Corrigés des TD du chapitre 2

Exercice 1

1) On a $\dfrac{\|y-x\|}{\|x\|} \le a$, soit $\|y-x\| \le a\|x\|$. En écrivant $x = x-y+y$, on obtient :

$$\|y-x\| \le a\|x-y+y\| \le a\|x-y\| + a\|y\| \quad \Rightarrow \quad (1-a)\|y-x\| \le a\|y\|.$$

Et comme $a \in [0,1[$, on a $1-a>0$, donc, avec aussi $\|y\|>0$:

$$\boxed{\frac{\|y-x\|}{\|y\|} \le \frac{a}{1-a}}$$

2) Remarquons que dans la formule désirée, x et y jouent le même rôle, donc quitte à intervertir les deux vecteurs, on peut supposer que $0 < \|x\| \le \|y\|$ (donc $\max(\|x\|,\|y\|) = \|y\|$).

Posons alors $k = \dfrac{\|x\|}{\|y\|}$ (on a donc $0 < k \le 1$), $u = \dfrac{x}{\|x\|}$ et $v = \dfrac{y}{\|y\|}$ (on a donc $\|u\| = \|v\| = 1$).

Le résultat voulu se récrit alors : $\|u-v\| \le 2\dfrac{\|x-y\|}{\|y\|} = 2\|ku-v\|$. On a :

$$\|u-v\| = \|u-ku+ku-v\| \le \|u-ku\| + \|ku-v\| = \|(1-k)u\| + \|ku-v\|.$$

Et comme $\|u\|=1$ et $1-k \ge 0$, on a :

$$\|u-v\| \le 1-k+\|ku-v\|.$$

Enfin, d'après l' « autre » inégalité triangulaire : $\big|\,\|ku\|-\|v\|\,\big| \le \|ku-v\|$. Avec $\|u\|=\|v\|=1$, on obtient :

$$1-k = |k-1| \le \|ku-v\|.$$

Finalement, on obtient :

$$\|u-v\| \le 1-k+\|ku-v\| \le 2\|ku-v\|.$$

Soit :

$$\boxed{\left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\| \le 2\frac{\|x-y\|}{\max(\|x\|,\|y\|)}}$$

Exercice 2

Les preuves que N_1, N_∞ et N sont des normes sur E se font exactement comme celles faites dans le cours pour les deux premières normes usuelles sur $\mathbb{K}^p$ (le fait que le nombre $n+1$ de composantes varie ne change pas la preuve) et pour la norme infinie sur $C([a,b],\mathbb{R})$ avec $[a,b]=[0,1]$ (en remarquant que les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$ et que si un polynôme s'annule en tout point de $[0,1]$, alors il admet une infinité de racines, donc il est nul).

Soit $P = X^n + ... + X + 1$. On a $N_\infty(P) = 1$ et $N_1(P) = N(P) = n+1$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{N_1(P)}{N_\infty(P)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{N(P)}{N_\infty(P)} = +\infty .$$

Ainsi, il n'existe pas de réel $a > 0$ tel que $N_1 \le aN_\infty$ ou $N \le aN_\infty$, et donc :

$$\boxed{N_\infty \text{ n'est équivalente ni à } N_\infty \text{, ni à } N.}$$

Soit maintenant $P = (1-X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k X^k$. On a $N_1(P) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ et $N(P) = 1$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{N_1(P)}{N(P)} = +\infty .$$

Ainsi, il n'existe pas de réel $a > 0$ tel que $N_1 \le aN$:

$$\boxed{N_1 \text{ et } N \text{ ne sont pas équivalentes.}}$$

Exercice 3

On a vu dans le cours que si u est un isomorphisme de $\mathbb{K}^p$ dans E, alors $x \mapsto \|u(x)\|$ est une norme sur $\mathbb{K}^p$ et dans la preuve, l'aspect bijectif n'est utilisé que pour prouver la séparation.

On prouve donc exactement comme dans le cours que $N : x \mapsto \|u(x)\|$ est une application de F dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant la propriété d'homogénéité et l'inégalité triangulaire. De plus, pour tout $x \in F$, on a :

$$N(x) = 0 \iff \|u(x)\| = 0 \iff u(x) = 0 .$$

Et pour que $u(x) = 0$ soit équivalent à $x = 0$, il est nécessaire et suffisant que u soit injective.

Ainsi :

$$\boxed{\text{L'application } N : x \mapsto \|u(x)\| \text{ est une norme sur } F \text{ si et seulement si } u \text{ est injective.}}$$

Exercice 4

On a $\lim_{t\to+\infty} (e^t - t - 2) = +\infty$, donc pour tout réel k assez grand, $e^k - k - 2$ est positif. La fonction constante $f : [0,1] \to \mathbb{R} ; x \mapsto k$ appartient alors à A et a pour norme $\|f\|_\infty = k$.

Ainsi, on peut trouver $f \in A$ de norme aussi grande que l'on veut, ce qui veut dire que :

A n'est pas bornée.

Soit maintenant $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A convergeant vers $f \in E$. On a donc $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, on a :

$$|f_n(x) - f(x)| \le \|f_n - f\|_\infty .$$

Donc, pour $x \in [0,1]$ fixé, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$.

De plus, comme pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n\in A$, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1]$, $2+f_n(x)\le e^{f_n(x)}$ et en passant à la limite quand $n\to+\infty$, on obtient pour tout $x\in[0,1]$: $2+f(x)\le e^{f(x)}$ et ainsi, $f\in A$.

Ceci prouve que :

$$A \text{ est fermée.}$$

Finalement :

$$\boxed{A \text{ est une partie fermée et non bornée de } E.}$$

Exercice 5

1) On a $A\subset\overline{A}$ donc $E\backslash\overline{A}\subset E\backslash A$ et, comme, $\overline{A}$ est fermé, $E\backslash\overline{A}$ est un ouvert inclus dans $E\backslash A$.

Soit un ouvert O inclus dans $E\backslash A$. On a $O\subset E\backslash A$, donc : $E\backslash(E\backslash A)=A\subset E\backslash O$.

Or, $E\backslash O$ est fermé, c'est donc un fermé contenant A. Comme $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A, on a $\overline{A}\subset E\backslash O$ et donc : $O\subset E\backslash\overline{A}$. Ainsi, tout ouvert O inclus dans $E\backslash A$ est inclus dans $E\backslash\overline{A}$.

Finalement, $E\backslash\overline{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans $E\backslash A$, soit :

$$\boxed{E\backslash\overline{A}=\overset{\circ}{\overbrace{E\backslash A}}}$$

Si on remplace A par $E\backslash A$ dans la relation ci-dessus, on obtient : $E\backslash\overline{E\backslash A}=E\backslash(\overset{\circ}{E\backslash A})=\overset{\circ}{A}$.

En passant aux complémentaires, on obtient immédiatement :

$$\boxed{\overline{E\backslash A}=E\backslash\overset{\circ}{A}}$$

2) Pour tout $a\in\overline{A}$, il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a. Or, les éléments de A sont dans B, donc il existe une suite d'éléments de B qui converge vers a. Ceci prouve que $a\in\overline{B}$ et ainsi :

$$\boxed{\overline{A}\subset\overline{B}}$$

Si $A\subset B$, alors $E\backslash B\subset E\backslash A$, et d'après ce qui précède : $\overline{E\backslash B}\subset\overline{E\backslash A}$.

D'après la question précédente : $E\backslash\overset{\circ}{B}\subset E\backslash\overset{\circ}{A}$.

En passant aux complémentaires, on obtient immédiatement :

$$\boxed{\overset{\circ}{A}\subset\overset{\circ}{B}}$$

3) On a $A\cap B\subset A$, donc d'après le résultat ci-dessus : $\overset{\circ}{\overbrace{A\cap B}}\subset\overset{\circ}{A}$. De même, $\overset{\circ}{\overbrace{A\cap B}}\subset\overset{\circ}{B}$ et donc :

$$\overset{\circ}{\overbrace{A\cap B}}\subset\overset{\circ}{A}\cap\overset{\circ}{B}.$$

Soit maintenant $a\in\overset{\circ}{A}\cap\overset{\circ}{B}$. Il existe alors $r_1,r_2\in\mathbb{R}_+^*$ tels que $B(a,r_1)\subset A$ et $B(a,r_2)\subset B$.

En posant $r=\min(r_1,r_2)>0$, on a $B(a,r)\subset B(a,r_1)\subset A$ et $B(a,r)\subset B(a,r_2)\subset B$, donc $B(a,r)\subset A\cap B$.

Ceci prouve que $a \in \overset{\circ}{A\cap B}$ et ceci étant vrai pour tout $a \in \mathring{A} \cap \mathring{B}$, on a :

$$\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \overset{\circ}{A\cap B}.$$

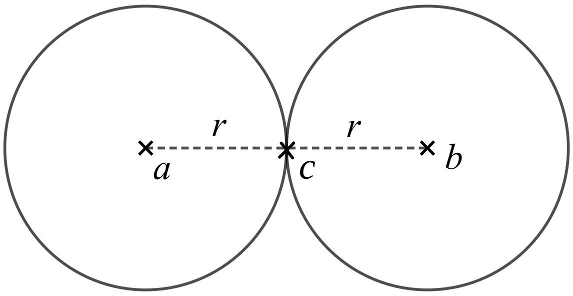
Finalement, on bien :

$$\boxed{\mathring{A} \cap \mathring{B} = \overset{\circ}{A\cap B}}$$

4) On a $A\cap B \subset A$, donc d'après la question 2 : $\overline{A\cap B} \subset \overline{A}$. De même, $\overline{A\cap B} \subset \overline{B}$ et ainsi :

$$\boxed{\overline{A\cap B} \subset \overline{A}\cap\overline{B}}$$

Soit $a,b \in E$ tels que $a \neq b$. Posons $r = \dfrac{\|a-b\|}{2}$, $A = B(a,r)$ et $B = B(b,r)$.



On a $A\cap B = \varnothing$ (si $x \in A\cap B$, on a $2r = \|a-b\| = \|a-x+x-b\| \leq \|a-x\| + \|x-b\| < r+r = 2r$: absurde), donc $\overline{A\cap B} = \varnothing$, mais $\overline{A}\cap\overline{B} = \overline{B}(a,r)\cap\overline{B}(b,r) = \{c\}$ avec $c = \dfrac{1}{2}(a+b)$, donc :

$$\boxed{\text{L'inclusion réciproque n'est pas forcément vraie.}}$$

Exercice 6

Soient a et b deux éléments de $\overline{C}$ et un réel $\lambda \in [0,1]$.

Il existe deux suites de C, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a et b respectivement.

Comme C est convexe, $\lambda a_n + (1-\lambda)b_n \in C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lambda a_n + (1-\lambda)b_n\right) = \lambda a + (1-\lambda)b \in \overline{C}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\overline{C} \text{ est convexe.}}$$

Soient a et b deux éléments de $\mathring{C}$ (donc de C aussi).

Comme a et b sont intérieurs à C, il existe deux réels $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$ tels que $B(a,r_1) \subset C$ et $B(b,r_2) \subset C$.

En posant $r = \min(r_1,r_2) > 0$, on a $B(a,r) \subset B(a,r_1) \subset C$ et $B(b,r) \subset B(b,r_2) \subset C$.

Soit maintenant $t \in [0,1]$ et $c = ta + (1-t)b$. Posons :

$$A = \{tx + (1-t)y,\ (x,y) \in B(a,r) \times B(b,r)\}.$$

Pour tout $(x,y) \in B(a,r) \times B(b,r)$, on a $(x,y) \in C^2$, donc $tx + (1-t)y \in C$ (car C est convexe). Ainsi :

$$\underline{A \subset C}.$$

Prouvons que $A = B(c,r)$.

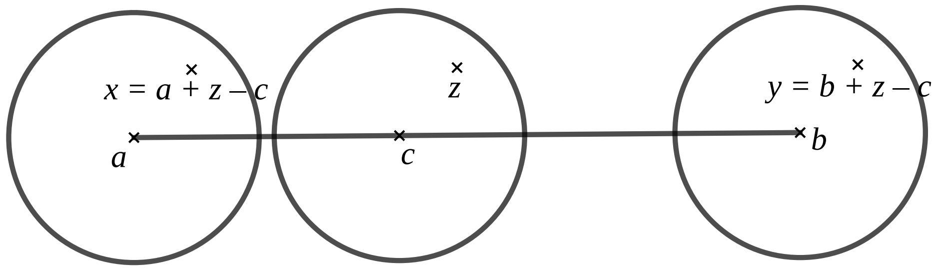
Soit $(x,y) \in B(a,r) \times B(b,r)$. On a $\|x-a\| < r$, $\|y-b\| < r$ et :

$$\|tx + (1-t)y - c\| = \|t(x-a) + (1-t)(y-b)\| \leq t\|x-a\| + (1-t)\|y-b\| < tr + (1-t)r = r.$$

Donc, $tx + (1-t)y \in B(c,r)$ et ainsi : $\underline{A \subset B(c,r)}$.

Soit maintenant $z \in B(c,r)$.

On considère les vecteurs $x = a + z - c$ et $y = b + z - c$ comme sur le schéma ci-dessous :



On a :

$$\left.\begin{array}{l} \|x-a\| = \|a+z-c-a\| = \|z-c\| < r \quad \Rightarrow \quad x \in B(a,r) \\ \|y-b\| = \|b+z-c-b\| = \|z-c\| < r \quad \Rightarrow \quad y \in B(b,r) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad tx + (1-t)y \in A.$$

Or :

$$tx + (1-t)y = t(a+z-c) + (1-t)(b+z-c) = ta + (1-t)b + t(z-c) + (1-t)(z-c) = c + z - c = z.$$

Donc, $z \in A$ et ainsi : $\underline{B(c,r) \subset A}$.

Finalement, on a bien :

$$\underline{A = B(c,r)}.$$

En résumé, on vient de prouver que pour tout $t \in [0,1]$, il existe un réel $r > 0$ tel que $B\big(ta + (1-t)b, r\big) \subset C$, autrement dit, pour tout $t \in [0,1]$, $ta + (1-t)b \in \overset{\circ}{C}$.

Donc, pour tous $a, b \in \overset{\circ}{C}$, $[a,b] \subset \overset{\circ}{C}$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\overset{\circ}{C} \text{ est convexe.}}$$

Remarquons que dans ce qui précède, la seule inclusion $B(c,r) \subset A(\subset C)$ *permettait de conclure.*

Exercice 7

1) Comme on a bien lu l'énoncé jusqu'au bout, on a repéré la question 7.a. que l'on résout maintenant.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $A=(a_{i,j})$ et $B=(b_{i,j})$.

Si on pose $AB=(c_{i,j})$, on a $\|AB\|_\infty = \max_{(i,j)\in [\![1,n]\!]^2} |c_{i,j}|$ et pour tout $(i,j)\in [\![1,n]\!]^2$:

$$|c_{i,j}| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right| \le \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}||b_{k,j}| \le \sum_{k=1}^{n} \|A\|_\infty.\|B\|_\infty = n.\|A\|_\infty.\|B\|_\infty .$$

Donc :

$$\|AB\|_\infty \le n.\|A\|_\infty.\|B\|_\infty .$$

Si on pose maintenant pour tout $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\| = n.\|A\|_\infty$, $A\mapsto \|A\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car $A\mapsto\|A\|_\infty$ en est une et $n>0$. On a de plus, pour tout $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\|AB\| = n.\|AB\|_\infty \le n\left(n.\|A\|_\infty.\|B\|_\infty\right) = \left(n.\|A\|_\infty\right)\left(n.\|B\|_\infty\right) = \|A\|.\|B\| .$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe bien une norme } \|\,.\,\| \text{ de } E \text{ telle que pour toutes } A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|AB\|\le\|A\|.\|B\| .}$$

2) Soit $A\in E$. Une récurrence immédiate permet de prouver que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\|A^k\|\le\|A\|^k$.

Or, si $\|A\|<1$, on a $\|A\|^k\to 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\|A^k\|\to 0$ et ainsi :

$$\boxed{\|A\|<1 \ \Rightarrow\ A^k \to 0_n}$$

Comme $\|AB\|\le\|A\|.\|B\|$ pour toutes matrices *A* et *B*, si on prend $A=B=I_n$, on obtient $\|I_n\|\le\|I_n\|^2$ et comme $\|I_n\|>0$ (car I_n n'est pas nulle), on a $\|I_n\|\ge 1$.

- Si on prend $A=I_n$, on a $\|A\|\ge 1$ et la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ (qui est constante) converge vers I_n.
- Si on prend $A=2I_n$, on a $\|A\|=2\|I_n\|\ge 1$ et $\lim_{k\to+\infty}\|A^k\| = \lim_{k\to+\infty} 2^k\|I_n\| = +\infty$, donc $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.
- Si on prend $A=\alpha N$ avec *N* nilpotente et $\alpha\ge\dfrac{1}{\|N\|}$, on a $\|A\|=\alpha\|N\|\ge 1$ et $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ (qui est nulle à partir d'un certain rang) converge vers 0_n.

Ces trois exemples permettent de conclure que :

$$\boxed{\text{Si } \|A\|\ge 1, \text{ on ne peut pas conclure quant à la limite de } (A^k)_{k\in\mathbb{N}} .}$$

3) Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $S_n(\mathbb{R})$ (*resp.* $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$), avec pour tout $k\in\mathbb{N}$, $A_k=(a_{k,i,j})$, qui converge vers $A=(a_{i,j})$. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, on a convergence coefficient par coefficient, donc pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$, $a_{k,i,j}\to a_{i,j}$ et $a_{k,j,i}\to a_{j,i}$. Or, $a_{k,j,i}=a_{k,i,j}$ (*resp.* $a_{k,j,i}=-a_{k,i,j}$), donc en passant à la limite quand $k\to+\infty$, on obtient $a_{j,i}=a_{i,j}$ (*resp.* $a_{j,i}=-a_{i,j}$) et ceci, pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$.

Ainsi, A est symétrique (*resp.* A est antisymétrique), donc :

$$\boxed{\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \text{ sont fermés dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

D'une part, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est fermé donc :

$$M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

D'autre part, $(A^2)^\top = (A^\top)^2 = (-A)^2 = A^2$, donc $A^2 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^{2k} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A^{2k} \to M$, donc, comme $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est fermé :

$$M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

Ainsi, $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{0_n\}$, soit $M = 0_n$ et finalement :

$$\boxed{\text{Si } A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \text{, la seule limite possible de la suite } (A^k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est } 0_n.}$$

4) On a $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = \left\{A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2,\ a_{i,j} > 0\right\}$. On a alors :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = \left\{A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \exists (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2,\ a_{i,j} \leq 0\right\}.$$

Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ convergeant vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k = (a_{k,i,j})$ et $A = (a_{i,j})$. On a :

$$A_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} A \iff \forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2,\ a_{k,i,j} \xrightarrow[k\to+\infty]{} a_{i,j}.$$

Comme les matrices A_k possèdent toutes n^2 coefficients, il existe $(i_0, j_0) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2$ et une suite extraite $(A_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{\varphi(k),i_0,j_0} \leq 0$ et :

$$a_{i_0,j_0} = \lim_{k\to+\infty} a_{k,i_0,j_0} = \lim_{k\to+\infty} a_{\varphi(k),i_0,j_0} \leq 0.$$

Ainsi, il existe $(i_0, j_0) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2$ tel que $a_{i_0,j_0} \leq 0$ et donc $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

Ceci prouve que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ est fermé, donc que :

$$\boxed{\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \text{ est un ouvert de } E.}$$

5) La trace est une forme linéaire sur E, donc l'ensemble des matrices de trace nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un hyperplan H de E. Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de H convergeant vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k = (a_{k,i,j})$ et $A = (a_{i,j})$. On a :

$$A_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} A \iff \forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2,\ a_{k,i,j} \xrightarrow[k\to+\infty]{} a_{i,j}.$$

Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k \in H$, on a $\sum_{i=1}^{n} a_{k,i,i} = 0$ et en passant à la limite quand $k \to +\infty$, on obtient :

$$\lim_{k \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} a_{k,i,i} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = 0.$$

Donc, $A \in H$ et H est fermé.

Soit M une éventuelle matrice de l'intérieur de H. Il existe alors une boule ouverte B de centre M et de rayon r incluse dans H. Alors, si on pose $N = M + \dfrac{r}{2\|E_{1,1}\|} E_{1,1}$ où $E_{1,1}$ est la première matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\|N - M\| = \dfrac{r}{2} < r$, donc $N \in B \subset H$.

Or, H est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc si N et M sont dans H, alors $E_{1,1} = \dfrac{2\|E_{1,1}\|}{r}(N - M) \in H$. Ceci est absurde car $Tr(E_{1,1}) = 1 \neq 0$ donc $E_{1,1} \notin H$. Ainsi, l'existence d'un élément de l'intérieur de H mène à une absurdité, donc H est d'intérieur vide et, finalement :

$$\boxed{\text{L'ensemble des matrices de trace nulle de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est fermé, d'intérieur vide.}}$$

6) En remplaçant $a_{i,j} \leq 0$ par $0 \leq a_{i,j} \leq 1$, on démontre exactement comme dans la question 4 que $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée de E.

De plus, pour tout $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_\infty$ est l'un des coefficients de A, donc $\|A\|_\infty \in [0,1]$ et ainsi, $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de E.

Enfin, soient $A, B \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ avec $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$, et $\lambda \in [0,1]$.

On a $\lambda \geq 0$ et $1 - \lambda \geq 0$, donc, pour tout $(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2$:

$$\begin{cases} 0 \leq a_{i,j} \leq 1 \\ 0 \leq b_{i,j} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \lambda a_{i,j} \leq \lambda \\ 0 \leq (1-\lambda) b_{i,j} \leq 1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow 0 \leq \lambda a_{i,j} + (1-\lambda) b_{i,j} \leq 1.$$

Les $\lambda a_{i,j} + (1-\lambda) b_{i,j}$ étant les coefficients de $\lambda A + (1-\lambda) B$, on a $\lambda A + (1-\lambda) B \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ et donc, $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ est une partie convexe de E. Finalement :

$$\boxed{\mathcal{Y}_n(\mathbb{R}) \text{ est une partie convexe, fermée et bornée de } E.}$$

7) a. On l'a fait plus haut.

b. Une récurrence immédiate permet de prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\|A^k\|_\infty \leq n^{k-1}.\|A\|_\infty^k$.

On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = (a_{k,i,j})$. On a alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2$:

$$\forall k \in \llbracket 1,p \rrbracket,\ |a_{k,i,j}| \leq \|A^k\|_\infty \leq n^{k-1}.\|A\|_\infty^k \Rightarrow \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}|a_{k,i,j}| \leq |a_{0,i,j}| + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} n^{k-1}.\|A\|_\infty^k.$$

Or, $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} n^{k-1}.\|A\|_\infty^k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} \frac{\left(n.\|A\|_\infty\right)^k}{k!}$ et la série exponentielle $\displaystyle\sum \frac{\left(n.\|A\|_\infty\right)^k}{k!}$ converge. La série $\displaystyle\sum \frac{1}{k!} a_{k,i,j}$ est alors absolument convergente, donc convergente.

Comme pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A_p = \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} a_{k,i,j} \right)_{(i,j)\in [\![1,n]\!]^2}$ et toutes les suites $\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} a_{k,i,j} \right)_{p\in\mathbb{N}}$ convergent :

$$\boxed{\text{La suite } (A_p)_{p\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

c. Soit $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

En posant $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $A = aI_2 + N$, avec $N^2 = 0_2$ donc $N^k = 0_2$ pour tout entier $k \geq 2$.

Comme I_2 et N commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton, soit pour tout entier $p \geq 2$:

$$A^p = (aI_2 + N)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (aI_2)^{p-k} N^k = \binom{p}{0} (aI_2)^p + \binom{p}{1} (aI_2)^{p-1} N = a^p I_2 + pa^{p-1} N .$$

Remarquons que cette formule reste valable pour $p = 0$ (en prenant ici $a^0 = 1$ même quand $a = 0$) et $p = 1$.

Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} A_p &= \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} (a^k I_2 + ka^{k-1} N) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} a^k I_2 + \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} ka^{k-1} N \\ &= \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{a^k}{k!} \right) I_2 + \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} \right) N = \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{a^k}{k!} \right) I_2 + \left(\sum_{k=0}^{p-1} \frac{a^k}{k!} \right) N \end{aligned}$$

Et donc :

$$\exp(A) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} \right) I_2 + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} \right) N = e^a (I_2 + N) .$$

Soit :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \exp(A) = \begin{pmatrix} e^a & e^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix}}$$

Soit $A = diag(a_1, \ldots, a_n)$ avec $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On a alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p = diag(a_1^p, \ldots, a_n^p)$ et :

$$A_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} diag(a_1^k, \ldots, a_n^k) = diag\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{a_1^k}{k!}, \ldots, \sum_{k=0}^{p} \frac{a_n^k}{k!} \right).$$

Donc :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k = diag\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_1^k}{k!}, \ldots, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_n^k}{k!} \right).$$

Soit :

$$\boxed{A = diag(a_1, \ldots, a_n) \quad \Rightarrow \quad \exp(A) = diag(e^{a_1}, \ldots, e^{a_n})}$$

Exercice 8

1) On a $a_0 = \inf\limits_{P \in E_0} N(P)$ où E_0 est l'ensemble des polynômes constants et unitaires, soit $E_0 = \{1\}$.

Ainsi, $a_0 = N(1)$, soit :

$$\boxed{a_0 = 1}$$

On a $a_1 = \inf\limits_{P \in E_1} N(P)$ où E_1 est l'ensemble des polynômes de degré 1 et unitaires, soit $E_0 = \{X - a,\ a \in \mathbb{R}\}$.

Or, pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$N(X-a) = \sup_{t\in[0,1]} |t-a| = \begin{cases} \sup\limits_{t\in[0,1]} |t-a| = 1-a & a \leq \dfrac{1}{2} \\ \sup\limits_{t\in[0,1]} |t-a| = a & a \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Or :

$$\begin{cases} a \leq \dfrac{1}{2} & \Rightarrow & N(P) \geq \dfrac{1}{2} \\ a = \dfrac{1}{2} & \Rightarrow & N(P) = \dfrac{1}{2} \\ a \geq \dfrac{1}{2} & \Rightarrow & N(P) \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{a_1 = \frac{1}{2}}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $P \in E_n$, $N(P) \geq 0$, donc :

$$\boxed{a_n = \inf_{P \in E_n} N(P) \geq 0}$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $P \in E_n$, on a $X\,P \in E_{n+1}$ et :

$$\forall\, t \in [0,1],\ |tP(t)| = t\,|P(t)| \leq |P(t)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |P(x)| = N(P) \quad \Rightarrow \quad N(X\,P) = \sup_{x\in[0,1]} |x\,P(x)| \leq N(P).$$

Or, $X\,P \in E_{n+1}$ donc $a_{n+1} = \inf\limits_{Q \in E_{n+1}} N(Q) \leq N(X\,P)$ et ainsi :

$$\forall\, P \in E_n,\ a_{n+1} \leq N(P) \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} \leq \inf_{P\in E_n} N(P) = a_n\,.$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{\text{La suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

On a vu que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. Comme elle est décroissante, elle converge, et toute suite extraite converge vers la même limite.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P = [X(X-1)]^n$. On a $P \in E_{2n}$ et pour tout $t \in [0,1]$:

$$|P(t)| = [t(1-t)]^n\,.$$

Or, sur $[0,1]$, $t \mapsto t(1-t) = t - t^2$ admet $\frac{1}{4}$ pour maximum, atteint en $\frac{1}{2}$, donc :

$$N(P) = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)| = \frac{1}{4^n}.$$

Et comme $P \in E_{2n}$, on a :

$$a_{2n} = \inf_{Q\in E_{2n}} N(Q) \le N(P) = \frac{1}{4^n}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

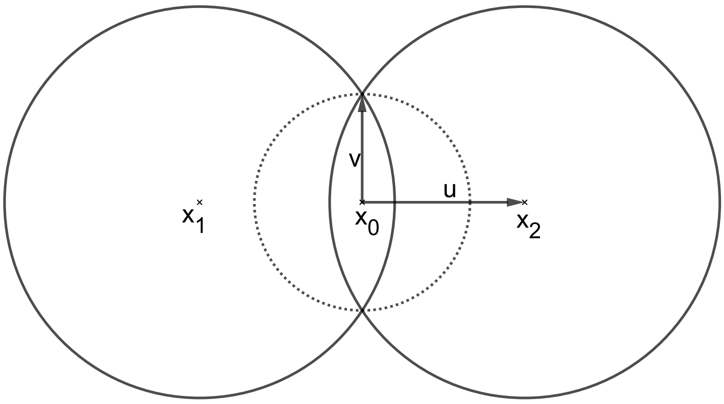
$$0 \le a_{2n} \le \frac{1}{4^n}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4^n} = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = 0$ et donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0}$$

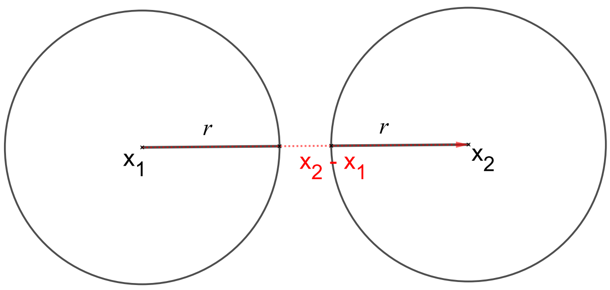
Exercice 9

1) Commençons par faire un dessin en dimension 2 :

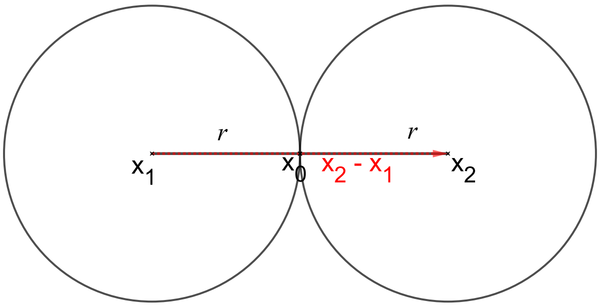


Posons $x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ et $u = x_2 - x_0 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$.

Si $\|x_2 - x_1\| > 2r$, soit $\|u\| > r$ (comme sur la figure ci-dessous), on a $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, donc toutes les boules contiennent $B_1 \cap B_2$ et $r_{\min} = 0$.



Si $\|x_2-x_1\|=2r$, soit $\|u\|=r$ (comme sur la figure ci-dessous), on a $B_1\cap B_2=\{x_0\}$, donc toutes les boules de centre x_0 contiennent $B_1\cap B_2$ et $r_{\min}=0$.



Si $\|x_2-x_1\|<2r$, soit $\|u\|<r$ (comme sur la figure ci-dessous), on est dans la situation du premier dessin.

Soit $x\in B_1\cap B_2$ et posons $v=x-x_0$. On a :

$$\|x-x_1\|=\|x_0+v-x_1\|=\|v+u\|\le r$$
$$\|x-x_2\|=\|x_0+v-x_2\|=\|v-u\|\le r$$

Alors, l'identité du parallélogramme donne :

$$2\left(\|v\|^2+\|u\|^2\right)=\|v+u\|^2+\|v-u\|^2\le 2r^2 \quad\Rightarrow\quad \|v\|^2\le r^2-\|u\|^2.$$

Rappelons qu'ici $\|u\|<r$, donc $\rho=\sqrt{r^2-\|u\|^2}$ est défini et strictement positif et ainsi, pour tout $x\in B_1\cap B_2$, on a $\|x-x_0\|=\|v\|\le\rho$, donc $x\in\bar{B}(x_0,\rho)$. Ceci permet de conclure que :

$$B_1\cap B_2\subset\bar{B}(x_0,\rho) \text{ avec } \rho=\sqrt{r^2-\left\|\frac{1}{2}(x_2-x_1)\right\|^2}.$$

Soit maintenant une boule $\bar{B}(z,R)$ contenant $B_1\cap B_2$.

Considérons un vecteur v, orthogonal à u et tel que $\|v\|=\rho$ et posons $x=x_0+v$ et $x'=x_0-v$.

On a :

$$x-x_1=x_0-x_1+v=v+u \quad\Rightarrow\quad \|x-x_1\|^2=\|v+u\|^2=\|v\|^2+\|u\|^2=\rho^2+\|u\|^2=r^2.$$

Donc, $\|x-x_1\|=r$ et $x\in B_1$.

Avec $x-x_1=v-u$, on a de même $x\in B_2$ (avec $x-x_1=v-u$) donc :

$$x\in B_1\cap B_2\subset\bar{B}(z,R).$$

Alors, avec $\|x-x_0\|=\|v\|=\rho$:

$$\|x-z\|^2=\|x-x_0+x_0-z\|^2=\|x-x_0\|^2+\|x_0-z\|^2+2(x-x_0\,|\,x_0-z)=\rho^2+\|x_0-z\|^2+2(x-x_0\,|\,x_0-z)\le R^2.$$

Donc :

$$\rho^2\le R^2-\|x_0-z\|^2-2(x-x_0\,|\,x_0-z)\le R^2-2(x-x_0\,|\,x_0-z)=R^2-2(v\,|\,x_0-z).$$

On prouve de même que $x'\in B_1\cap B_2\subset\bar{B}(z,R)$ et, avec $\|x'-x_0\|=\|-v\|=\rho$, on obtient :

$$\rho^2\le R^2-2(x'-x_0\,|\,x_0-z)=R^2+2(v\,|\,x_0-z).$$

Ainsi, $\rho^2 - R^2 \leq 2(v \mid x_0 - z)$ et $\rho^2 - R^2 \leq -2(v \mid x_0 - z)$, ce qui prouve que $\rho^2 - R^2 \leq 0$ et donc que $\rho \leq R$.

Finalement, le rayon de toute boule qui contient $B_1 \cap B_2$ est supérieur ou égal ρ, qui est lui-même le rayon d'une boule contenant $B_1 \cap B_2$. Ceci prouve que :

$$r_{\min} = \rho = \sqrt{r^2 - \left\|\frac{1}{2}(x_2 - x_1)\right\|^2}.$$

En définitive :

$$\boxed{r_{\min} = \begin{cases} \sqrt{r^2 - \left\|\frac{1}{2}(x_2 - x_1)\right\|^2} & \text{quand } \left\|\frac{1}{2}(x_2 - x_1)\right\| < r \\ 0 & \text{quand } \left\|\frac{1}{2}(x_2 - x_1)\right\| \geq r \end{cases}}$$

2) Notons $\mathbb{B}$ l'ensemble des rayons des boules fermées de E qui contiennent K.

Comme la partie K est compacte, elle est bornée, donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in K$, $\|x\| \leq M$. Ceci veut dire que $K \subset \overline{B}(0, M)$ et donc que $M \in \mathbb{B}$. Ainsi, $\mathbb{B}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}_+$ (minorée par 0), donc $\mathbb{B}$ admet une borne inférieure. Ainsi :

$$\boxed{r = \inf \mathbb{B} \text{ existe bien.}}$$

3) Soit un réel $t > 0$.

Comme $r = \inf \mathbb{B}$ (avec les notations de la question précédente), il existe $r' \in [r, r+t[$ tel que $r' \in \mathbb{B}$, donc il existe $c \in E$ tel que $K \subset \overline{B}(c, r')$. Comme $\overline{B}(c, r') \subset \overline{B}(c, r+t)$, on a $K \subset \overline{B}(c, r+t)$.

Par ailleurs, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = r$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, on a $|r_n - r| \leq t$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K \subset B_n$, donc $r_n \in \mathbb{B}$ et $r \leq r_n$. Ainsi, pour tout entier $n \geq N$, on a $r \leq r_n \leq r + t$ et :

$$K \subset \overline{B}(x_n, r_n) \subset \overline{B}(x_n, r+t).$$

Alors, on a $K \subset \overline{B}(c, r+t)$ et $K \subset \overline{B}(x_n, r+t)$, donc $K \subset \overline{B}(c, r+t) \cap \overline{B}(x_n, r+t)$ et d'après la question 1 :

$$K \subset \overline{B}\left(\frac{1}{2}(c + x_n), \rho\right) \text{ avec } \rho = \sqrt{(r+t)^2 - \left\|\frac{1}{2}(c - x_n)\right\|^2}.$$

Donc, $\rho \in \mathbb{B}$, ce qui implique que $r \leq \rho$, soit :

$$r^2 \leq \rho^2 = (r+t)^2 - \left\|\frac{1}{2}(c - x_n)\right\|^2 \quad \Rightarrow \quad \|c - x_n\| \leq 2\sqrt{(r+t)^2 - r^2}.$$

Alors, pour tous $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $k > n \geq N$, on a :

$$\|x_k - x_n\| = \|x_k - c + c - x_n\| \leq \|c - x_k\| + \|c - x_n\| \leq 4\sqrt{(r+t)^2 - r^2}.$$

Comme ceci est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k > n$, $z_n = \sup\limits_{k > n} \|x_k - x_n\|$ existe bien et :

$$0 \leq z_n \leq 4\sqrt{(r+t)^2 - r^2}.$$

Enfin, $\lim_{t \to 0}\left[4\sqrt{(r+t)^2 - r^2}\right] = 0$, donc pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $t > 0$ tel que $4\sqrt{(r+t)^2 - r^2} \leq \varepsilon$.

Finalement, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, $0 \leq z_n \leq \varepsilon$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} z_n = 0}$$