Or :

$$\|tA + (1-t)A' - B\| = \|t(A - B) + (1-t)(A' - B)\| \le t\|A - B\| + (1-t)\|A' - B\| = \|A - B\|.$$

Ainsi :

$$\|tA + (1-t)A' - B\| = \|A - B\|.$$

Or, ici $\|.\|$ est une norme euclidienne donc dérive d'un produit scalaire et :

$$\|tA + (1-t)A' - B\|^2 = \|t(A - A') + A' - B\|^2 = t^2\|A - A'\|^2 + 2t\left(A - A' \mid A' - B\right) + \|A' - B\|^2.$$

Avec $\|A' - B\| = \|A - B\|$, on obtient, pour tout $t \in [0,1]$:

$$t^2\|A - A'\|^2 + 2t\left(A - A' \mid A' - B\right) = 0.$$

Or, l'application polynôme $t \mapsto t^2\|A - A'\|^2 + 2t\left(A - A' \mid A' - B\right) = 0$ est nulle sur $[0,1]$ si et seulement si ses coefficients sont nuls, donc $\|A - A'\|^2 = 0$, ce qui entraine immédiatement $A = A'$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Il existe une unique matrice } A \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que pour tout } M \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R}),\ \|A - B\| \le \|M - B\|.}$$

Exercice 8

1) La fonction $f-g$ est continue sur le segment $[0,1]$ en tant que différence de telles fonctions, donc elle y admet un minimum α atteint en $a\in[0,1]$.

Comme $f>g$ sur $[0,1]$, on a $\alpha=f(a)-g(a)>0$ et pour tout $x\in[0,1]$, $f(x)-g(x)\geq\alpha$, donc :

$$f(x)\geq g(x)+\alpha .$$

Prouvons alors par récurrence sur *n* que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $f^n(x)\geq g^n(x)+n\alpha$ pour tout $x\in[0,1]$.

- On vient de voir que la propriété est vraie pour $n=1$.
- Supposons la propriété vraie à un rang $n\in\mathbb{N}^*$.

  Pour tout $x\in[0,1]$, on a $f(x)\in[0,1]$, car *f* est définie sur $[0,1]$ et à images dans $[0,1]$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $f(x)$, soit :

$$f^n\left(f(x)\right)\geq g^n\left(f(x)\right)+n\alpha \quad\Leftrightarrow\quad f^{n+1}(x)\geq(g^n\circ f)(x)+n\alpha .$$

  Or, $f\circ g=g\circ f$, donc $f\circ g^n=g^n\circ f$ pour tout entier naturel *n*, d'où :

$$(g^n\circ f)(x)=(f\circ g^n)(x)=f\left(g^n(x)\right).$$

  Enfin, $g^n(x)\in[0,1]$, car *g*, donc g^n, sont définies sur $[0,1]$ et à images dans $[0,1]$. Alors :

$$f\left(g^n(x)\right)\geq g\left(g^n(x)\right)+\alpha .$$

  Et ainsi, pour tout $x\in[0,1]$:

$$f^{n+1}(x)\geq f\left(g^n(x)\right)+n\alpha\geq g\left(g^n(x)\right)+\alpha+n\alpha=g^{n+1}(x)+(n+1)\alpha .$$

  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisé et héréditaire, donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe bien un réel } \alpha>0 \text{ tel que pour tout } n\in\mathbb{N}^* \text{ et tout } x\in[0,1],\ f^n(x)\geq g^n(x)+n\alpha .}$$

On a vu que pour tout $x\in[0,1]$, $g^n(x)\in[0,1]$, donc $g^n(x)\geq 0$ et ainsi, pour tout $x\in[0,1]$, $f^n(x)\geq n\alpha$.

En particulier, pour tout $n>\dfrac{1}{\alpha}$, on a $f^n(x)>1$. Ceci est absurde car, comme pour g^n, on a $f^n(x)\in[0,1]$, pour tout $x\in[0,1]$. Ainsi :

$$\boxed{\text{L'hypothèse « pour tout } x\in[0,1],\ f(x)>g(x) \text{ » mène à une contradiction.}}$$

2) D'après ce qui précède, on n'a pas $f(x)>g(x)$ pour tout $x\in[0,1]$, donc il existe $a\in[0,1]$ tel que $f(a)\leq g(a)$, soit $(f-g)(a)\leq 0$.

Comme *f* et *g* jouent le même rôle, il existe $b\in[0,1]$ tel que $g(b)\leq f(b)$, soit $(f-g)(b)\geq 0$.

Or, on a vu que $f-g$ est continue sur $[0,1]$, donc le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer qu'il existe $c\in[a,b]$ ou $[b,a]\subset[0,1]$ tel que $(f-g)(c)=0$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe } c\in[0,1] \text{ tel que } f(c)=g(c).}$$

Exercice 9

1) Soient $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $B=(b_{i,j})\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

- Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on a pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{p}\left|\lambda a_{i,j}\right|=|\lambda|\sum_{j=1}^{p}\left|a_{i,j}\right|$, donc :

$$\|\lambda A\|=\max_{i\in[\![1,p]\!]}\left(\sum_{j=1}^{p}\left|\lambda a_{i,j}\right|\right)=\max_{i\in[\![1,p]\!]}\left(|\lambda|\sum_{j=1}^{p}\left|a_{i,j}\right|\right)=|\lambda|.\max_{i\in[\![1,p]\!]}\left(\sum_{j=1}^{p}\left|a_{i,j}\right|\right)=|\lambda|.\|A\|.$$

- Si $\displaystyle\|A\|=\max_{i\in[\![1,p]\!]}\left(\sum_{j=1}^{p}\left|a_{i,j}\right|\right)=0$, alors pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{p}\left|a_{i,j}\right|=0$, donc pour tous $i,j\in[\![1,p]\!]$, $\left|a_{i,j}\right|=0$ soit $a_{i,j}=0$ et ainsi, $A=0_p$.

- Pour tout $i\in[\![1,p]\!]$:

$$\sum_{j=1}^{p}\left|a_{i,j}+b_{i,j}\right|\leq\sum_{j=1}^{p}\left(\left|a_{i,j}\right|+\left|b_{i,j}\right|\right)=\sum_{j=1}^{p}\left|a_{i,j}\right|+\sum_{j=1}^{p}\left|b_{i,j}\right|\leq\|A\|+\|B\|.$$

  Donc :

$$\|A+B\|=\max_{i\in[\![1,p]\!]}\left(\sum_{j=1}^{p}\left|a_{i,j}+b_{i,j}\right|\right)\leq\|A\|+\|B\|.$$

Ainsi :

$$\boxed{\|.\|\text{ est une norme sur }\mathcal{M}_p(\mathbb{R}).}$$

Soient $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $B=(b_{i,j})\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On a $\displaystyle\|AB\|=\max_{i\in[\![1,p]\!]}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}\right|\right)$. Or, pour tout $i\in[\![1,p]\!]$:

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}\right|\leq\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left|a_{i,k}\right|\left|b_{k,j}\right|=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{i,k}\right|\left|b_{k,j}\right|=\sum_{k=1}^{n}\left(\left|a_{i,k}\right|\sum_{j=1}^{n}\left|b_{k,j}\right|\right)\leq\sum_{k=1}^{n}\left(\left|a_{i,k}\right|\|B\|\right)=\left(\sum_{k=1}^{n}\left|a_{i,k}\right|\right).\|B\|\leq\|A\|.\|B\|.$$

Donc, $\displaystyle\max_{i\in[\![1,p]\!]}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}\right|\right)\leq\|A\|.\|B\|$, soit :

$$\boxed{\|AB\|\leq\|A\|.\|B\|}$$

Enfin, $I_p=(\delta_{i,j})$ et pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{p}\left|\delta_{i,j}\right|=1$, donc :

$$\boxed{\|I_p\|=1}$$

Remarquons que pour $M\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $a\in\mathbb{N}$, on a $\left\|M^k\right\|\leq\|M\|^k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, et :

$$\left\|\sum_{k=0}^{a}\frac{1}{k!}M^k\right\|\leq\sum_{k=0}^{a}\frac{1}{k!}\|M\|^k.$$

Donc :

$$\|\exp(M)\|=\left\|\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}M^k\right\|\leq\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\|M\|^k=\exp\left(\|M\|\right).$$

2) Soit $A,B\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}T_n-S_n&=\exp\left(\frac{1}{n}A\right)\exp\left(\frac{1}{n}B\right)-\exp\left(\frac{1}{n}(A+B)\right)\\&=\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{n^k}A^k\right]\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{n^k}B^k\right]-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{n^k}(A+B)^k\\&=\left[I_p+\frac{1}{n}A+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{n^k}A^k\right]\left[I_p+\frac{1}{n}B+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{n^k}B^k\right]-I_p-\frac{1}{n}(A+B)-\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{n^k}(A+B)^k\\&=\frac{1}{n^2}AB+\left(\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{n^k}A^k\right)\left(I_p+\frac{1}{n}B\right)+\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{n^k}A^k\right)\left(\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{n^k}B^k\right)-\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{n^k}(A+B)^k\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\|T_n-S_n\|&\le\frac{1}{n^2}\|AB\|+\left\|\left(\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{n^k}A^k\right)\left(I_p+\frac{1}{n}B\right)\right\|+\left\|\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{n^k}A^k\right)\left(\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{n^k}B^k\right)\right\|+\left\|\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{n^k}(A+B)^k\right\|\\&\le\frac{1}{n^2}\|AB\|+\left(\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{n^k}\|A\|^k\right)\left(\|I_p\|+\frac{1}{n}\|B\|\right)+\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{n^k}\|A\|^k\right)\left(\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{n^k}\|B\|^k\right)+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{n^k}\|A+B\|^k\\&\le\frac{1}{n^2}\|AB\|+\left(\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{n^2}\|A\|^k\right)\left(\|I_p\|+\|B\|\right)+\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\|A\|^k\right)\left(\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{n^2}\|B\|^k\right)+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{n^2}\|A+B\|^k\\&\le\frac{1}{n^2}\left[\|AB\|+\left(\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}\|A\|^k\right)\left(\|I_p\|+\|B\|\right)+\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\|A\|^k\right)\left(\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}\|B\|^k\right)+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}\|A+B\|^k\right]\\&\le\frac{1}{n^2}\left[\|AB\|+\left(\|\exp(A)\|\right)\left(\|I_p\|+\|B\|\right)+\left(\|\exp(A)\|\right)\left(\|\exp(B)\|\right)+\|\exp(A+B)\|\right]\\&\le\frac{1}{n^2}\left[\|AB\|+\left(\|\exp(A)\|\right)\left(\|I_p\|+\|B\|\right)+2\|\exp(A+B)\|\right]\end{aligned}$$

Ainsi, en posant $K=\|AB\|+\left(\|\exp(A)\|\right)\left(\|I_p\|+\|B\|\right)+2\|\exp(A+B)\|$, on a $\|T_n-S_n\|\le\frac{K}{n^2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\|T_n-S_n\|=\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, posons $D_n=T_n-S_n$. On a :

$$(T_n)^n=(S_n+D_n)^n=\sum_{k=0}^{n}\sum_{(i_1,i_2,\dots,i_n)\in E_k}S_n^{1-i_1}D_n^{i_1}S_n^{1-i_2}D_n^{i_2}\dots S_n^{1-i_n}D_n^{i_n}=(S_n)^n+\sum_{k=1}^{n}\sum_{(i_1,i_2,\dots,i_n)\in E_k}S_n^{i_1}D_n^{1-i_1}S_n^{i_2}D_n^{1-i_2}\dots S_n^{i_n}D_n^{1-i_n}$$

où E_k est l'ensemble des n-uplets de $\{0,1\}$ contenant 1 exactement k fois (de cardinal $\binom{n}{k}$).

Alors :

$$\begin{aligned}\|(T_n)^n-(S_n)^n\|&=\left\|\sum_{k=1}^{n}\sum_{(i_1,i_2,\dots,i_n)\in E_k}S_n^{i_1}D_n^{1-i_1}S_n^{i_2}D_n^{1-i_2}\dots S_n^{i_n}D_n^{1-i_n}\right\|\le\sum_{k=1}^{n}\left\|\sum_{(i_1,i_2,\dots,i_n)\in E_k}S_n^{i_1}D_n^{1-i_1}S_n^{i_2}D_n^{1-i_2}\dots S_n^{i_n}D_n^{1-i_n}\right\|\\&\le\sum_{k=1}^{n}\sum_{(i_1,i_2,\dots,i_n)\in E_k}\|S_n\|^{i_1}\|D_n\|^{1-i_1}\dots\|S_n\|^{i_n}\|D_n\|^{1-i_n}\le\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\|S_n\|^{n-k}\|D_n\|^k=\left(\|S_n\|+\|D_n\|\right)^n-\|S_n\|^n\\&\le\|S_n\|^n\left[\left(1+\frac{\|D_n\|}{\|S_n\|}\right)^n-1\right]\end{aligned}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $(S_n)^n=\left[\exp\left(\dfrac{1}{n}(A+B)\right)\right]^n=\exp\left(n\dfrac{1}{n}(A+B)\right)=\exp(A+B)$, donc :

$$\|\exp(A+B)\|=\|(S_n)^n\|\le\|S_n\|^n.$$

D'autre part :

$$S_n=\exp\left(\frac{1}{n}(A+B)\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{n}(A+B)\right)^k=I_p+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{n^k}(A+B)^k.$$

Donc :

$$\|S_n\|\le\|I_p\|+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{n^k}\|A+B\|^k\le1+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k!}\|A+B\|^k\le1+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\|A+B\|^k=1+\frac{\exp(\|A+B\|)}{n}.$$

Et, avec $k=\exp(\|A+B\|)$:

$$\|S_n\|^n\le\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=\exp\left[n\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]\le\exp\left[n\frac{k}{n}\right]=e^k.$$

Ainsi :

$$0<\|\exp(A+B)\|\le\|S_n\|^n\le e^k\ \text{ et }\ 0<\frac{1}{e^k}\le\frac{1}{\|S_n\|^n}\le\frac{1}{\|\exp(A+B)\|}.$$

D'après la question précédente, $\|D_n\|=\underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, donc $\dfrac{\|D_n\|}{\|S_n\|}=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et :

$$\left(1+\frac{\|D_n\|}{\|S_n\|}\right)^n-1=\exp\left[n\ln\left(1+\frac{\|D_n\|}{\|S_n\|}\right)\right]-1=\exp\left[n\ln\left(1+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]-1=\exp\left[n\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]-1=\exp\left[\underset{n\to+\infty}{o}(1)\right]-1$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{\|D_n\|}{\|S_n\|}\right)^n-1\right]=0$ et comme la suite $\left(\|S_n\|^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\|S_n\|^n\left[\left(1+\frac{\|D_n\|}{\|S_n\|}\right)^n-1\right]\right)=0.$$

Avec le théorème des gendarmes, l'inégalité $\|(T_n)^n-(S_n)^n\|\le\|S_n\|^n\left[\left(1+\dfrac{\|D_n\|}{\|S_n\|}\right)^n-1\right]$ permet de conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\|(T_n)^n-(S_n)^n\|\right)=0.$$

Or, on a vu plus haut que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $(S_n)^n=\exp(A+B)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\|(T_n)^n-\exp(A+B)\|\right)=0$, soit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(T_n)^n=\exp(A+B)}$$