Corrigés des TD du chapitre 17

Exercice 1

1) Les deux colonnes de A sont orthogonales quel que soit a, donc A est orthogonale si et seulement si ses deux colonnes sont de norme 1, soit :

$$(a^2-1)^2+a^2=1 \quad \Leftrightarrow \quad a^4-a^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=-1 \text{ ou } 0 \text{ ou } 1.$$

Ainsi :

$$\boxed{A\in O(2) \text{ pour } a\in\{-1,0,1\}.}$$

2) Pour $a=0$, on a $A=-I_2$ qui est la matrice de la rotation d'angle π.

Pour $a=1$, on a $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est la matrice de la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Pour $a=-1$, on a $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est la matrice de la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 2

Considérons $\vec{u}\,'$ un vecteur unitaire du plan orienté $\mathbb{R}^2$, directement orthogonal à $\vec{u}$.

La famille $(\vec{u},\vec{u}\,')$ est alors une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$. Si α est l'angle orienté entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

$$\vec{v}=\cos\alpha\,\vec{u}+\sin\alpha\,\vec{u}\,'.$$

En posant $s=p+q-2p\circ q$, on a :

$$\begin{aligned}
s(\vec{u}) &= p(\vec{u})+q(\vec{u})-2p\big(q(\vec{u})\big)=\vec{u}+\cos\alpha\,\vec{v}-2p(\cos\alpha\,\vec{v})=\vec{u}+\cos\alpha\,\vec{v}-2\cos\alpha\, p(\vec{v})\\
&=(1-2\cos^2\alpha)\,\vec{u}+\cos\alpha\,\vec{v}=(1-2\cos^2\alpha)\,\vec{u}+\cos^2\alpha\,\vec{u}+\cos\alpha\sin\alpha\,\vec{u}\,'=\sin^2\alpha\,\vec{u}+\cos\alpha\sin\alpha\,\vec{u}\,'\\
&=\sin\alpha\,(\sin\alpha\,\vec{u}+\cos\alpha\,\vec{u}\,')\\
s(\vec{u}\,') &= p(\vec{u}\,')+q(\vec{u}\,')-2p\big(q(\vec{u}\,')\big)=\sin\alpha\,\vec{v}-2p(\sin\alpha\,\vec{v})=\sin\alpha\,\vec{v}-2\sin\alpha\, p(\vec{v})\\
&=\sin\alpha\,\vec{v}-2\sin\alpha\cos\alpha\,\vec{u}=\sin\alpha\,(\cos\alpha\,\vec{u}+\sin\alpha\,\vec{u}\,'-2\cos\alpha\,\vec{u})\\
&=\sin\alpha\,(-\cos\alpha\,\vec{u}+\sin\alpha\,\vec{u}\,')
\end{aligned}$$

La matrice de s dans la base orthonormée $(\vec{u},\vec{u}\,')$ est alors :

$$A=\sin\alpha\begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}=\left(\sin\alpha\, I_2\right)\begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) & -\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) & \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\boxed{s=p+q-2p\circ q \text{ est la composée de la rotation d'angle } \dfrac{\pi}{2}-\alpha \text{ et de l'homothétie de rapport } \sin\alpha.}$$

Exercice 3

1) On a $|tr(A)| = |a+d| < 2$ et $\det A = ad - bc = 1$.

Si $bc = 0$, alors $ad = 1$ et en posant $s = a+d$, on a $\begin{cases} a+d = s \\ ad = 1 \end{cases}$, donc a et d sont les racines (réelles) de $X^2 - sX + 1$. Or, le discriminant de ce trinôme est $\Delta = s^2 - 4$ et comme $|s| = |a+d| < 2$, on a $s^2 < 4$ et $\Delta < 0$. Ainsi, $X^2 - sX + 1$ n'admet pas de racine réelle, ce qui est absurde car a et d sont racines réelles du trinôme.

Ainsi :

$$\boxed{bc \neq 0}$$

2) Remarquons déjà que si A est la matrice d'une rotation vectorielle dans une base $\mathcal{B}$, alors elle l'est dans toute base obtenue par rotation de $\mathcal{B}$ (d'un angle quelconque). Ainsi, pour trouver une éventuelle base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ dans laquelle A est la matrice d'une rotation, on peut choisir le premier vecteur.

Soit alors $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, avec $e_1 = (1,0)$, une éventuelle base dans laquelle A est la matrice d'une rotation r, d'angle θ.

On a alors $A = M_{\mathcal{B}}(r)$ et dans une base orthonormée $\mathcal{B}_o$, on a $M_{\mathcal{B}_o}(r) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Comme la trace est invariante par changement de base, on a :

$$tr\left(M_{\mathcal{B}_o}(r)\right) = tr(A) = 2\cos\theta = a+d\,.$$

Comme $|tr(A)| = |a+d| < 2$, on a $-1 < \dfrac{a+d}{2} < 1$, il existe un unique $\theta \in \,]0,\pi[$ tel que $\cos\theta = \dfrac{a+d}{2}$.

Ainsi, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est la matrice de la rotation d'angle θ dans $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et on a :

$$\begin{cases} \|r(e_1)\|^2 = \|e_1\|^2 \\ \|r(e_2)\|^2 = \|e_2\|^2 \\ \left(e_1 \mid r(e_1)\right) = \|e_1\|.\|r(e_1)\|.\cos\theta = \|e_1\|^2 \dfrac{a+d}{2} \\ \left(e_2 \mid r(e_2)\right) = \|e_2\|.\|r(e_2)\|.\cos\theta = \|e_2\|^2 \dfrac{a+d}{2} \end{cases}$$

Or, $r(e_1) = ae_1 + ce_2$ et $r(e_2) = be_1 + de_2$, donc :

$$\begin{cases} \|r(e_1)\|^2 = \|ae_1 + ce_2\|^2 = a^2\|e_1\|^2 + 2ac\left(e_1 \mid e_2\right) + c^2\|e_2\|^2 \\ \|r(e_2)\|^2 = \|be_1 + de_2\|^2 = b^2\|e_1\|^2 + 2bd\left(e_1 \mid e_2\right) + d^2\|e_2\|^2 \\ \left(e_1 \mid r(e_1)\right) = \left(e_1 \mid ae_1 + ce_2\right) = a\left(e_1 \mid e_1\right) + c\left(e_1 \mid e_2\right) = a\|e_1\|^2 + c\left(e_1 \mid e_2\right) \\ \left(e_2 \mid r(e_2)\right) = \left(e_2 \mid be_1 + de_2\right) = b\left(e_1 \mid e_2\right) + d\left(e_2 \mid e_2\right) = b\left(e_1 \mid e_2\right) + d\|e_2\|^2 \end{cases}$$

On obtient alors :

$$(S):\begin{cases} a^2\|e_1\|^2+2ac(e_1\mid e_2)+c^2\|e_2\|^2=\|e_1\|^2 \\ b^2\|e_1\|^2+2bd(e_1\mid e_2)+d^2\|e_2\|^2=\|e_2\|^2 \\ a\|e_1\|^2+c(e_1\mid e_2)=\|e_1\|^2\dfrac{a+d}{2} \\ b(e_1\mid e_2)+d\|e_2\|^2=\|e_2\|^2\dfrac{a+d}{2} \end{cases}$$

Des deux dernières équations, on tire :

$$\begin{cases} c(e_1\mid e_2)=-\|e_1\|^2\dfrac{a-d}{2} \\ b(e_1\mid e_2)=\|e_2\|^2\dfrac{a-d}{2} \end{cases}$$

Soit, avec $bc\neq 0$, donc $b\neq 0$ et $c\neq 0$:

$$(e_1\mid e_2)=-\|e_1\|^2\frac{a-d}{2c}=\|e_2\|^2\frac{a-d}{2b}.$$

Si ces deux égalités sont vérifiées, on a :

$$\begin{cases} a^2\|e_1\|^2+2ac(e_1\mid e_2)+c^2\|e_2\|^2=ad\|e_1\|^2+c^2\|e_2\|^2 \\ b^2\|e_1\|^2+2bd(e_1\mid e_2)+d^2\|e_2\|^2=b^2\|e_1\|^2+ad\|e_2\|^2 \end{cases}$$

Donc :

$$(S)\iff\begin{cases} ad\|e_1\|^2+c^2\|e_2\|^2=\|e_1\|^2 \\ b^2\|e_1\|^2+ad\|e_2\|^2=\|e_2\|^2 \\ (e_1\mid e_2)=-\|e_1\|^2\dfrac{a-d}{2c}=\|e_2\|^2\dfrac{a-d}{2b} \end{cases}\iff\begin{cases} (ad-1)\|e_1\|^2+c^2\|e_2\|^2=0 \\ b^2\|e_1\|^2+(ad-1)\|e_2\|^2=0 \\ (e_1\mid e_2)=-\|e_1\|^2\dfrac{a-d}{2c}=\|e_2\|^2\dfrac{a-d}{2b} \end{cases}$$

Avec $\det A=ad-bc=1$, on obtient $ad-1=bc$, donc :

$$(S)\iff\begin{cases} bc\|e_1\|^2+c^2\|e_2\|^2=0 \\ b^2\|e_1\|^2+bc\|e_2\|^2=0 \\ (e_1\mid e_2)=-\|e_1\|^2\dfrac{a-d}{2c}=\|e_2\|^2\dfrac{a-d}{2b} \end{cases}\iff\begin{cases} \|e_2\|^2=-\dfrac{b}{c}\|e_1\|^2 \\ (e_1\mid e_2)=-\dfrac{d-a}{2c}\|e_1\|^2 \end{cases}$$

Alors, si $e_1=(1,0)$ et $e_2=(\alpha,\beta)$, on a $\|e_1\|=1$ et :

$$(S)\iff\begin{cases} \alpha^2+\beta^2=-\dfrac{b}{c} \\ \alpha=-\dfrac{d-a}{2c} \end{cases}\iff\begin{cases} \alpha=-\dfrac{d-a}{2c} \\ \beta^2=-\dfrac{b}{c}-\left(\dfrac{d-a}{2c}\right)^2 \end{cases}$$

Enfin :

$$-\frac{b}{c}-\left(\frac{d-a}{2c}\right)^2=-\frac{4bc+(d-a)^2}{4c^2}=-\frac{4(ad-1)+a^2-2ad+d^2}{4c^2}=\frac{4-(a+d)^2}{4c^2}=\frac{4-4\cos^2\theta}{4c^2}=\left(\frac{\sin\theta}{c}\right)^2.$$

On peut donc prendre $e_2=\left(\dfrac{a-d}{2c},\dfrac{\sin\theta}{c}\right)$.

Réciproquement, si on note r la rotation d'angle $\theta \in]0, \pi[$ tel que $\cos\theta = \frac{a+d}{2}$, $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = \left(\frac{a-d}{2c}, \frac{\sin\theta}{c}\right)$, on vérifie aisément que :

- $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une base (car $\theta \in]0, \pi[$, donc $\sin\theta \neq 0$) ;
- $r(e_1) = ae_1 + ce_2$ et $r(e_2) = be_1 + de_2$, donc $A = M_{\mathcal{B}}(r)$.

Finalement :

$$\boxed{A \text{ est bien la matrice d'une rotation vectorielle dans une base bien choisie.}}$$

Exercice 4

1) Remarquons déjà que si l'un des vecteurs est nul, alors la relation est vraie car les deux membres valent 0.

On suppose que les quatre vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ ne sont pas nuls.

Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires, alors on peut écrire $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (car $\vec{a} \neq \vec{0}$) et :

- d'une part : $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$, donc $(\vec{a} \wedge \vec{b}).(\vec{c} \wedge \vec{d}) = 0$;
- d'autre part : $\begin{pmatrix} \vec{b}.\vec{c} \\ \vec{b}.\vec{d} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \vec{a}.\vec{c} \\ \vec{a}.\vec{d} \end{pmatrix}$, donc $\begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{c} & \vec{b}.\vec{c} \\ \vec{a}.\vec{d} & \vec{b}.\vec{d} \end{vmatrix} = 0$.

Ainsi, l'égalité est vraie aussi.

Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas colinéaires, quitte à diviser les deux côtés de l'égalité par $\|\vec{a}\|$ et $\|\vec{b}\|$ (non nulles), on peut supposer que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont unitaires. Notons $\vec{b}_1$ le vecteur unitaire du plan $\text{Vect}(\vec{a}, \vec{b})$ tel que $(\vec{a}, \vec{b}_1, \vec{a} \wedge \vec{b}_1)$ soit une base orthonormée de E. On a $\vec{b}(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$ dans cette base et :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge (\cos\alpha\, \vec{a} + \sin\alpha\, \vec{b}_1) = (\sin\alpha)\, \vec{a} \wedge \vec{b}_1 .$$

Si $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$ et $\vec{d}(d_1, d_2, d_3)$ dans cette base, alors la $3^{\text{ème}}$ composante de $\vec{c} \wedge \vec{d}$ dans $(\vec{a}, \vec{b}_1, \vec{a} \wedge \vec{b}_1)$ est $c_1 d_2 - d_1 c_2$, donc :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}).(\vec{c} \wedge \vec{d}) = \sin\alpha\, (\vec{a} \wedge \vec{b}_1).(\vec{c} \wedge \vec{d}) = \sin\alpha\, (c_1 d_2 - d_1 c_2) .$$

Par ailleurs :

$$\begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{c} & \vec{b}.\vec{c} \\ \vec{a}.\vec{d} & \vec{b}.\vec{d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{c} & (\cos\alpha\, \vec{a} + \sin\alpha\, \vec{b}_1).\vec{c} \\ \vec{a}.\vec{d} & (\cos\alpha\, \vec{a} + \sin\alpha\, \vec{b}_1).\vec{d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{c} & \cos\alpha\, \vec{a}.\vec{c} + \sin\alpha\, \vec{b}_1.\vec{c} \\ \vec{a}.\vec{d} & \cos\alpha\, \vec{a}.\vec{d} + \sin\alpha\, \vec{b}_1.\vec{d} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{c} & \sin\alpha\, \vec{b}_1.\vec{c} \\ \vec{a}.\vec{d} & \sin\alpha\, \vec{b}_1.\vec{d} \end{vmatrix} = \sin\alpha \begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{c} & \vec{b}_1.\vec{c} \\ \vec{a}.\vec{d} & \vec{b}_1.\vec{d} \end{vmatrix} = \sin\alpha \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} = \sin\alpha\, (c_1 d_2 - d_1 c_2) = (\vec{a} \wedge \vec{b}).(\vec{c} \wedge \vec{d})$$

Ainsi, dans tous les cas, on a bien :

$$\boxed{(\vec{a} \wedge \vec{b}).(\vec{c} \wedge \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{c} & \vec{b}.\vec{c} \\ \vec{a}.\vec{d} & \vec{b}.\vec{d} \end{vmatrix}}$$

2) Ici encore, si $\vec{a}$ est nul, la relation est vérifiée (les deux membres valent $\vec{0}$).

Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires, alors $(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}=\vec{0}\wedge\vec{c}=\vec{0}$ et on peut écrire $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$ (car $\vec{a}\neq\vec{0}$). D'où :

$$(\vec{a}.\vec{c})\,\vec{b}-(\vec{b}.\vec{c})\,\vec{a}=(\vec{a}.\vec{c})\,\lambda\vec{a}-(\lambda\vec{a}.\vec{c})\,\vec{a}=\lambda\left[(\vec{a}.\vec{c})\,\vec{a}-(\vec{a}.\vec{c})\,\vec{a}\right]=\vec{0}=(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}\;.$$

Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas colinéaires, alors $\left((\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}\right)\perp\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)$, donc $(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}\in\operatorname{Vect}(\vec{a},\vec{b})$ et :

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}\;.$$

D'après la première question, on a :

$$\left((\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}\right).\vec{a}=\left[\vec{a}\wedge\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right]=\left[\vec{c},\vec{a},\vec{a}\wedge\vec{b}\right]=(\vec{c}\wedge\vec{a}).(\vec{a}\wedge\vec{b})=(\vec{a}\wedge\vec{b}).(\vec{c}\wedge\vec{a})=\begin{vmatrix}\vec{a}.\vec{c} & \vec{b}.\vec{c}\\ \vec{a}.\vec{a} & \vec{b}.\vec{a}\end{vmatrix}=\Delta_1\,.$$

$$\left((\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}\right).\vec{b}=\left[\vec{a}\wedge\vec{b},\vec{c},\vec{b}\right]=\left[\vec{c},\vec{b},\vec{a}\wedge\vec{b}\right]=(\vec{c}\wedge\vec{b}).(\vec{a}\wedge\vec{b})=(\vec{a}\wedge\vec{b}).(\vec{c}\wedge\vec{b})=\begin{vmatrix}\vec{a}.\vec{c} & \vec{b}.\vec{c}\\ \vec{a}.\vec{b} & \vec{b}.\vec{b}\end{vmatrix}=\Delta_2\,.$$

Avec $(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$, on obtient le système :

$$\begin{cases}(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}).\vec{a}=(\vec{a}.\vec{a})\lambda+(\vec{a}.\vec{b})\mu=\Delta_1\\ (\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}).\vec{b}=(\vec{a}.\vec{b})\lambda+(\vec{b}.\vec{b})\mu=\Delta_2\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{pmatrix}\vec{a}.\vec{a} & \vec{a}.\vec{b}\\ \vec{a}.\vec{b} & \vec{b}.\vec{b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta_1\\ \Delta_2\end{pmatrix}$$

Et, à nouveau avec la première question, on a $\begin{vmatrix}\vec{a}.\vec{a} & \vec{a}.\vec{b}\\ \vec{a}.\vec{b} & \vec{b}.\vec{b}\end{vmatrix}=(\vec{a}\wedge\vec{b}).(\vec{a}\wedge\vec{b})=\left\|\vec{a}\wedge\vec{b}\right\|^2\neq 0$, car $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas colinéaires, donc le système est de Cramer et :

$$\begin{cases}\lambda=\dfrac{\Delta_1(\vec{b}.\vec{b})-\Delta_2(\vec{a}.\vec{b})}{(\vec{a}.\vec{a})(\vec{b}.\vec{b})-(\vec{a}.\vec{b})(\vec{a}.\vec{b})}=\dfrac{-(\vec{a}.\vec{a})(\vec{b}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{b})+(\vec{a}.\vec{b})(\vec{a}.\vec{b})(\vec{b}.\vec{c})}{(\vec{a}.\vec{a})(\vec{b}.\vec{b})-(\vec{a}.\vec{b})(\vec{a}.\vec{b})}=-(\vec{b}.\vec{c})\\ \mu=\dfrac{\Delta_1(\vec{a}.\vec{b})-\Delta_2(\vec{a}.\vec{a})}{(\vec{a}.\vec{b})(\vec{a}.\vec{b})-(\vec{a}.\vec{a})(\vec{b}.\vec{b})}=\dfrac{(\vec{a}.\vec{c})(\vec{a}.\vec{b})(\vec{a}.\vec{b})-(\vec{a}.\vec{a})(\vec{a}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{b})}{(\vec{a}.\vec{b})(\vec{a}.\vec{b})-(\vec{a}.\vec{a})(\vec{b}.\vec{b})}=(\vec{a}.\vec{c})\end{cases}$$

Ainsi, on obtient bien dans tous les cas :

$$\boxed{(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}=(\vec{a}.\vec{c})\,\vec{b}-(\vec{b}.\vec{c})\,\vec{a}}$$

3) On cherche les vecteurs $\vec{u}$ de E tels que $\vec{a}\wedge\vec{u}=\vec{b}$, avec $\vec{a}$ et $\vec{b}$ donnés.

Pour tout $\vec{u}\in E$, on a $(\vec{a}\wedge\vec{u})\perp\vec{a}$, donc si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas orthogonaux, l'équation n'a pas de solution.

On suppose désormais que $\vec{a}\perp\vec{b}$.

D'après la question précédente, on a pour tout $\vec{u}\in E$, $(\vec{a}\wedge\vec{u})\wedge\vec{a}=(\vec{a}.\vec{a})\,\vec{u}-(\vec{u}.\vec{a})\,\vec{a}$, donc :

$$\vec{a}\wedge\vec{u}=\vec{b}\quad\Rightarrow\quad(\vec{a}\wedge\vec{u})\wedge\vec{a}=(\vec{a}.\vec{a})\,\vec{u}-(\vec{u}.\vec{a})\,\vec{a}=\vec{b}\wedge\vec{a}\quad\Rightarrow\quad\vec{u}=\frac{1}{\left\|\vec{a}\right\|^2}\left[(\vec{u}.\vec{a})\vec{a}-\vec{a}\wedge\vec{b}\right].$$

Soit :

$$\vec{u}=\lambda\,\vec{a}-\frac{1}{\left\|\vec{a}\right\|^2}\,\vec{a}\wedge\vec{b}\;\text{ avec }\;\lambda=\frac{(\vec{u}.\vec{a})}{\left\|\vec{a}\right\|^2}\in\mathbb{R}\,.$$

Réciproquement, si $\vec{u}=\lambda\vec{a}-\frac{1}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a}\wedge\vec{b}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$, on a (avec $\vec{a}\perp\vec{b}$, donc $\vec{b}.\vec{a}=0$) :

$$\vec{a}\wedge\vec{u}=\vec{a}\wedge\left(\lambda\vec{a}-\frac{1}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a}\wedge\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}\wedge\vec{a}-\frac{1}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{b})=\frac{1}{\|\vec{a}\|^2}(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{a}=\frac{1}{\|\vec{a}\|^2}\left[(\vec{a}.\vec{a})\vec{b}-(\vec{b}.\vec{a})\vec{a}\right]=\vec{b}\,.$$

Donc, $\vec{u}$ vérifie bien $\vec{a}\wedge\vec{u}=\vec{b}$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Les solutions de } \vec{a}\wedge\vec{u}=\vec{b} \text{ sont les vecteurs } \vec{u}=\lambda\vec{a}-\frac{1}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a}\wedge\vec{b} \text{ avec } \lambda\in\mathbb{R}.}$$

Exercice 5

1) Soit $\vec{u}\in E$. On a $\vec{u}=p(\vec{u})+q(\vec{u})$ avec $p(\vec{u})\in D$ et $q(\vec{u})\in D^\perp$.

Si $\vec{u}\in D=\mathrm{Vect}(\vec{a})$, alors $r(\vec{u})=p(\vec{u})$, $q(\vec{u})=\vec{0}$ et $\vec{a}\wedge\vec{u}=\vec{0}$ (car $\vec{a}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires).

Si $\vec{u}\notin D$, alors $q(\vec{u})\neq\vec{0}$ et $q(\vec{u})\perp\vec{a}$, donc si on pose $\vec{e}_1=\vec{a}$, $\vec{e}_2=\frac{1}{\|q(\vec{u})\|}q(\vec{u})$ et $\vec{e}_3=\vec{e}_1\wedge\vec{e}_2$, la famille $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ est une base orthonormée directe de E ($\vec{a}$ est unitaire) adaptée à r.

Dans cette base, la matrice de r est :

$$M_{\mathcal{B}}(r)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta\\0&-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}.$$

Comme $\vec{u}=p(\vec{u})+q(\vec{u})=k\vec{a}+\|q(\vec{u})\|\frac{1}{\|q(\vec{u})\|}q(\vec{u})=k\vec{e}_1+\|q(\vec{u})\|\vec{e}_2$, on a alors :

$$\begin{aligned}r(\vec{u})&=k\vec{e}_1+\|q(\vec{u})\|\cos\theta\,\vec{e}_2+\|q(\vec{u})\|\sin\theta\,\vec{e}_3\\&=k\vec{a}+\|q(\vec{u})\|\cos\theta\frac{1}{\|q(\vec{u})\|}q(\vec{u})+\|q(\vec{u})\|\sin\theta(\vec{e}_1\wedge\vec{e}_2)\\&=p(\vec{u})+\cos\theta\,q(\vec{u})+\|q(\vec{u})\|\sin\theta\left(\vec{a}\wedge\frac{1}{\|q(\vec{u})\|}q(\vec{u})\right)\\&=p(\vec{u})+\cos\theta\,q(\vec{u})+\sin\theta\left(\vec{a}\wedge q(\vec{u})\right)\end{aligned}.$$

Or, comme $\vec{a}$ et $p(\vec{u})$ sont colinéaires, on a :

$$\vec{a}\wedge q(\vec{u})=\vec{a}\wedge\left[\vec{u}-p(\vec{u})\right]=\vec{a}\wedge\vec{u}-\vec{a}\wedge p(\vec{u})=\vec{a}\wedge\vec{u}\,.$$

Donc :

$$\boxed{r(\vec{u})=p(\vec{u})+\cos\theta\,q(\vec{u})+\sin\theta\left(\vec{a}\wedge\vec{u}\right)}$$

On peut encore modifier la formule ci-dessus en remarquant qu'avec l'écriture $\vec{u}=p(\vec{u})+q(\vec{u})=k\vec{a}+q(\vec{u})$ avec $q(\vec{u})\perp\vec{a}$ et $\vec{a}$ unitaire, on a $k=\vec{u}.\vec{a}$ et :

$$\begin{aligned}p(\vec{u})&=(\vec{u}.\vec{a})\,\vec{a}\\q(\vec{u})&=\vec{u}-p(\vec{u})=\vec{u}-(\vec{u}.\vec{a})\,\vec{a}\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} r(\vec{u}) &= (\vec{u}.\vec{a})\,\vec{a} + (\cos\theta)\left[\vec{u} - (\vec{u}.\vec{a})\,\vec{a}\right] + (\sin\theta)\,\vec{a}\wedge\vec{u} \\ &= (\vec{u}.\vec{a})(1-\cos\theta)\,\vec{a} + (\cos\theta)\,\vec{u} + (\sin\theta)\,\vec{a}\wedge\vec{u} \end{aligned}$$

Ceci nous donne donc une expression de $r(\vec{u})$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{a}$ et θ uniquement.

Si $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base orthonormale directe de *E*, notons $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$. On a alors :

$$\begin{aligned} r(\vec{i}) &= (\vec{i}.\vec{a})(1-\cos\theta)\,\vec{a} + (\cos\theta)\,\vec{i} + (\sin\theta)\,\vec{a}\wedge\vec{i} \\ &= a_1(1-\cos\theta)\,(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) + (\cos\theta)\,\vec{i} + (\sin\theta)\,(a_3\vec{j} - a_2\vec{k}) \\ &= \left[(1-\cos\theta)a_1^2 + \cos\theta\right]\vec{i} + \left[(1-\cos\theta)a_1a_2 + (\sin\theta)a_3\right]\vec{j} + \left[(1-\cos\theta)a_1a_3 - (\sin\theta)a_2\right]\vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(\vec{j}) &= (\vec{j}.\vec{a})(1-\cos\theta)\,\vec{a} + (\cos\theta)\,\vec{j} + (\sin\theta)\,\vec{a}\wedge\vec{j} \\ &= a_2(1-\cos\theta)\,(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) + (\cos\theta)\,\vec{j} + (\sin\theta)\,(a_1\vec{k} - a_3\vec{i}) \\ &= \left[(1-\cos\theta)a_1a_2 - (\sin\theta)a_3\right]\vec{i} + \left[(1-\cos\theta)a_2^2 + \cos\theta\right]\vec{j} + \left[(1-\cos\theta)a_2a_3 + (\sin\theta)a_1\right]\vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(\vec{k}) &= (\vec{k}.\vec{a})(1-\cos\theta)\,\vec{a} + (\cos\theta)\,\vec{k} + (\sin\theta)\,\vec{a}\wedge\vec{k} \\ &= a_3(1-\cos\theta)\,(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) + (\cos\theta)\,\vec{k} + (\sin\theta)\,(a_2\vec{i} - a_1\vec{j}) \\ &= \left[(1-\cos\theta)a_1a_3 + (\sin\theta)a_2\right]\vec{i} + \left[(1-\cos\theta)a_2a_3 - (\sin\theta)a_1\right]\vec{j} + \left[(1-\cos\theta)a_3^2 + \cos\theta\right]\vec{k} \end{aligned}$$

Ce qui donne la matrice de *r* dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$M_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(r) = \begin{pmatrix} (1-\cos\theta)a_1^2 + \cos\theta & (1-\cos\theta)a_1a_2 + (\sin\theta)a_3 & (1-\cos\theta)a_1a_3 - (\sin\theta)a_2 \\ (1-\cos\theta)a_1a_2 - (\sin\theta)a_3 & (1-\cos\theta)a_2^2 + \cos\theta & (1-\cos\theta)a_2a_3 + (\sin\theta)a_1 \\ (1-\cos\theta)a_1a_3 + (\sin\theta)a_2 & (1-\cos\theta)a_2a_3 - (\sin\theta)a_1 & (1-\cos\theta)a_3^2 + \cos\theta \end{pmatrix}$$

Rappelons que $a_1 = \vec{i}.\vec{a}$, $a_2 = \vec{j}.\vec{a}$ et $a_3 = \vec{k}.\vec{a}$ avec $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$ (car $\vec{a}$ est unitaire).

2) Soient $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base orthonormale directe de *E* et *r* une rotation d'axe *D* dirigé et orienté par un vecteur unitaire $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ et d'angle $\theta \in [0,\pi]$.

D'après ce qui précède, on a $M = M_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(r) = M_s + M_a$, avec :

$$M_s = \frac{1}{2}\left(M + {}^tM\right) = (1-\cos\theta)\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 \end{pmatrix} + \cos\theta\, I_3 \quad \text{et} \quad M_a = \frac{1}{2}\left(M - {}^tM\right) = \sin\theta\begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Si $M = I_3$, alors $\theta = 0$ et $r = id_E$.
- Si *M* est symétrique et $M \neq I_3$, alors $\sin\theta = 0$, donc $\theta = \pi$ $M = \begin{pmatrix} 2a_1^2 - 1 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & 2a_2^2 - 1 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & 2a_3^2 - 1 \end{pmatrix}$ et l'on retrouve facilement a_1, a_2, a_3 à partir des coefficients de *M*.
- Si *M* n'est pas symétrique, alors $\theta \in \,]0,\pi[$ et $Tr(M) = 1 + 2\cos\theta$ donne θ.

  Enfin, a_1, a_2, a_3 sont obtenus facilement à l'aide de $\dfrac{1}{2\sin\theta}\left(M - {}^tM\right) = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}$ donne.

3) Si r existe, alors son axe est $D = \text{Vect}(\vec{a})$ avec $\vec{a} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$ ($\vec{a}$ est unitaire).

Avec les notations des questions précédentes, on alors $a_1 = -a_2 = a_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et, si D est orienté par $\vec{a}$:

$$\begin{aligned} r(\vec{i}) &= \left[(1-\cos\theta)a_1^2 + \cos\theta\right]\vec{i} + \left[(1-\cos\theta)a_1a_2 + (\sin\theta)a_3\right]\vec{j} + \left[(1-\cos\theta)a_1a_3 - (\sin\theta)a_2\right]\vec{k} \\ &= \left[\frac{1}{3}(1-\cos\theta)a_1^2 + \cos\theta\right]\vec{i} + \left[-\frac{1}{3}(1-\cos\theta) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\right]\vec{j} + \left[\frac{1}{3}(1-\cos\theta) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\right]\vec{k} \end{aligned}$$

Donc :

$$r(\vec{i}) = -\vec{j} \iff \begin{cases} \frac{1}{3}(1-\cos\theta) + \cos\theta = 0 \\ -\frac{1}{3}(1-\cos\theta) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta = -1 \\ \frac{1}{3}(1-\cos\theta) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff \theta = -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi].$$

Ainsi, si r existe, elle est unique. Réciproquement, la rotation trouvée ci-dessus vérifie bien $r(\vec{u}) = \vec{u}$ (car $\vec{u}$ appartient à l'axe et $r(\vec{i}) = -\vec{j}$ car $\theta = -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ et on a raisonné par équivalences ci-dessus.

Finalement :

$$\boxed{\text{La seule rotation vérifiant } r(\vec{u}) = \vec{u} \text{ et } r(\vec{i}) = -\vec{j} \text{ est la rotation d'angle } \frac{2\pi}{3} \text{ et d'axe dirigée et orienté par } -\vec{u}.}$$

Exercice 6

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique et orienté par sa base canonique. Dire que A est une matrice de rotation revient à dire que l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A est une rotation.

Comme la base canonique est orthonormée directe, A est une matrice de rotation si et seulement si elle est orthogonale et de déterminant égal à 1, soit (avec $\det A = a^2 + b^2 + c^2 - 3abc$) :

$$\begin{cases} A^{\mathsf{T}}A = I_3 \\ \det A = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ ab + bc + ac = 0 \\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1 \end{cases}$$

Or, quels que soient a, b et c, on a :

$$\begin{aligned} &a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac) \\ &(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) = a^3 + b^3 + c^3 + (a+b+c)(ab+bc+ac) - 3abc \end{aligned}$$

Donc, si on pose $abc = p$, on a :

$$\begin{cases} A^{\mathsf{T}}A = I_3 \\ \det A = 1 \end{cases} \iff (S) : \begin{cases} a+b+c = 1 \\ ab+bc+ac = 0 \\ abc = p \end{cases} \quad \text{avec } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3.$$

De plus, quels que soient a, b et c, ce sont les racines de $(X-a)(X-b)(X-c)$ et :

$$(X-a)(X-b)(X-c) = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+bc+ac)X - abc.$$

Donc, a, b et c vérifient (S) si et seulement si ce sont les racines réelles de $X^3 - X^2 - p$.

Or, le tableau de variations de $f : x \mapsto x^3 - x^2 - p$ est :

x	$-\infty$	0	$2/3$	$+\infty$
f	$-\infty$ $\nearrow$	$-p$ $\searrow$	$-\frac{4}{27} - p$ $\nearrow$	$+\infty$

Alors $X^3 - X^2 - p$ admet trois racines réelles si et seulement si $-\dfrac{4}{27} - p \le 0 \le -p$, soit :

$$-\frac{4}{27} \le p \le 0.$$

Finalement :

$$\begin{cases} A^{\mathsf{T}} A = I_3 \\ \det A = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b+c=1 \\ ab+bc+ac=0 \\ -\dfrac{4}{27} \le abc \le 0 \end{cases} \quad \text{avec } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3.$$

Donc :

$$\boxed{A \text{ est la matrice d'une rotation } r \text{ si et seulement si } \begin{cases} a+b+c=1 \\ ab+bc+ac=0 \\ -\dfrac{4}{27} \le abc \le 0 \end{cases}}$$

Remarquons que pour $a=1$ et $b=c=0$, on a $A = I_3$. On suppose dans la suite que ce n'est pas le cas.

Les conditions ci-dessus étant remplies, appelons D l'axe de la rotation r et α son angle.

On a :

$$Tr(A) = 3a = 1 + 2\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{3a-1}{2}.$$

Cherchons $D = \ker(A - I_3)$, c'est-à-dire les vecteurs fixes par A. On a :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} ax+by+cz=x \\ cx+ay+bz=y \\ bx+cy+az=z \end{cases}$$

Remarquons que $a+b+c=1$, donc $\vec{e}\,(1,1,1)$ est solution et comme A est une matrice de rotation d'axe D (une droite), on a immédiatement $D = \text{Vect}(\vec{e})$.

Reste à orienter l'axe ou l'angle. Soit $\vec{v}\,(1,-1,0) \in D^{\perp}$. On a $r(\vec{v})\,(a-b, c-a, b-c)$, donc $\vec{v} \wedge r(\vec{v}) = (c-b)\vec{e}$.

Alors, si D est orienté par $\vec{e}$, l'angle de r est $\arccos\left(\dfrac{3a-1}{2}\right)$ quand $c-b>0$ et $-\arccos\left(\dfrac{3a-1}{2}\right)$ quand $c-b<0$. Reste à voir le cas où $b=c$.

Dans ce cas, on a $b=c\neq 0$ (sinon $A=I_3$) et :

$$\begin{cases} a+2b=1 \\ 2ab+b^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad a=-\frac{1}{3} \text{ et } b=\frac{2}{3} \text{ avec } b\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha=-1.$$

Donc, *r* est le retournement d'axe *D*.

Finalement :

L'axe de la rotation est $D=\text{Vect}(\vec{e})$ avec $\vec{e}(1,1,1)$.

Quand *D* est orienté par $\vec{e}$, l'angle de la rotation est :

- $\arccos\left(\frac{3a-1}{2}\right)$ quand $c-b>0$;
- $-\arccos\left(\frac{3a-1}{2}\right)$ quand $c-b<0$;
- π quand $b=c$.

Exercice 7

Appelons C et C' les centres respectifs de $O(E)$ et $SO(E)$. On a par définition :

$$C=\{s\in O(E)\setminus \forall\, u\in O(E),\ u\circ s=s\circ u\}$$

$$C'=\{r\in SO(E)\setminus \forall\, u\in SO(E),\ u\circ r=r\circ u\}$$

Comme l'application id_E commute avec tous les endomorphismes de *E*, elle appartient à C et à C', et l'application $-id_E$ appartient à C (*attention* : $-id_E\notin SO(E)$ car $\det(-id_E)=-1$, donc $-id_E\notin C'$).

Soit *r* une rotation de C' (il y en a, ne serait-ce que id_E). Elle commute avec toutes les rotations de *E*, donc pour tout $x\in E$ non nul, *r* commute avec r_x, le retournement d'axe dirigé par *x*.

On a donc $r_x\circ r(x)=r\circ r_x(x)$ et comme $r_x(x)=x$, on obtient $r_x\big(r(x)\big)=r(x)$. Ainsi, $r(x)$ appartient à l'axe de r_x, donc est colinéaire à *x*. Comme, les deux vecteurs sont de même norme, on obtient finalement pour tout :

$$\forall\, x\in E,\ r(x)=x \ \ ou \ \ r(x)=-x.$$

Comme $-id_E\notin SO(E)$, on a $r\neq -id_E$ donc il existe un vecteur non nul x_1 de *E* tel que $r(x_1)=x_1$.

Supposons qu'il existe $x_2\in E$ non nul tel que $r(x_2)=-x_2$. Alors, $r(x_1+x_2)=r(x_1)+r(x_2)=x_1-x_2$, mais d'après ce qui précède :

- soit $r(x_1+x_2)=x_1+x_2$, ce qui implique $x_2=0$: absurde ;
- soit $r(x_1+x_2)=-(x_1+x_2)=-x_1-x_2$, ce qui implique $x_1=0$: absurde.

Ainsi, il n'existe pas de vecteur non nul transformé en son opposé et donc $r=id_E$.

Finalement, on a :

$$\boxed{C'=\{id_E\}}$$

Soit $s \in C$.

- Si s est une rotation, alors comme elle commute avec toutes les isométries de E, y compris les rotations, donc elle appartient à C', soit $s = id_E$.
- Si s est une réflexion par rapport à un plan P, alors pour tout $x \in P^\perp$ et pour tout $u \in O(E)$, on a :

$$s \circ u(x) = u \circ s(x) \quad \Leftrightarrow \quad s\big(u(x)\big) = u(-x) = -u(x).$$

  Donc $u(x) \in P^\perp$. Ceci prouve que $P^\perp$ est stable par toutes les isométries de E, ce qui est absurde (pour s'en convaincre, il suffit de considérer une rotation d'axe dirigé par un vecteur de P et d'angle $\pi/2$). Ainsi, C ne contient pas de réflexion.
- Si s est la composée commutative d'une rotation r d'axe D et d'angle α par une réflexion σ par rapport au plan $D^\perp$, alors, la matrice de s dans une base orthonormée appropriée est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

  Et pour tout $M \in O(3)$, on a $AM = MA$. En posant, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $M^{\mathsf{T}} M = I_3$ donc $M \in O(3)$ et :

$$AM = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} = MA = \begin{pmatrix} 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

  Donc $\cos\alpha = -1$ et $\sin\alpha = 0$, soit $A = -I_3$ et donc $s = -id_E$.

Finalement, on a :

$$\boxed{C = \{id_E, -id_E\}}$$

Exercice 8

1) L'application $g : x \mapsto \langle x, u \rangle u$ est définie sur $\mathbb{R}^3$, à images dans $\mathbb{R}^3$ (car $u \in \mathbb{R}^3$) et linéaire (par linéarité à gauche du produit scalaire), donc $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. Ainsi, $f_a = id_{\mathbb{R}^3} + ag$ est une combinaison linéaire d'endomorphismes de $\mathbb{R}^3$, donc f_a est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

De plus, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\langle f_a(x), y \rangle = \langle x + a\langle x, u \rangle u, y \rangle = \langle x, y \rangle + a\langle x, u \rangle \langle u, y \rangle$$
$$\langle x, f_a(y) \rangle = \langle x, y + a\langle y, u \rangle u \rangle = \langle x, y \rangle + a\langle y, u \rangle \langle x, u \rangle = \langle x, y \rangle + a\langle x, u \rangle \langle u, y \rangle$$

Donc, $\langle f_a(x), y \rangle = \langle x, f_a(y) \rangle$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^3$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Pour tout } a \in \mathbb{R},\ f_a \text{ est un endomorphisme symétrique de } \mathbb{R}^3.}$$

2) Si f_a est une isométrie, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $\|f_a(x)\| = \|x\|$. Or :

$$\begin{aligned}
\|f_a(x)\| = \|x\| \quad &\Leftrightarrow \quad \|f_a(x)\|^2 = \|x\|^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \|x + a\langle x,u\rangle u\|^2 = \|x\|^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \|x\|^2 + 2\langle x, a\langle x,u\rangle u\rangle + \|a\langle x,u\rangle u\|^2 = \|x\|^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 2a\langle x,u\rangle^2 + a^2\langle x,u\rangle^2 = 0 \quad \text{(avec } \|u\| = 1) \\
&\Leftrightarrow \quad (2a + a^2)\langle x,u\rangle^2 = 0
\end{aligned}$$

En particulier pour $x = u$, on a $\langle x,u\rangle = \|u\|^2 = 1 \neq 0$, et l'égalité ci-dessus donne $2a + a^2 = 0$.

Dans ce cas, la suite d'équivalences ci-dessus donne immédiatement : $\|f_a(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$.

Enfin, on cherche a non nul, donc $2a + a^2 = 0$ équivaut à $a = -2$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Il existe un unique réel non nul } a_0 = -2 \text{ tel que } f_{a_0} \text{ est une isométrie.}}$$

Remarquons que pour $a = 0$, $f_0 = id_{\mathbb{R}^3}$ est une isométrie, mais pas passionnante…

On a alors $f_{-2} : x \mapsto x - 2\langle x,u\rangle u$ et :

$$f_{-2}(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad 2\langle x,u\rangle u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle x,u\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{u\}^\perp .$$

De plus :

$$f_{-2}(u) = u - 2\langle u,u\rangle u = u - 2\|u\|^2 u = u - 2u = -u .$$

Donc :

$$\boxed{f_{-2} \text{ est la réflexion par rapport au plan } \{u\}^\perp .}$$

3) Comme f_{-2} est une réflexion, on a $f_{-2}^2 = id_{\mathbb{R}^3}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} f_{-2}^{2k} = id_{\mathbb{R}^3} \\ f_{-2}^{2k+1} = f_{-2} \end{cases}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{k!} f_{-2}^k &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!} f_{-2}^{2k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!} f_{-2}^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!} id_{\mathbb{R}^3} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!} f_{-2} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!} \right) id_{\mathbb{R}^3} + \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!} \right) f_{-2}
\end{aligned}$$

Or, les séries $\sum \frac{1}{(2k)!}$ et $\sum \frac{1}{(2k+1)!}$ convergent avec $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} = \operatorname{ch} 1$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!} = \operatorname{sh} 1$, donc :

$$\boxed{\exp(f_{-2}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} f_{-2}^k = (\operatorname{ch} 1)\, id_{\mathbb{R}^3} + (\operatorname{sh} 1)\, f_{-2}}$$

Exercice 9

1) Notons $P = \text{Vect}(e_1, e_2)$. Comme la famille (e_1, e_2) est libre, P est un plan.

Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$:

$$f(x) = \langle x, e_2 \rangle e_1 + \langle x, e_1 \rangle e_2 = 0 \iff \langle x, e_2 \rangle = \langle x, e_1 \rangle = 0 \iff x \in P^\perp.$$

Donc : $\underline{\ker f = P^\perp}$.

De plus, $\text{Im} f \subset P$ et, avec le théorème du rang, on a $rg(f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker f = 3 - 1 = 2 = \dim P$.

Donc : $\underline{\text{Im} f = P}$.

Si on pose $P^\perp = \text{Vect}(e_3)$, la famille $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ avec :

$$\begin{cases} f(e_1) = \langle e_1, e_2 \rangle e_1 + \langle e_1, e_1 \rangle e_2 = \langle e_1, e_2 \rangle e_1 + \|e_1\|^2 e_2 \\ f(e_2) = \langle e_2, e_2 \rangle e_1 + \langle e_2, e_1 \rangle e_2 = \|e_2\|^2 e_1 + \langle e_1, e_2 \rangle e_2 \\ f(e_3) = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$M_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_2 \rangle & \|e_2\|^2 & 0 \\ \|e_1\|^2 & \langle e_1, e_2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique χ_f de *f* est alors :

$$\chi_f = X\left[\left(X - \langle e_1, e_2 \rangle\right)^2 - \|e_1\|^2 \|e_2\|^2\right] = X\left(X - \langle e_1, e_2 \rangle - \|e_1\|.\|e_2\|\right)\left(X - \langle e_1, e_2 \rangle + \|e_1\|.\|e_2\|\right).$$

Or, l'inégalité de Cauchy-Schwartz donne $-\|e_1\|\|e_2\| < \langle e_1, e_2 \rangle < \|e_1\|\|e_2\|$ (les inégalités sont strictes car e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires), donc $\langle e_1, e_2 \rangle + \|e_1\|\|e_2\| > 0$ et $\langle e_1, e_2 \rangle - \|e_1\|\|e_2\| < 0$.

Ainsi, *f* admet trois valeurs propres distinctes : $\lambda_1 = \langle e_1, e_2 \rangle - \|e_1\|\|e_2\| < 0$, $\lambda_2 = \langle e_1, e_2 \rangle + \|e_1\|\|e_2\| > 0$ et 0, donc *f* est diagonalisable.

Enfin, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\langle f(x), y \rangle = \langle \langle x, e_2 \rangle e_1 + \langle x, e_1 \rangle e_2, y \rangle = \langle x, e_2 \rangle \langle e_1, y \rangle + \langle x, e_1 \rangle \langle e_2, y \rangle = \langle x, e_1 \rangle \langle e_2, y \rangle + \langle x, e_2 \rangle \langle e_1, y \rangle$$
$$\langle x, f(y) \rangle = \langle x, \langle y, e_2 \rangle e_1 + \langle y, e_1 \rangle e_2 \rangle = \langle y, e_2 \rangle \langle x, e_1 \rangle + \langle y, e_1 \rangle \langle x, e_2 \rangle = \langle x, e_1 \rangle \langle e_2, y \rangle + \langle x, e_2 \rangle \langle e_1, y \rangle = \langle f(x), y \rangle$$

Donc, *f* est symétrique. D'après le théorème spectral, *f* est alors diagonalisable dans une base orthonormée.

Finalement :

$$\boxed{\text{Il existe bien une base orthonormée } \mathcal{B} \text{ de } \mathbb{R}^3 \text{ telle que } M_{\mathcal{B}} = diag(\lambda_1, \lambda_2, 0) \text{ avec } \lambda_1 < 0 \text{ et } \lambda_2 > 0.}$$

2) On vient de voir que : si e_1 et e_2 sont linéairement indépendants, alors il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de *f* est $diag(\lambda_1, \lambda_2, 0)$ avec $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$.

La réciproque est : s'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de *f* est $diag(\lambda_1, \lambda_2, 0)$ avec $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$, alors e_1 et e_2 sont linéairement indépendants.

On suppose donc qu'il existe $\mathcal{B}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$, une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $diag(\lambda_1,\lambda_2,0)$ avec $\lambda_1<0$ et $\lambda_2>0$.

On a alors $\mathrm{Im}\, f=\mathrm{Vect}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, donc $rg\,(f)=2$.

Or, pour tout $x\in\mathbb{R}^3$, $f(x)=\langle x,e_2\rangle e_1+\langle x,e_1\rangle e_2\in\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$, donc $\mathrm{Im}\, f\subset\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$. Ceci prouve que :

$$rg\,(e_1,e_2)\geq 2.$$

Comme $rg\,(e_1,e_2)\leq 2$, on obtient $rg\,(e_1,e_2)=2$ et les vecteurs e_1 et e_2 engendrent un plan. Ils sont donc linéairement indépendants, ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{\text{La réciproque est vraie.}}$$

Exercice 10

1) Déterminons le rang de A par équivalences par lignes :

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&4\\1&-3&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-L_1]{L_2\leftarrow L_2-2L_1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&-4&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+4L_2}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

On obtient trois pivots (non nuls), donc $rg\,(A)=rg\,(c_1,c_2,c_3)=3$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\text{La famille } (c_1,c_2,c_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

2) On a $\|c_1\|=\sqrt{6}$, donc on pose : $u=\dfrac{1}{\sqrt{6}}c_1=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{vmatrix}1\\2\\1\end{vmatrix}.$

On cherche alors $V=\lambda c_1+c_2$ tel que $\langle V,c_1\rangle=0$, soit :

$$\langle\lambda c_1+c_2,c_1\rangle=\lambda\langle c_1,c_1\rangle+\langle c_2,c_1\rangle=6\lambda+4=0\quad\Leftrightarrow\quad\lambda=-\frac{2}{3}.$$

Donc, $V=-\dfrac{2}{3}c_1+c_2=-\dfrac{2}{3}\begin{vmatrix}1\\2\\1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1\\3\\-3\end{vmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{vmatrix}1\\5\\-11\end{vmatrix}$. Alors, $\|V\|=\dfrac{7}{\sqrt{3}}$ et on prend : $v=\dfrac{\sqrt{3}}{21}\begin{vmatrix}1\\5\\-11\end{vmatrix}$.

Enfin, on cherche $W=\alpha c_1+\beta c_2+c_3$ tel que $\langle W,c_1\rangle=\langle W,c_2\rangle=0$, soit :

$$\begin{cases}\alpha\langle c_1,c_1\rangle+\beta\langle c_2,c_1\rangle+\langle c_3,c_1\rangle=6\alpha+4\beta+5=0\\\alpha\langle c_1,c_2\rangle+\beta\langle c_2,c_2\rangle+\langle c_3,c_2\rangle=4\alpha+19\beta+25=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\alpha=\dfrac{5}{98}\\\beta=-\dfrac{65}{49}\end{cases}$$

Donc, $W=\dfrac{5}{98}c_1-\dfrac{65}{49}c_2+c_3=\dfrac{5}{98}\begin{vmatrix}1\\2\\1\end{vmatrix}-\dfrac{65}{49}\begin{vmatrix}1\\3\\-3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1\\4\\-4\end{vmatrix}=\dfrac{3}{98}\begin{vmatrix}-9\\4\\1\end{vmatrix}$. Alors, $\|W\|=\dfrac{3\sqrt{2}}{14}$ et on prend : $w=\dfrac{1}{7\sqrt{2}}\begin{vmatrix}-9\\4\\1\end{vmatrix}$.

Ainsi :

$$\boxed{u=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{vmatrix}1\\2\\1\end{vmatrix}\qquad v=\frac{\sqrt{3}}{21}\begin{vmatrix}1\\5\\-11\end{vmatrix}\qquad w=\frac{1}{7\sqrt{2}}\begin{vmatrix}-9\\4\\1\end{vmatrix}}$$

3) Les matrices de $SO_2(\mathbb{R})$ sont les matrices de rotation : on cherche $S=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$. Alors :

$$S\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma\\ 0\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\alpha\cos\theta-\beta\sin\theta=\gamma\\ \alpha\sin\theta+\beta\cos\theta=0\end{cases}$$

Il suffit alors de choisir θ tel que $\alpha\sin\theta+\beta\cos\theta=0$, soit $\theta=-\arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ si $\alpha\neq 0$, ou $\theta=\frac{\pi}{2}$ si $\alpha=0$.

Dans les deux cas, on a $\gamma=\alpha\cos\theta-\beta\sin\theta$. Ainsi, on peut prendre :

$$S=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\text{ avec }\begin{cases}\theta=-\arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\text{ et }\gamma=\alpha\cos\theta-\beta\sin\theta\qquad\text{quand }\alpha\neq 0\\ \theta=\frac{\pi}{2}\text{ et }\gamma=-\beta\qquad\text{quand }\alpha=0\end{cases}$$

Et donc :

$$\boxed{\text{Il existe une matrice } S\in SO_2(\mathbb{R})\text{ telle que } S\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma\\ 0\end{pmatrix}\text{ avec }\gamma\text{ comme ci-dessus.}}$$

4) Remarquons déjà que si $S\in SO_2(\mathbb{R})$, alors $\begin{pmatrix} S & & 0\\ & & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & S & \\ 0 & & \end{pmatrix}$ sont dans $SO_3(\mathbb{R})$.

De plus, $X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ appartient à $O_3(\mathbb{R})$ (c'est une matrice de symétrie orthogonale).

On a $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & -3 & -4\end{pmatrix}$.

Commençons par chercher $S_1\in SO_2(\mathbb{R})$ telle que $S_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma\\0\end{pmatrix}$.

D'après la question précédente, si on prend $\theta_1=-\arctan\left(\frac{2}{1}\right)=-\arctan(2)$, on a $\theta_1\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ et :

$$\begin{cases}\cos\theta_1=\sqrt{\cos^2\theta_1}=\sqrt{\dfrac{1}{1+\tan^2\theta_1}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\\ \sin\theta_1=\cos\theta_1\tan\theta_1=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\end{cases}\text{ donc } S_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Si on pose $R_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \in SO_3(\mathbb{R})$, on a :

$$R_1 A = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ \sqrt{5} & -3\sqrt{5} & -4\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Et :

$$XR_1 A = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ \sqrt{5} & -3\sqrt{5} & -4\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On prend maintenant $S_2 \in SO_2(\mathbb{R})$ telle que $S_2\begin{pmatrix} 5 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \end{pmatrix}$.

En procédant comme plus haut avec $\theta_2 = -\arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, on obtient :

$$S_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 1 \\ -1 & \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Avec $R_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix} \in SO_3(\mathbb{R})$, on a :

$$R_2 XR_1 A = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} 6\sqrt{5} & 4\sqrt{5} & 5\sqrt{5} \\ 0 & -22 & -29 \\ 0 & \sqrt{6} & 2\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Enfin, soit $S_3 \in SO_2(\mathbb{R})$ telle que $S_3\begin{pmatrix} -22 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \end{pmatrix}$. On obtient $\theta_2 = \arctan\left(\frac{\sqrt{6}}{22}\right)$ et :

$$S_3 = \frac{1}{7\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 11\sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 11\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Alors, avec $R_3 = \frac{1}{7\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 7\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 11\sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 11\sqrt{2} \end{pmatrix} \in SO_3(\mathbb{R})$, on a :

$$R_3 R_2 XR_1 A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{4}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{7}{\sqrt{3}} & -\frac{65}{7\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{7\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Enfin, si $Q = R_3 R_2 XR_1$, on a $Q \in O_3(\mathbb{R})$ car $R_3, R_2, X, R_1 \in O_3(\mathbb{R})$ et $O_3(\mathbb{R})$ est stable par produit, donc :

$$\boxed{\text{Il existe bien } Q \in O_3(\mathbb{R}) \text{ telle que } QA \text{ soit triangulaire supérieure.}}$$

5) En multipliant à gauche la relation $QA=\begin{pmatrix}\sqrt{6} & \frac{4}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{6}}\\ 0 & -\frac{7}{\sqrt{3}} & -\frac{65}{7\sqrt{3}}\\ 0 & 0 & \frac{3}{7\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ par $D=diag\left(1,-1,1\right)\in O_3(\mathbb{R})$, on obtient :

$$Q'A=\begin{pmatrix}\sqrt{6} & \frac{4}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{7}{\sqrt{3}} & \frac{65}{7\sqrt{3}}\\ 0 & 0 & \frac{3}{7\sqrt{2}}\end{pmatrix}=T \quad \text{avec} \quad Q'=DR_3R_2XR_1 == \frac{1}{7\sqrt{6}}\begin{pmatrix}7 & 14 & 7\\ \sqrt{2} & 5\sqrt{2} & -11\sqrt{2}\\ -9\sqrt{3} & 4\sqrt{3} & \sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

Avec la base (u,v,w) obtenue dans la question 2, *P*, la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^3$ à la base (u,v,w) est :

$$P=P_{\mathcal{B}_c}^{(u,v,w)}=\frac{1}{7\sqrt{6}}\begin{pmatrix}7 & \sqrt{2} & -9\sqrt{3}\\ 14 & 5\sqrt{2} & 4\sqrt{3}\\ 7 & -11\sqrt{2} & \sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

Et on a :

$$\boxed{Q'={}^tP={}^tP_{\mathcal{B}_c}^{(u,v,w)}}$$

De plus, on a avait :

$$\begin{cases} u=\dfrac{1}{\sqrt{6}}c_1\\ v=-\dfrac{2\sqrt{3}}{21}c_1+\dfrac{\sqrt{3}}{7}c_2\\ w=\dfrac{5\sqrt{2}}{42}c_1-\dfrac{65\sqrt{2}}{21}c_2+\dfrac{7\sqrt{2}}{3}c_3\end{cases}$$

Comme (u,v,w) et (c_1,c_2,c_3) sont des bases, on a $P_{\mathcal{B}_c}^{(c_1,c_2,c_3)}=A$ (car c_1, c_2, c_3 sont les colonnes de *A*) et les relations ci-dessus donnent :

$$R=P_{(c_1,c_2,c_3)}^{(u,v,w)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2\sqrt{3}}{21} & \frac{5\sqrt{2}}{42}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{7} & -\frac{65\sqrt{2}}{21}\\ 0 & 0 & \frac{7\sqrt{2}}{3}\end{pmatrix}.$$

Avec la relation de Chasles, on a :

$$A=P_{\mathcal{B}_c}^{(c_1,c_2,c_3)}=P_{\mathcal{B}_c}^{(u,v,w)}P_{(u,v,w)}^{(c_1,c_2,c_3)}=PR^{-1}.$$

Et, comme $\mathcal{B}_c$ et (u,v,w) sont orthonormées, on a $P=P_{\mathcal{B}_c}^{(u,v,w)}\in O_3(\mathbb{R})$, $P^{-1}={}^tP$ et :

$$R^{-1}={}^tPA.$$

Or, le calcul donne $TR=I_3$, donc $R^{-1}=T$ et $Q'A=T$ se récrit $Q'A=R^{-1}$. Ainsi, $R^{-1}=Q'A={}^tPA$ et comme *A* est inversible, on retrouve $Q'={}^tP$. Ouf !