# *Corrigés des TD du chapitre 15*

## *Exercice 1*

1) L'application $\varphi:(P,Q)\mapsto(P\,|\,Q)=\sum_{k=0}^{n}P(a_k)Q(a_k)$ est bien définie sur $\left(\mathbb{R}_n[X]\right)^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Elle est clairement symétrique (commutativité du produit dans $\mathbb{R}$) et bilinéaire (distributivité du produit sur l'addition dans $\mathbb{R}$).

De plus, pour tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$, on pose $(P\,|\,P)=\sum_{k=0}^{n}P(a_k)^2\geq 0$, donc $\varphi$ est positive et donc, $\varphi$ est produit scalaire si et seulement si $\varphi$ est définie. Or, on a :

$$(P\,|\,P)=\sum_{k=0}^{n}P(a_k)^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad P(a_0)=P(a_1)=\ldots=P(a_n)=0\,.$$

Donc, $a_0,a_1,\ldots,a_n$ sont racines de *P*. Si les $a_k$ sont distincts deux à deux, alors $P\in\mathbb{R}_n[X]$ possède $n+1$ racine distincts, donc *P* est nul. Dans ce cas, $\varphi$ est définie.

Par contre, si les $a_k$ ne sont pas distincts deux à deux, quitte à renuméroter, on peut supposer que $a_0=a_1$, et dans ce cas, avec $P=\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)\in\mathbb{R}_n[X]$, on a $(P\,|\,P)=0$ avec $P\neq 0$, donc $\varphi$ n'est pas définie.

Finalement, $\varphi$ est définie si et seulement si les $a_k$ sont distincts deux à deux, et donc :

$$\boxed{(P,Q)\mapsto(P\,|\,Q)=\sum_{k=0}^{n}P(a_k)Q(a_k)\text{ est produit scalaire si et seulement si les } a_k \text{ sont distincts deux à deux.}}$$

2) Remarquons que pour tout $k\in[\![0,n]\!]$ et tout $i\in[\![0,n]\!]$, $L_i(a_k)=\delta_{i,k}$ (le symbole de Kronecker).

On a pour tous $i,j\in[\![0,n]\!]$ :

$$(L_i\,|\,L_j)=\sum_{k=0}^{n}L_i(a_k)L_j(a_k)=\sum_{k=0}^{n}\delta_{i,k}\delta_{j,k}=\delta_{i,j}\,.$$

Donc, la famille $(L_0,L_1,\ldots,L_n)$ est orthonormée et comme elle contient $n+1=\dim\left(\mathbb{R}_n[X]\right)$ polynômes :

$$\boxed{\text{La famille } (L_0,L_1,\ldots,L_n) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}_n[X].}$$

3) Remarquons déjà que pour tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$, $\sum_{k=0}^{n}P(a_k)^2=\|P\|^2$ (où $\|.\|$ est la norme associée au produit scalaire utilisé ici), donc $\inf_{P\in F}\left(\sum_{k=0}^{n}P(a_k)^2\right)=\inf_{P\in F}\left(\|P\|^2\right)$.

Par ailleurs, si on pose $L=L_0+L_1+\ldots+L_n$, on a pour tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$ :

$$\sum_{k=0}^{n}P(a_k)=\sum_{k=0}^{n}L(a_k)P(a_k)=(L\,|\,P)\,.$$

Donc, $F=\left\{P\in\mathbb{R}_n[X]\setminus(L\mid P)=1\right\}$. Mais, $(L\mid L)=n+1$, soit $\left(L\,\middle|\,\frac{1}{n+1}L\right)=1$ (donc $\frac{1}{n+1}L\in F$ ) et :

$$F=\left\{P\in\mathbb{R}_n[X]\setminus(L\mid P)=\left(L\,\middle|\,\frac{1}{n+1}L\right)\right\}=\left\{P\in\mathbb{R}_n[X]\setminus\left(L\,\middle|\,P-\frac{1}{n+1}L\right)=0\right\}=\left\{P\in\mathbb{R}_n[X]\setminus L\perp P-\frac{1}{n+1}L\right\}$$

Alors, pour tout $P\in F$, on a $L\perp P-\frac{1}{n+1}L$, donc $\frac{1}{n+1}L\perp P-\frac{1}{n+1}L$ et, d'après le théorème de Pythagore :

$$\|P\|^2=\left\|\frac{1}{n+1}L+P-\frac{1}{n+1}L\right\|^2=\left\|\frac{1}{n+1}L\right\|^2+\left\|P-\frac{1}{n+1}L\right\|^2\geq\left\|\frac{1}{n+1}L\right\|^2=\frac{1}{n+1}\quad\Rightarrow\quad\inf_{P\in F}\left(\|P\|^2\right)\geq\frac{1}{n+1}.$$

Or, $\frac{1}{n+1}L\in F$, donc $\inf_{P\in F}\left(\|P\|^2\right)\leq\frac{1}{n+1}$ et finalement :

$$\boxed{\inf_{P\in F}\left(\sum_{k=0}^{n}P(a_k)^2\right)=\inf_{P\in F}\left(\|P\|^2\right)=\min_{P\in F}\left(\|P\|^2\right)=\frac{1}{n+1}}$$

## ***Exercice 2***

1) On a :

- $(\cdot\mid\cdot)$ est clairement symétrique et bilinéaire du fait de la linéarité de l'intégrale.
- De plus, pour tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$, on a $(P\mid P)=\int_{-1}^{1}P^2\varphi$.

  Or, $\varphi$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, donc $P^2\varphi\geq 0$ sur $[-1;1]$ et par positivité de l'intégrale, on a $(P\mid P)\geq 0$ donc $(\cdot\mid\cdot)$ est positive.
- On a :

$$\begin{aligned}(P\mid P)=\int_{-1}^{1}P^2\varphi=0\quad&\Leftrightarrow\quad P^2\varphi=0 \text{ sur } [-1;1] \text{ (car } P^2\varphi \text{ est continue et positive sur } [-1;1])\\&\Leftrightarrow\quad P=0 \text{ sur } [-1;1] \text{ (car } \varphi \text{ est à valeurs dans } \mathbb{R}_+^* \text{ donc ne s'annule pas)}\\&\Leftrightarrow\quad P=0 \text{ (car P admet une infinité de racines donc est nul)}\end{aligned}$$

  Ainsi, $(\cdot\mid\cdot)$ est définie.

Finalement :

$$\boxed{(\cdot\mid\cdot) \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

2) Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à la base canonique $(1,X,\dots,X^n)$ de $E$ permet de construire une base orthonormée $(P_0,P_1,\dots,P_n)$ telle que pour tout $k\in\llbracket 0,n\rrbracket$, $P_k=\frac{R_k}{\|R_k\|}$ avec $R_0=1$ et pour tout $k\geq 1$, $R_k=X^k-(X^k\mid P_{k-1})P_{k-1}-\dots-(X^k\mid P_0)P_0$.

Alors, par construction, le terme de plus haut degré de $R_k$ est $X^k$, donc pour tout $k\in\llbracket 0,n\rrbracket$, $\deg P_k=k$ et le coefficient dominant de $P_k$ est $\frac{1}{\|R_k\|}>0$ et ainsi, il existe bien une base orthonormée de $E$, échelonnée en degrés et constituée de polynômes de coefficients dominants strictement positifs.

Supposons maintenant que l'on ait deux telles bases : $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ et $(Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$.

Notons pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_k > 0$ et $b_k > 0$ les coefficients dominants respectifs de $P_k$ et $Q_k$.

Montrons par récurrence forte que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $Q_k = P_k$.

- Pour $k = 0$, $P_0$ et $Q_0$ sont tous deux degré 0, donc $Q_0 = \lambda P_0$ avec $b_0 = \lambda a_0$ donc $\lambda > 0$, et :

$$1 = (Q_0 \mid Q_0) = \lambda^2 (P_0 \mid P_0) = \lambda^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 \ \text{(car } \lambda > 0\text{)}.$$

  Ainsi, $Q_0 = P_0$ et la propriété est au rang 0.

- Supposons la propriété vraie jusqu'à un certain rang $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

  Alors, $R = \dfrac{Q_{k+1}}{b_{k+1}} - \dfrac{P_{k+1}}{a_{k+1}}$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $k$ donc $R = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i P_i$.

  Mais alors, pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $Q_i = P_i$ et :

$$\lambda_i = (R \mid P_i) = \left(\frac{Q_{k+1}}{b_{k+1}} - \frac{P_{k+1}}{a_{k+1}} \mid P_i\right) = \frac{1}{b_{k+1}}(Q_{k+1} \mid P_i) - \frac{1}{a_{k+1}}(P_{k+1} \mid P_i) = \frac{1}{b_{k+1}}(Q_{k+1} \mid Q_i) - \frac{1}{a_{k+1}}(P_{k+1} \mid P_i) = 0.$$

  Donc $R = 0$, soit $Q_{k+1} = \lambda P_{k+1}$ avec $\lambda = \dfrac{b_{k+1}}{a_{k+1}} > 0$. On obtient $\lambda = 1$ comme plus haut.

  Ainsi, $Q_{k+1} = P_{k+1}$ et la propriété est donc vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc elle est vraie pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Ainsi :

> Il existe une unique base orthonormée de $E$, échelonnée en degrés et constituée de polynômes de coefficients dominants strictement positifs.

3) a. Le terme de plus haut degré de $(X^2 - 1)^k$ est $X^{2k}$ donc le terme de plus haut degré de $Q_k$ est :

$$(X^{2k})^{(k)} = 2k(2k-1)\dots(k+1)X^k = \frac{(2k)!}{k!} X^k$$

Ainsi :

> $Q_k$ est de degré $k$ et de coefficient dominant $\dfrac{(2k)!}{k!}$.

b. La famille $(Q_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est donc une famille échelonnée en degrés de $n+1$ polynômes de $E = \mathbb{R}_n[X]$, qui est de dimension $n+1$. Ainsi :

> $(Q_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de $E$.

c. Posons pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P_k = (X^2 - 1)^k$. On a alors, $Q_k = P_k^{(k)}$.

Remarquons que comme – 1 et 1 sont racines de multiplicité $k$ dans $P_k$, ces deux réels sont racines de $P_k^{(p)}$ pour tout entier compris entre 0 et $k-1$.

Alors, pour tout $(i,j)\in [\![0,n]\!]^2$, on a, en intégrant deux fois par parties :

$$(Q_i\mid Q_j)=\int_{-1}^1 P_i^{(i)}(t)P_j^{(j)}(t)dt=\left[P_i^{(i)}(t)P_j^{(j-1)}(t)\right]_{-1}^1-\int_{-1}^1 P_i^{(i+1)}(t)P_j^{(j-1)}(t)dt=-\int_{-1}^1 P_i^{(i+1)}(t)P_j^{(j-1)}(t)dt$$
$$=-\left[P_i^{(i+2)}(t)P_j^{(j-1)}(t)\right]_{-1}^1+\int_{-1}^1 P_i^{(i+2)}(t)P_j^{(j-2)}(t)dt=\int_{-1}^1 P_i^{(i+2)}(t)P_j^{(j-2)}(t)dt$$

En continuant ainsi, on obtient pour tout $p\le j$, $(Q_i\mid Q_j)=\int_{-1}^1 P_i^{(i+p)}(t)P_j^{(j-p)}(t)dt$ et en particulier pour $p=j$ :

$$(Q_i\mid Q_j)=\int_{-1}^1 P_i^{(i+j)}(t)P_j(t)dt\,.$$

Mais, si $i<j$, alors $i+j>2i=\deg P_i$, donc $P_i^{(i+j)}=0$ et ainsi, $(Q_i\mid Q_j)=0$.

Par symétrie du produit scalaire, on a aussi $(Q_i\mid Q_j)=0$ pour $i>j$ et ainsi, $(Q_i\mid Q_j)=0$ pour $i\ne j$ donc :

$$\boxed{\text{La famille } (Q_k)_{k\in [\![0,n]\!]} \text{ est une base orthogonale de } E.}$$

## *Exercice 3*

L'identité du parallélogramme est $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$, qui est donc vérifiée ici pour tout $(x,y)\in E^2$. Montrer que la norme est hilbertienne revient à montrer qu'elle dérive d'un produit scalaire et si tel est le cas, alors ce produit scalaire et la norme vérifient les identités de polarisation.

En particulier, pour tout $(x,y)\in E^2$, $\|x+y\|^2-\|x-y\|^2=4(x\mid y)$, soit :

$$(x\mid y)=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right).$$

Il faut donc montrer que $(x,y)\mapsto(x\mid y)=\dfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)$ est un produit scalaire sur $E$.

Cette application va de $E^2$ dans $\mathbb{R}$ et est symétrique ($\|x+y\|=\|y+x\|$ et $\|x-y\|=\|y-x\|$).

De plus, pour tout $x\in E$, $(x\mid x)=\dfrac{1}{4}\left(\|x+x\|^2-\|x-x\|^2\right)=\|x\|^2\ge 0$ et $(x\mid x)=\|x\|^2=0$ équivaut à $x=0$ (séparation de la norme).

Reste à prouver la bilinéarité, donc la linéarité à gauche (la symétrie entrainera alors la linéarité à droite).

Nous allons procéder en deux temps.

Soient $(x,x',y)\in E^3$. On a :

$$4(x+x'\mid y)=\|x+x'+y\|^2-\|x+x'-y\|^2=\left\|x+\frac{1}{2}y+x'+\frac{1}{2}y\right\|^2-\left\|x-\frac{1}{2}y+x'-\frac{1}{2}y\right\|^2.$$

Et, avec l'identité du parallélogramme :

$$\left\|x+\frac{1}{2}y+x'+\frac{1}{2}y\right\|^2=2\left(\left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2+\left\|x'+\frac{1}{2}y\right\|^2\right)-\left\|x+\frac{1}{2}y-x'-\frac{1}{2}y\right\|^2=2\left(\left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2+\left\|x'+\frac{1}{2}y\right\|^2\right)-\|x-x'\|^2$$

$$\left\|x-\frac{1}{2}y+x'-\frac{1}{2}y\right\|^2=2\left(\left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2+\left\|x'-\frac{1}{2}y\right\|^2\right)-\left\|x-\frac{1}{2}y-x'+\frac{1}{2}y\right\|^2=2\left(\left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2+\left\|x'-\frac{1}{2}y\right\|^2\right)-\|x-x'\|^2$$

Donc :

$$\begin{aligned}4(x+x'\,|\,y)&=2\left(\left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2+\left\|x'+\frac{1}{2}y\right\|^2\right)-2\left(\left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2+\left\|x'-\frac{1}{2}y\right\|^2\right)\\&=2\left(\left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2-\left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2+\left\|x'+\frac{1}{2}y\right\|^2-\left\|x'-\frac{1}{2}y\right\|^2\right)\end{aligned}.$$

Remarquons que l'identité du parallélogramme peut aussi s'écrire pour tout $(X,Y)\in E^2$ :

$$\|X\|^2+\|Y\|^2=\frac{1}{2}\left(\|X+Y\|^2+\|X-Y\|^2\right).$$

Donc :

$$\begin{cases}\left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2+\left\|\frac{1}{2}y\right\|^2=\frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2+\|x\|^2\right)\\ \left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2+\left\|\frac{1}{2}y\right\|^2=\frac{1}{2}\left(\|x\|^2+\|x-y\|^2\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2=\frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2+\|x\|^2\right)-\left\|\frac{1}{2}y\right\|^2\\ \left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2=\frac{1}{2}\left(\|x-y\|^2+\|x\|^2\right)-\left\|\frac{1}{2}y\right\|^2\end{cases}$$

Ainsi :

$$\left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2-\left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2=\frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)=2(x\,|\,y).$$

On a bien sûr de même $\left\|x'+\frac{1}{2}y\right\|^2-\left\|x'-\frac{1}{2}y\right\|^2=2(x'\,|\,y)$ et donc :

$$4(x+x'\,|\,y)=2\left[2(x\,|\,y)+2(x'\,|\,y)\right]=4\left[(x\,|\,y)+(x'\,|\,y)\right].$$

Ainsi, pour tout $(x,x',y)\in E^3$ :

$$(x+x'\,|\,y)=(x\,|\,y)+(x'\,|\,y)\quad\textbf{(1)}.$$

Soit maintenant $(x,y)\in E^2$. Posons pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$ :

$$f(\lambda)=(\lambda x\,|\,y)=\frac{1}{4}\left(\|\lambda x+y\|^2-\|\lambda x-y\|^2\right).$$

L'application *f* est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

De plus, comme $X\mapsto\|X\|$ est continue sur *E* (car 1-liptschizienne du fait de l'inégalité triangulaire), *f* est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que différences de telles fonctions.

Enfin, pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, on a d'après le résultat **(1)** :

$$f(\lambda+\mu)=\left((\lambda+\mu)x\,|\,y\right)=(\lambda x+\mu x\,|\,y)=(\lambda x\,|\,y)+(\mu x\,|\,y)=f(\lambda)+f(\mu).$$

Ainsi, *f* est une application continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(\lambda+\mu)=f(\lambda)+f(\mu)$ pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, donc *f* est linéaire (*exercice classique de première année* : on prouve que pour tout $(\lambda,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{N}$, $f(n\lambda)=nf(\lambda)$, puis on évalue *f* sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, puis $\mathbb{R}$ par continuité, grâce à densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).

Il existe donc un réel fixé *a* tel que pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $f(\lambda)=a\lambda$ et $a=f(1)=(x\,|\,y)$, donc pour tout $(x,y)\in E^2$ et tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on a :

$$(\lambda x\,|\,y)=\lambda(x\,|\,y)\quad\textbf{(2)}.$$

Les résultats **(1)** et **(2)** prouvent que $(x,y)\mapsto(x\,|\,y)$ est linéaire à gauche et ainsi, $(x,y)\mapsto(x\,|\,y)$ est un produit scalaire, donc :

$$\boxed{\text{Toute norme de } E \text{ vérifiant l'identité du parallélogramme est hilbertienne.}}$$

## *Exercice 4*

Si la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est liée, alors on a $\left|\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)\right| = 0$ et l'inégalité est immédiate.

Supposons que la famille est libre, alors c'est une base de $E$ (qui est de de dimension $n$) et les $x_k$ sont tous non nuls. Par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on construit une nouvelle base orthonormée de $E$, $\mathcal{B}'=(e_1,e_2,...,e_n)$ avec pour tout $k\in[\![1,n]\!]$ :

$$\varepsilon_{k+1} = x_{k+1} - (x_{k+1}\,|\,e_1)e_1 - (x_{k+1}\,|\,e_2)e_2 - \dots - (x_{k+1}\,|\,e_k)e_k \text{ et } e_{k+1} = \frac{1}{\|\varepsilon_{k+1}\|}\varepsilon_{k+1}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\det_{\mathcal{B}}\left(e_1, e_2, \dots, e_n\right) &= \det_{\mathcal{B}}\left(e_1, e_2, \dots, \frac{1}{\|\varepsilon_n\|}\left[x_n - (x_n\,|\,e_1)e_1 - (x_n\,|\,e_2)e_2 - \dots - (x_n\,|\,e_{n-1})e_{n-1}\right]\right)\\
&= \det_{\mathcal{B}}\left(e_1, e_2, \dots, \frac{1}{\|\varepsilon_n\|}x_n\right) = \frac{1}{\|\varepsilon_n\|}\det_{\mathcal{B}}\left(e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, x_n\right)\\
&= \frac{1}{\|\varepsilon_n\|}\det_{\mathcal{B}}\left(e_1, e_2, \dots, \frac{1}{\|\varepsilon_{n-1}\|}\left[x_{n-1} - (x_{n-1}\,|\,e_1)e_1 - (x_{n-1}\,|\,e_2)e_2 - \dots - (x_{n-1}\,|\,e_{n-2})e_{n-2}\right], x_n\right)\\
&= \frac{1}{\|\varepsilon_n\|}\det_{\mathcal{B}}\left(e_1, e_2, \dots, \frac{1}{\|\varepsilon_{n-1}\|}x_{n-1}, x_n\right) = \frac{1}{\|\varepsilon_{n-1}\|.\|\varepsilon_n\|}\det_{\mathcal{B}}\left(e_1, e_2, \dots, x_{n-1}, x_n\right)\\
&\ \ \vdots\\
&= \frac{1}{\|\varepsilon_2\|\dots\|\varepsilon_{n-1}\|.\|\varepsilon_n\|}\det_{\mathcal{B}}\left(e_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\right)\\
&= \frac{1}{\|\varepsilon_2\|\dots\|\varepsilon_{n-1}\|.\|\varepsilon_n\|}\det_{\mathcal{B}}\left(\frac{1}{\|x_1\|}x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\right)\\
&= \frac{1}{\|x_1\|.\|\varepsilon_2\|\dots\|\varepsilon_{n-1}\|.\|\varepsilon_n\|}\det_{\mathcal{B}}\left(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\right)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\left|\det_{\mathcal{B}}\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)\right| = \|x_1\|.\|\varepsilon_2\|\dots\|\varepsilon_{n-1}\|.\|\varepsilon_n\|.\left|\det_{\mathcal{B}}\left(e_1, e_2, \dots, e_n\right)\right|$$

Or, $\det_{\mathcal{B}}\left(e_1, e_2, \dots, e_n\right) = \det P$ où $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On a $P^{-1} = {}^tP$, donc ${}^tPP = I_n$ et :

$$\det({}^tPP) = \left(\det {}^tP\right)\left(\det P\right) = \left(\det P\right)^2 = \det I_n = 1 \quad\Rightarrow\quad \left|\det_{\mathcal{B}}\left(e_1, e_2, \dots, e_n\right)\right| = \left|\det P\right| = 1.$$

Ainsi :

$$\left|\det_{\mathcal{B}}\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)\right| = \|x_1\|.\|\varepsilon_2\|\dots\|\varepsilon_{n-1}\|.\|\varepsilon_n\|.$$

Enfin, pour tout $k\in[\![2,n]\!]$ :

$$x_k = \|\varepsilon_k\|e_k + (x_k\,|\,e_1)e_1 + (x_k\,|\,e_2)e_2 + \dots + (x_k\,|\,e_{k-1})e_{k-1}.$$

Et comme la famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est orthonormée, on a :

$$\|x_k\|^2 = \|\varepsilon_k\|^2 + (x_k \mid e_1)^2 + (x_k \mid e_2)^2 + ... + (x_k \mid e_{k-1})^2 \geq \|\varepsilon_k\|^2 \quad \Rightarrow \quad \|\varepsilon_k\| \leq \|x_k\|.$$

Donc, $\|\varepsilon_2\| ... \|\varepsilon_{n-1}\| . \|\varepsilon_n\| \leq \|x_2\| ... \|x_{n-1}\| . \|x_n\|$ et ainsi :

$$\left|\det_{\mathcal{B}}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)\right| \leq \|x_1\| . \|x_2\| ... \|x_n\|.$$

Finalement, on a bien dans tous les cas :

$$\boxed{\left|\det_{\mathcal{B}}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)\right| \leq \|x_1\| . \|x_2\| ... \|x_n\|}$$

Il est clair que si l'un des $x_k$ est nul, alors $\left|\det_{\mathcal{B}}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)\right| = \|x_1\| . \|x_2\| ... \|x_n\| = 0$.

Si pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_k \neq 0$ et $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est liée, alors on a $\left|\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, ..., x_n)\right| = 0 < \|x_1\| . \|x_2\| ... \|x_n\|$.

Si pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_k \neq 0$ et $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est libre, alors d'après ce qui précède, on a :

$$\left|\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, ..., x_n)\right| = \|x_1\| . \|x_2\| ... \|x_n\| \quad \Leftrightarrow \quad \|x_2\| ... \|x_n\| = \|\varepsilon_2\| ... \|\varepsilon_{n-1}\| . \|\varepsilon_n\|.$$

Comme pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $\|\varepsilon_k\| \leq \|x_k\|$, aucune de ces inégalité ne peut être stricte avec l'égalité ci-dessus. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\left|\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, ..., x_n)\right| = \|x_1\| . \|x_2\| ... \|x_n\| \quad & \Leftrightarrow \quad \forall\, k \in \llbracket 2, n \rrbracket,\ \|x_k\| = \|\varepsilon_k\| \\
& \Leftrightarrow \quad \forall\, k \in \llbracket 2, n \rrbracket,\ (x_k \mid e_1) = (x_k \mid e_2) = (x_k \mid e_{k-1}) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \forall\, k \in \llbracket 2, n \rrbracket,\ x_k \in \left(\mathrm{Vect}(e_1, e_2, ..., e_{k-1})\right)^{\perp} \\
& \Leftrightarrow \quad \forall\, k \in \llbracket 2, n \rrbracket,\ x_k \in \left(\mathrm{Vect}(x_1, x_2, ..., x_{k-1})\right)^{\perp}
\end{aligned}$$

Et ceci est vrai si et seulement si la famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ était initialement orthogonale.

Finalement :

| |
|---|
| $\left|\det_{\mathcal{B}}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)\right| = \|x_1\| . \|x_2\| ... \|x_n\|$ si et seulement si l'un des $x_k$ est nul ou la famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est orthogonale. |

## ***Exercice 5***

On a $f \in \mathcal{L}(E)$ et pour tout $(x, y) \in E^2$ : $(x \mid y) = 0 \Rightarrow \left(f(x) \mid f(y)\right) = 0$.

Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $\|x\| = \|y\| = 1$. On a alors :

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x + y \mid x - y) = 0.$$

Or :

$$(x + y \mid x - y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(f(x + y) \mid f(x - y)\right) = 0.$$

Et :

$$\left(f(x + y) \mid f(x - y)\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(f(x) + f(y) \mid f(x) - f(y)\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|f(x)\|^2 = \|f(y)\|^2.$$

Ainsi, pour tout $(x, y) \in E^2$ tel que $\|x\| = \|y\| = 1$, on a $\|f(x)\| = \|f(y)\|$, donc $x \mapsto \|f(x)\|$ est constante sur la sphère unité de centre $0_E$.

Autrement dit, il existe un réel positif $k$ tel que pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$, on a, $\|f(x)\| = k$.

Mais alors, pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, on a :

$$\|f(x)\| = \left\| f\left( \|x\| \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = \left\| \|x\| \, f\left( \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = \left\| f\left( \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \|x\| = k\|x\|.$$

Et bien sûr, $\|f(0_E)\| = \|0_E\| = 0 = k\|0_E\|$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe bien un réel positif } k \text{ tel que pour tout } x \in E,\ \|f(x)\| = k\|x\|.}$$

## *Exercice 6*

1) L'application $(A,B) \mapsto \langle A,B \rangle$ définit un produit scalaire sur $E$ : c'est du cours, c'est même le produit scalaire canonique sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Appelons $S$ l'ensemble des solutions du problème, soit :

$$S = \left\{ P \in GL_n(\mathbb{R}) \setminus \forall\, A \in E, \|A\| = \left\| P^{-1}AP \right\| \right\}.$$

Remarquons déjà que $S$ est non vide car contient au moins $I_n$.

Soit $P \in S$. On a $\|A\| = \left\| P^{-1}AP \right\|$ pour toute $A$ de $E$. Si on pose $B = P^{-1}A$ (donc $A = PB$), on a $\|PB\| = \|BP\|$ et comme $B$ décrit $E$ quand $A$ décrit $E$, on peut écrire :

$$S = \left\{ P \in GL_n(\mathbb{R}) \setminus \forall\, B \in E, \|PB\| = \|BP\| \right\}.$$

Alors, si $P \in S$, on a pour tout $(B_1, B_2) \in E^2$, $\|PB_1\| = \|B_1P\|$, $\|PB_2\| = \|B_2P\|$ et :

$$\begin{aligned}
\|P(B_1+B_2)\| = \|(B_1+B_2)P\| \quad &\Leftrightarrow \quad \|PB_1 + PB_2\|^2 = \|B_1P + B_2P\|^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \|PB_1\|^2 + 2\langle PB_1, PB_2 \rangle + \|PB_2\|^2 = \|B_1P\|^2 + 2\langle B_1P, B_2P \rangle + \|B_2P\|^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \langle PB_1, PB_2 \rangle = \langle B_1P, B_2P \rangle \quad (\text{avec } \|PB_1\|^2 = \|B_1P\|^2 \text{ et } \|PB_2\|^2 = \|B_2P\|^2)
\end{aligned}$$

Réciproquement, si pour tout $(B_1, B_2) \in E^2$, $\langle PB_1, PB_2 \rangle = \langle B_1P, B_2P \rangle$, alors pour toute matrice $B \in E$, on a $\|PB\|^2 = \|BP\|^2$ (avec $B = B_1 = B_2$). Ainsi :

$$S = \left\{ P \in GL_n(\mathbb{R}) \setminus \forall\, (B_1, B_2) \in E^2, \langle PB_1, PB_2 \rangle = \langle B_1P, B_2P \rangle \right\}.$$

Notons $(E_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$, la base canonique de $E$. Si $P \in S$, on a alors $\langle PE_{i,j}, PE_{i',j'} \rangle = \langle E_{i,j}P, E_{i',j'}P \rangle$ pour tous $i, j, i', j'$ de $[\![1,n]\!]$.

Réciproquement, supposons qu'une matrice $P$ de $GL_n(\mathbb{R})$ vérifie $\langle PE_{i,j}, PE_{i',j'} \rangle = \langle E_{i,j}P, E_{i',j'}P \rangle$ pour tous $i, j, i', j'$ de $[\![1,n]\!]$. Alors, pour tout $(B_1, B_2) \in E^2$ telles que $B_1 = \sum\limits_{1 \le i,j \le n} \alpha_{i,j} E_{i,j}$ et $B_2 = \sum\limits_{1 \le i',j' \le n} \beta_{i',j'} E_{i',j'}$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle PB_1, PB_2 \rangle &= \left\langle \sum_{1 \le i,j \le n} \alpha_{i,j} PE_{i,j}, \sum_{1 \le i',j' \le n} \beta_{i',j'} PE_{i',j'} \right\rangle = \sum_{1 \le i,j,i',j' \le n} \alpha_{i,j}\beta_{i',j'} \langle PE_{i,j}, PE_{i',j'} \rangle \\
&= \sum_{1 \le i,j,i',j' \le n} \alpha_{i,j}\beta_{i',j'} \langle E_{i,j}P, E_{i',j'}P \rangle = \left\langle \sum_{1 \le i,j \le n} \alpha_{i,j} E_{i,j}P, \sum_{1 \le i',j' \le n} \beta_{i',j'} E_{i',j'}P \right\rangle = \langle B_1P, B_2P \rangle
\end{aligned}$$

Donc, $P \in S$. Ainsi :

$$S = \left\{ P \in GL_n(\mathbb{R}) \setminus \forall\, (i,j,i',j') \in \llbracket 1,n \rrbracket^4, \left\langle PE_{i,j}, PE_{i',j'} \right\rangle = \left\langle E_{i,j}P, E_{i',j'}P \right\rangle \right\}.$$

Soit maintenant une matrice *P* quelconque de *E*. Notons $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes et $L_1, \dots, L_n$ ses lignes.

Pour tout $(i,j,i',j') \in \llbracket 1,n \rrbracket^4$, $PE_{i,j}$ (*resp.* $PE_{i',j'}$) est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf la $j^{\text{ième}}$ (*resp.* la $j'^{\text{ième}}$) qui est $C_i$ (*resp.* $C_{i'}$), donc :

$$\left\langle PE_{i,j}, PE_{i',j'} \right\rangle = \delta_{j,j'} \left( C_i \mid C_{i'} \right)$$

où $\left( \cdot \mid \cdot \right)$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

De la même façon, pour tout $(i,j,i',j') \in \llbracket 1,n \rrbracket^4$, $E_{i,j}P$ (*resp.* $E_{i',j'}P$) est la matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf la $i^{\text{ième}}$ (*resp.* la $i'^{\text{ième}}$) qui est $L_j$ (*resp.* $L_{j'}$), donc :

$$\left\langle E_{i,j}P, E_{i',j'}P \right\rangle = \delta_{i,i'} \left( L_j \mid L_{j'} \right).$$

Alors :

$$\begin{aligned} P \in S \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\, (i,j,i',j') \in \llbracket 1,n \rrbracket^4, \left\langle PE_{i,j}, PE_{i',j'} \right\rangle = \left\langle E_{i,j}P, E_{i',j'}P \right\rangle \\ &\Leftrightarrow \quad \forall\, (i,j,i',j') \in \llbracket 1,n \rrbracket^4, \delta_{j,j'} \left( C_i \mid C_{i'} \right) = \delta_{i,i'} \left( L_j \mid L_{j'} \right) \end{aligned}$$

Or, si $i \neq i'$ et $j \neq j'$, $\delta_{j,j'} = \delta_{i,i'} = 0$, donc $\delta_{j,j'} \left( C_i \mid C_{i'} \right) = \delta_{i,i'} \left( L_j \mid L_{j'} \right)$. D'où :

$$P \in S \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \forall\, (i,i') \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, \ i \neq i', \ \left( C_i \mid C_{i'} \right) = 0 \\ \forall\, (j,j') \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, \ j \neq j', \ \left( L_j \mid L_{j'} \right) = 0 \\ \forall\, (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, \ \left( C_i \mid C_i \right) = \left( L_j \mid L_j \right) \end{cases}$$

Soit :

$$P \in S \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \ \begin{cases} \forall\, (i,i') \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, \ i \neq i', \ \left( C_i \mid C_{i'} \right) = \delta_{i,i'} \lambda^2 \\ \forall\, (j,j') \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, \ j \neq j', \ \left( L_j \mid L_{j'} \right) = \delta_{j,j'} \lambda^2 \end{cases}$$

Remarquons que :

$$\forall\, (i,i') \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, \ i \neq i', \ \left( C_i \mid C_{i'} \right) = \delta_{i,i'} \lambda^2 \quad \Leftrightarrow \quad {}^t PP = \lambda^2 I_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, (j,j') \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, \ j \neq j', \ \left( L_j \mid L_{j'} \right) = \delta_{j,j'} \lambda^2$$

Finalement,

$$P \in S \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \ {}^t PP = \lambda^2 I_n.$$

Enfin, si ${}^t PP = \lambda^2 I_n$ avec $\lambda \neq 0$ alors *P* est inversible et donc :

| |
|---|
| Les solutions du problème sont les matrices $P \in E$ telles qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que ${}^t PP = \lambda^2 I_n$. |

*Remarquons que* ${}^t PP = \lambda^2 I_n$ *revient à* $\dfrac{1}{\lambda} P \in O_n(\mathbb{R})$.

## *Exercice 7*

On a d'une part $x^2 f(x) = x^{3/2}\left(x^{1/2} f(x)\right)$, donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_0^1 x^2 f(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_0^1 x^3 dx\right)\left(\int_0^1 x\, f(x)^2\, dx\right) = \frac{1}{4}\int_0^1 x\, f(x)^2\, dx.$$

Et, comme *f* est positive sur $[0;1]$, on peut écrire $x\, f(x)^2 = x\, f(x)^{1/2}\, f(x)^{3/2}$, d'où, toujours d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_0^1 x\, f(x)^2\, dx\right)^2 \leq \left(\int_0^1 x^2 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 f(x)^3 dx\right).$$

Alors, comme *f* est positive sur $[0;1]$, on a $\int_0^1 x\, f(x)^2\, dx \geq 0$ et :

$$4\left(\int_0^1 x^2 f(x)dx\right)^2 \left(\int_0^1 x\, f(x)^2\, dx\right) \leq \left(\int_0^1 x\, f(x)^2\, dx\right)^2 \leq \left(\int_0^1 x^2 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 f(x)^3 dx\right) \quad \textbf{(*)}.$$

Enfin, comme $f$ est positive et continue sur $[0;1]$, $x \mapsto x^2 f(x)$ est positive et continue sur $[0;1]$, donc $\int_0^1 x^2 f(x)dx \geq 0$ et si $\int_0^1 x^2 f(x)dx = 0$, alors $x \mapsto x^2 f(x)$ est nulle sur $[0;1]$, donc *f* l'est aussi et dans ce cas, l'inégalité recherchée est vérifiée (c'est même une égalité, les deux membres étant nuls).

Si *f* n'est pas nulle sur $[0;1]$, alors $\int_0^1 x^2 f(x)dx > 0$ et on peut simplifier **(*)**, ce qui donne :

$$\boxed{4\left(\int_0^1 x^2 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 x\, f(x)^2\, dx\right) \leq \int_0^1 f(x)^3 dx}$$

## *Exercice 8*

On a $f(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}_+$, donc $f(\mathbb{R}^n)$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, minorée par 0 : elle admet une borne inférieure que nous appellerons µ. On a donc :

$$\mu = \inf\, f(\mathbb{R}^n) = \inf_{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n} f\left((x_1,\dots,x_n)\right).$$

Soit $(P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t)Q(t)\, dt$, définie sur $\mathbb{R}_n[X]^2$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application $t \mapsto e^{-t}t^k$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$.

Or, $e^{-t}t^k = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{1+t^2}\right)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc $t \mapsto e^{-t}t^k$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^k dt$ converge et il va de même pour $\int_0^{+\infty} e^{-t}P(t)Q(t)\, dt$, quels que soient les polynômes *P* et *Q*, car *PQ* est un polynôme, donc une combinaison linéaire finie de $X^k$.

L'application $(P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t}P(t)Q(t)\, dt$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}_n[X]^2$.

De plus, elle symétrique (par commutativité du produit) et bilinéaire (par linéarité de la dérivation).

Enfin, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\langle P,P\rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t}P(t)^2 dt \geq 0$ car $t \mapsto e^{-t}P(t)^2$ est positive sur $\mathbb{R}_+$ et, si cette intégrale est nulle alors $t \mapsto e^{-t}P(t)^2$ est nulle sur $\mathbb{R}_+$ ; alors, $t \mapsto P(t)$ est nulle sur $\mathbb{R}_+$ et *P* admet une infinité de racines, donc est nul.

Finalement, $(P,Q)\mapsto\langle P,Q\rangle=\int_0^{+\infty}e^{-t}P(t)Q(t)\,dt$ est bien définie sur $\mathbb{R}_n[X]^2$ et symétrique, bilinéaire, définie positive, donc c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, posons $P_x=1+x_1X+\dots+x_nX^n$. On a alors :

$$f\left((x_1,\dots,x_n)\right)=\int_0^{+\infty}e^{-t}\left(P_x(t)\right)^2dt=\|P_x\|^2.$$

Si on pose $A=\left\{1+a_1X+\dots+a_nX^n,(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n\right\}=\left\{P\in\mathbb{R}_n[X],P(0)=1\right\}$, on a alors :

$$\mu=\inf_{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n}\|P_x\|^2=\inf_{P\in A}\|P\|^2.$$

Remarquons que $A$ est une partie fermée de $\mathbb{R}_n[X]$. En effet, par définition $A\subset\mathbb{R}_n[X]$ et si $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes de $A$ convergeant vers $P\in\mathbb{R}_n[X]$, on a pour tout $k\in\mathbb{N}$, $P_k(0)=1$, et, en passant à la limite quand $k$ tend vers $+\infty$, on obtient $P(0)=1$, donc $P\in A$.

Or, l'application $\varphi:P\mapsto\|P\|^2$ est continue et minorée par 0 sur $\mathbb{R}[X]$, donc sur le fermé $A$ : elle y admet un minimum. Comme μ est la borne inférieure de φ sur $A$, c'est le minimum, soit :

$$\mu=\min_{P\in A}\|P\|^2=\min_{P\in A}\|P\|^2=\min_{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n}\|P_x\|^2=\min_{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n}f\left((x_1,\dots,x_n)\right)=\min f(\mathbb{R}^n).$$

Ainsi :

$$\boxed{f\text{ admet un minimum sur }\mathbb{R}^n.}$$

Remarquons qu'avec le produit scalaire introduit plus haut, on pouvait aussi écrire :

$$\begin{aligned}\mu&=\inf_{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n}f\left((x_1,\dots,x_n)\right)=\inf_{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n}f\left((-x_1,\dots,-x_n)\right)\\&=\inf_{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n}\int_0^{+\infty}e^{-t}\left(1-x_1t-\dots-x_nt^n\right)^2dt\\&=\inf_{x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n}\int_0^{+\infty}e^{-t}\left(1-Q_x(t)\right)^2dt\qquad\text{avec }Q_x=x_1X+\dots+x_nX^n\\&=\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\|1-Q_x\|^2=\inf_{Q\in F}\|1-Q\|^2\qquad\text{avec }F=\left\{P\in\mathbb{R}_n[X],P(0)=0\right\}\\&=d(1,F)^2\qquad\text{car }F\text{ est un sous-espace de }\mathbb{R}_n[X]\end{aligned}$$

## *Exercice 9*

1) Posons :

$$\begin{aligned}e_1&=(1,0)\\e_2&=(-1,1)\\e_3&=(-1,-2)\end{aligned}$$

On a :

$$\langle e_1\,|\,e_2\rangle=\langle e_1\,|\,e_3\rangle=\langle e_2\,|\,e_3\rangle=-1<0.$$

Donc :

$$\boxed{\text{La famille }\left(e_1,e_2,e_3\right)=\left((1,0),(-1,1),(-1,-2)\right)\text{ convient.}}$$

2) On a $x=\sum_{k=1}^{p} x_k e_k$ et $y=\sum_{k=1}^{p} |x_k| e_k$, donc :

$$\|x\|^2=\left\|\sum_{k=1}^{p} x_k e_k\right\|^2=\sum_{1\le i,j\le p} x_i x_j \left\langle e_i \mid e_j\right\rangle=\sum_{i=1}^{p} x_i^2\|e_i\|^2+\sum_{\substack{1\le i,j\le p\\ i\ne j}} x_i x_j \left\langle e_i \mid e_j\right\rangle.$$

Et de même :

$$\|y\|^2=\sum_{i=1}^{p} x_i^2\|e_i\|^2+\sum_{\substack{1\le i,j\le p\\ i\ne j}} |x_i x_j|\left\langle e_i \mid e_j\right\rangle.$$

Or, pour tous $i,j\in \llbracket 1,p\rrbracket$, on a $x_i x_j\le |x_i x_j|$ et quand $i\ne j$, $\left\langle e_i \mid e_j\right\rangle<0$, donc $|x_i x_j|\left\langle e_i \mid e_j\right\rangle\le x_i x_j\left\langle e_i \mid e_j\right\rangle$.

Alors :

$$\sum_{\substack{1\le i,j\le p\\ i\ne j}} |x_i x_j|\left\langle e_i \mid e_j\right\rangle\le \sum_{\substack{1\le i,j\le p\\ i\ne j}} x_i x_j\left\langle e_i \mid e_j\right\rangle.$$

Donc :

$$\|y\|^2=\sum_{i=1}^{p} x_i^2\|e_i\|^2+\sum_{\substack{1\le i,j\le p\\ i\ne j}} |x_i x_j|\left\langle e_i \mid e_j\right\rangle\le\sum_{i=1}^{p} x_i^2\|e_i\|^2+\sum_{\substack{1\le i,j\le p\\ i\ne j}} x_i x_j\left\langle e_i \mid e_j\right\rangle=\|x\|^2.$$

Et comme les normes sont positives, on obtient :

$$\boxed{\|y\|\le\|x\|}$$

3) Si $x=0$, alors $\|y\|\le\|x\|=0$, donc $\|y\|=0$, soit $y=0$.

Supposons qu'il existe $k_0\in\llbracket 1,p\rrbracket$ tel que $x_{k_0}=0$, alors $y=\sum_{\substack{k=1\\ k\ne k_0}}^{p}|x_k|e_k=0$ et :

$$\sum_{\substack{k=1\\ k\ne k_0}}^{p}|x_k|\left\langle e_k \mid e_{k_0}\right\rangle=0.$$

Or, pour tout $k\in\llbracket 1,p\rrbracket\setminus\{k_0\}$, $|x_k|\ge 0$ et $\left\langle e_k \mid e_{k_0}\right\rangle<0$, donc $|x_k|\left\langle e_k \mid e_{k_0}\right\rangle\le 0$. Le résultat ci-dessus permet de conclure que $|x_k|\left\langle e_k \mid e_{k_0}\right\rangle=0$ pour tout $k\in\llbracket 1,p\rrbracket\setminus\{k_0\}$, et comme $\left\langle e_k \mid e_{k_0}\right\rangle\ne 0$, on obtient $x_k=0$.

Ainsi, si l'un des $x_k$ est nul, ils le sont tous, donc :

$$\boxed{\text{Soit tous les } x_k \text{ sont nuls, soit aucun ne l'est.}}$$

4) Supposons que $p\ge n+2$.

Comme nous sommes en dimension $n$ et la famille $(e_1,\dots,e_{n+1})$ contient $n+1$ vecteurs, elle est liée. Il existe donc des réels $\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}$ non tous nuls tels que :

$$\lambda_1 e_1+\dots+\lambda_{n+1}e_{n+1}=0.$$

Si on pose $x=\lambda_1 e_1+\dots+\lambda_{n+1}e_{n+1}=0$, on est dans la situation de la question 2, donc :

$$y=|\lambda_1|e_1+\dots+|\lambda_{n+1}|e_{n+1}=0.$$

Mais alors :

$$\left\langle y \mid e_{n+2}\right\rangle=|\lambda_1|\left\langle e_1 \mid e_{n+2}\right\rangle+\dots+|\lambda_{n+1}|\left\langle e_{n+1} \mid e_{n+2}\right\rangle=0.$$

Or, pour tout $k \in \; 1,n+1 \;$ , on a $|\lambda_k| \geq 0$ et $\langle e_k \mid e_{n+2} \rangle < 0$, donc $|\lambda_k| \langle e_k \mid e_{n+2} \rangle \leq 0$. La somme de ces nombres négatifs étant nuls, ils sont tous nuls, donc pour tout $k \in \; 1,n+1 \;$ , $|\lambda_k| \langle e_k \mid e_{n+2} \rangle = 0$ et comme $\langle e_k \mid e_{n+2} \rangle \neq 0$ (car $\langle e_k \mid e_{n+2} \rangle < 0$), on obtient $\lambda_k = 0$. Ainsi, tous les $\lambda_k$ sont nuls, ce qui contredit l'hypothèse.

Finalement, $p \geq n+2$ mène à une absurdité, donc :

$$\boxed{p \leq n+1}$$

5) On a déjà répondu à ces questions : d'après la question précédente, la famille $(e_1, \dots, e_{n+1})$ est liée et la famille donnée dans la question 1 convient comme exemple pour $n = 2$ (donc $p = n+1 = 3$).

6) La famille $(e_1, \dots, e_{n+1})$ est liée, donc l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres. Quitte à les renuméroter, supposons que c'est $e_{n+1}$, autrement dit, qu'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que :

$$e_{n+1} = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n .$$

Posons alors $s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\sigma = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i$ . Pour tout $k \in \; 1,n \;$ :

$$\begin{aligned}\langle e_k \mid e_{n+1} \rangle &= \langle e_k \mid \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \rangle = \lambda_1 \langle e_k \mid e_1 \rangle + \dots + \lambda_k \langle e_k \mid e_k \rangle + \dots + \lambda_n \langle e_n \mid e_k \rangle \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i \langle e_k \mid e_i \rangle + \lambda_k \|e_k\|^2 = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i + \lambda_k \|e_k\|^2 = -s + \lambda_k + \lambda_k \|e_k\|^2 = -s + \frac{\lambda_k}{\mu_k}\end{aligned}$$

Comme $\langle e_k \mid e_{n+1} \rangle = -1$, on obtient pour tout $k \in \; 1,n \;$ :

$$-s + \frac{\lambda_k}{\mu_k} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_k = (s-1)\mu_k .$$

On a $\langle e_1 \mid e_{n+1} \rangle = -1 \neq 0$, donc $e_{n+1} \neq 0$ et il existe au moins un $\lambda_k = (s-1)\mu_k$ non nul, ce qui permet de conclure que $s \neq 1$. On a alors :

$$s = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \sum_{k=1}^{n} (s-1)\mu_k = (s-1) \sum_{k=1}^{n} \mu_k .$$

Soit :

$$\underline{s = (s-1)(\sigma - \mu_{n+1})} \qquad \textbf{(1)}$$

Et :

$$\|e_{n+1}\|^2 = \langle e_{n+1} \mid e_{n+1} \rangle = \langle e_{n+1} \mid \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \rangle = \lambda_1 \langle e_{n+1} \mid e_1 \rangle + \dots + \lambda_n \langle e_{n+1} \mid e_n \rangle = -\lambda_1 - \dots - \lambda_n = -s .$$

Or :

$$\mu_{n+1} = \frac{1}{\|e_{n+1}\|^2 + 1} \quad \Leftrightarrow \quad \|e_{n+1}\|^2 = \frac{1}{\mu_{n+1}} - 1 .$$

Donc, $\frac{1}{\mu_{n+1}} - 1 = -s$, soit, avec $s \neq 1$ :

$$\mu_{n+1} = \frac{1}{1-s} .$$

En remplaçant dans **(1)**, on obtient :

$$s=(s-1)(\sigma-\frac{1}{1-s})=(s-1)\sigma+1 \quad \Leftrightarrow \quad (s-1)\sigma=s-1.$$

Enfin, comme $s-1\neq 0$, on obtient $\sigma=1$, soit :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n+1}\mu_i=1}$$

On a alors $e_{n+1}=\lambda_1 e_1+\ldots+\lambda_n e_n=(s-1)\mu_1 e_1+\ldots+(s-1)\mu_n e_n=(s-1)(\mu_1 e_1+\ldots+\mu_n e_n)$, $\sum_{i=1}^{n}\mu_i e_i=\frac{1}{s-1}e_{n+1}$, et :

$$\sum_{i=1}^{n+1}\mu_i e_i=\sum_{i=1}^{n}\mu_i e_i+\mu_{n+1}e_{n+1}=\frac{1}{s-1}e_{n+1}+\mu_{n+1}e_{n+1}=\left(\frac{1}{s-1}+\mu_{n+1}\right)e_{n+1}.$$

Or, on a vu plus haut que $\mu_{n+1}=\frac{1}{1-s}=-\frac{1}{s-1}$, donc $\frac{1}{s-1}+\mu_{n+1}=0$ et ainsi :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n+1}\mu_i e_i=0}$$

7) Quitte à renuméroter les $e_k$, il suffit de montrer que la famille $(e_1,\ldots,e_n)$ est libre, pour prouver que toute sous-famille de $(e_1,\ldots,e_{n+1})$ contenant *n* vecteurs est libre.

Soit des réels $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ tels que :

$$\lambda_1 e_1+\ldots+\lambda_n e_n=0.$$

Comme dans la question 2, on obtient $|\lambda_1|e_1+\ldots+|\lambda_n|e_n=0$ et

$$\langle|\lambda_1|e_1+\ldots+|\lambda_n|e_n\mid e_{n+1}\rangle=|\lambda_1|\langle e_1\mid e_{n+1}\rangle+\ldots+|\lambda_n|\langle e_n\mid e_{n+1}\rangle=-|\lambda_1|-\ldots-|\lambda_n|=0.$$

Alors, $\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|=0$, donc tous les $\lambda_k$ sont nuls.

Ceci prouve que la famille $(e_1,\ldots,e_n)$ est libre et ainsi, toute sous-famille de $(e_1,\ldots,e_{n+1})$ contenant *n* vecteurs est libre.

Or, toute sous-famille stricte de $(e_1,\ldots,e_{n+1})$ est une sous-famille d'une famille de *n* vecteurs de $(e_1,\ldots,e_{n+1})$ qui est libre, donc :

$$\boxed{\text{Toute sous-famille stricte de } (e_1,\ldots,e_{n+1}) \text{ est libre.}}$$