# *Corrigés des TD du chapitre 11*

## *Exercice 1*

Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in[0,1]$, $t^n\in[0,1]$ et la fonction $f_n : t\mapsto f(t^n)$ est définie sur $[0,1]$.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n$ est continue sur $[0,1]$ comme composée de fonctions continues (donc $I_n$ est bien définie).
- Pour tout $t\in\left[0,1\right[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} t^n=0$, et par continuité de $f$ en 0, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(t^n)=f(0)$.

  De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(1)=f(1)$. Donc, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $t\mapsto\begin{cases} f(0) & \text{quand } t\in\left[0,1\right[ \\ f(1) & \text{quand } t=1\end{cases}$ qui est continue par morceaux sur $[0,1]$.
- La fonction $f$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc elle est bornée : il existe $M\in\mathbb{R}_+$ tel que $|f|\le M$. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in[0,1]$, $|f_n(t)|=|f(t^n)|\le M$ et $t\mapsto M$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,1]$.

Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n=\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)dt=\int_0^1\left[\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right]dt=\int_0^1 f(0)dt\,.$$

Soit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n=f(0)}$$

## *Exercice 2*

La série $\sum|a_n|$ converge (donc $\sum a_n$ aussi et $a_n\to0$) et $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$ .

Comme $a_n\to0$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée : il existe $M\in\mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|a_n|\le M$ .

On a alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\left|\frac{a_n}{n!}x^n\right|=\frac{|a_n|}{n!}|x|^n\le M\frac{|x|^n}{n!}$ et $M\frac{|x|^n}{n!}\to0$, donc $\left(\frac{a_n}{n!}x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et ainsi, le rayon de convergence de la série entière $\sum\frac{a_n}{n!}x^n$ est infini, autrement dit :

$$\boxed{S \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

On a :

$$I=\int_0^{+\infty}S(x)e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}x^n\right)e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}x^ne^{-x}\right)dx=\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\right)dx$$

avec $f_n(x)=\frac{a_n}{n!}x^ne^{-x}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction $x\mapsto x^n e^{-x}$ et donc $f_n$ sont continues sur $\mathbb{R}$ (produit).

De plus, on a $x^n e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{-x/2})$ et la fonction $x\mapsto e^{-x/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Alors, $x\mapsto x^n e^{-x}$ et donc $f_n$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

Et, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $X\in\mathbb{R}_+$, on a par IPP :

$$\int_0^X x^{n+1}e^{-x}dx=\left[-x^{n+1}e^{-x}\right]_0^X-\int_0^X\left(-(n+1)x^n e^{-x}\right)dx=-X^{n+1}e^{-X}+(n+1)\int_0^X x^n e^{-x}dx.$$

Donc :

$$\int_0^{+\infty} x^{n+1}e^{-x}dx=(n+1)\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx.$$

Comme $x\mapsto x^n e^{-x}$ est positive et non nulle sur $\mathbb{R}_+$, on a $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx>0$ et ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$ :

$$\frac{\int_0^{+\infty} x^{n+1}e^{-x}dx}{\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx}=n+1.$$

Avec un produit télescopique, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}$ :

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx=n!\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=n! \quad\Rightarrow\quad \int_0^{+\infty} f_n(x)dx=\frac{a_n}{n!}\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx=a_n.$$

Ainsi :

- pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ ;
- la série $\sum f_n$ converge simplement vers $x\mapsto S(x)e^{-x}$, qui est continue (et même de classe $C^\infty$) sur $\mathbb{R}$ (car produit d'une somme d'une série entière et d'une fonction exponentielle) ;
- $\sum\int_0^{+\infty}|f_n|=\sum|a_n|$ converge.

Donc :

$$x\mapsto S(x)e^{-x} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } \int_0^{+\infty} S(x)e^{-x}dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n.$$

Ceci revient à dire que :

$$\boxed{I=\int_0^{+\infty} S(x)e^{-x}dx \text{ converge et vaut } \sum_{n=0}^{+\infty}a_n.}$$

## ***Exercice 3***

1) a. L'intégrale $I=\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}dt$ est impropre en 0 et $+\infty$. Mais :

- $\lim_{t\to0}\frac{t}{e^t-1}=1$ donc $t\mapsto\frac{t}{e^t-1}$ se prolonge par continuité en 0 ;
- $\frac{t}{e^t-1}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(e^{-t/2}\right)$ et et la fonction $t\mapsto e^{-t/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Donc, $I=\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}dt$ converge, autrement dit :

$$\boxed{I \text{ est bien définie.}}$$

b. Pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $e^{-t}\in\,]0,1[$, donc la série géométrique $\sum(e^{-t})^n$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-(n+1)t}=e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-t})^n=\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}=\frac{1}{e^t-1}.$$

D'où, pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$ :

$$\boxed{\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}te^{-(n+1)t}}$$

c. En intégrant par parties, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $X\in\mathbb{R}_+$ :

$$\begin{aligned}\int_0^X te^{-(n+1)t}dt&=\left[-\frac{1}{n+1}te^{-(n+1)t}\right]_0^X+\frac{1}{n+1}\int_0^X e^{-(n+1)t}dt\\&=\left[-\frac{1}{n+1}te^{-(n+1)t}\right]_0^X+\frac{1}{n+1}\left[-\frac{1}{n+1}e^{-(n+1)t}\right]_0^X\\&=-\left(\frac{1}{n+1}X+\frac{1}{(n+1)^2}\right)e^{-(n+1)X}+\frac{1}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

Et en faisant tendre $X$ vers $+\infty$, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}$ :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}te^{-(n+1)t}dt=\frac{1}{(n+1)^2}}$$

Alors, si on note $f_n:t\mapsto te^{-(n+1)t}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

- pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ ;
- $\sum f_n$ converge simplement vers $t\mapsto\frac{t}{e^t-1}$, qui, prolongée par continuité en 0, est continue sur $\mathbb{R}_+$ ;
- $\sum\int_0^{+\infty}|f_n|=\sum\int_0^{+\infty}f_n(t)dt=\sum\frac{1}{(n+1)^2}$ converge.

Donc :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(t)dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Soit :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}dt=\frac{\pi^2}{6}}$$

2) a. Posons $f(x,t)=\dfrac{t^x-1}{\ln t}=\dfrac{e^{x\ln t}-1}{\ln t}$ pour $(x,t)\in\,]-1,+\infty[\times]0,1[$. On a pour tout $x\in\,]-1,+\infty[$ :

$$\lim_{t\to 0} f(x,t)=\left\{\begin{array}{ll}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{t^{-x}\ln t} & \text{quand } x<0\\ \lim\limits_{t\to 0} 0 & \text{quand } x=0\\ \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-1}{\ln t} & \text{quand } x>0\end{array}\right\}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 1} f(x,t)=x\lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}=x.$$

Donc, $t\mapsto f(x,t)$ est prolongeable par continuité en 0 et 1. Alors :

- pour tout $x\in\,]-1,+\infty[$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0,1[$ ;
- pour tout $t\in\,]0,1[$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $C^1$ sur $]-1,+\infty[$ avec $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)=e^{x\ln t}=t^x$ ;
- pour tout $x\in\,]-1,+\infty[$, $t\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)=e^{x\ln t}$ est continue sur $]0,1[$ ;

Enfin, pour tout $a\in\,]-1,+\infty[$ et pour tout $x\in[a,+\infty[$, on a pour tout $t\in\,]0,1[$ :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|=e^{x\ln t}\le e^{a\ln t}=t^a.$$

Et $t\mapsto t^a$ positive, continue et intégrable sur $]0,1[$ (avec $\displaystyle\int_0^1 t^a dt=\frac{1}{a+1}$).

Alors :

$$J: x\mapsto \int_0^1 f(x,t)dt \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [a,+\infty[ \text{ avec } J'(x)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt=\int_0^1 t^x dt=\frac{1}{x+1}.$$

Ceci étant vrai pour tout $a\in\,]-1,+\infty[$ :

$$\boxed{J \text{ est définie et de classe } C^1 \text{ sur } ]-1,+\infty[ \text{ avec pour tout } x\in\,]-1,+\infty[,\ J'(x)=\frac{1}{x+1}.}$$

b. Avec $J'(x)=\dfrac{1}{x+1}$ sur $]-1,+\infty[$, on a immédiatement pour tout $x\in\,]-1,+\infty[$ :

$$J(x)=\ln(x+1)+k$$

où $k$ est une constante.

On a vu dans l'exercice 2)k. du TD 9 que $\displaystyle\int_0^1\frac{t-1}{\ln t}dt=\ln 2$, soit $J(1)=\ln 2$.

Or, $J(1)=\ln(1+1)+k=\ln 2+k$ donc $k=0$ et finalement pour tout $x\in\,]-1,+\infty[$ :

$$\boxed{J(x)=\ln(x+1)}$$

***Exercice 4***

Posons $f(x,t)=\dfrac{1}{1+t^2+e^{-xt}}$.

- La fonction *f* est définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Quel que soit $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, on a $0\le f(x,t)\le\dfrac{1}{1+t^2}$ et $t\mapsto\dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty}f(x,t)dt$ converge.

Ainsi :

$$\boxed{F \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$, on a $e^{-bt}\le e^{-at}$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, avec égalité en $t=0$ uniquement, donc $f(a,t)\le f(b,t)$ avec égalité en $t=0$ uniquement et ainsi :

$$F(a)<F(b).$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{F \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

On a :

$$F(0)=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{2+t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{+\infty}.$$

Soit :

$$\boxed{F(0)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}$$

Pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}_-^*\times\mathbb{R}_+$, on a $0<f(x,t)\le\dfrac{1}{e^{-xt}}=e^{xt}$, donc :

$$0\le F(x)\le\int_0^{+\infty}e^{xt}dt=\left[\frac{1}{x}e^{xt}\right]_0^{+\infty}=-\frac{1}{x}.$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}F(x)=0}$$

On a vu que $f:(x,t)\mapsto\dfrac{1}{1+t^2+e^{-xt}}$ est définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ et que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue, donc continue par morceaux, sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+$, on a :

$$f(x,t)\xrightarrow[x\to a]{}\ell(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & \text{quand } t=0\\[2mm] \dfrac{1}{1+t^2} & \text{quand } t>0\end{cases}$$

La fonction $\ell$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

Enfin, pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, on a $|f(x,t)|\le\dfrac{1}{1+t^2}$ et $t\mapsto\dfrac{1}{1+t^2}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Donc, d'après le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2+e^{-xt}}=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\left[\arctan t\right]_0^{+\infty}.$$

Soit :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}F(x)=\frac{\pi}{2}}$$

### *Exercice 5*

1) Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $t\mapsto\dfrac{\cos t}{t+x}$ est définie et continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, donc *f* est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$ :

- pour tout $x\in[a,+\infty[$, $t\mapsto\dfrac{\cos t}{t+x}$ est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ ;
- pour tout $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $x\mapsto\dfrac{\cos t}{t+x}$ est continue sur $[a,+\infty[$ ;
- pour tout $(x,t)\in[a,+\infty[\times\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $0\le\dfrac{\cos t}{t+x}\le\dfrac{\cos t}{t+a}$ et $t\mapsto\dfrac{\cos t}{t+a}$ est continue et intégrable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Donc, $f(x)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{t+x}\,dt$ est continue sur $[a,+\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$ :

$$\boxed{f\text{ est bien définie et continue sur }\mathbb{R}_+^*.}$$

2) Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$g(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{t+x}\,dt-\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{x}\,dt=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\cos t}{t+x}-\frac{\cos t}{x}\right)dt=\int_0^{\pi/2}\frac{-t\cos t}{x(t+x)}\,dt.$$

Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ :

$$|g(x)|=\int_0^{\pi/2}\frac{t\cos t}{x(t+x)}\,dt\le\int_0^{\pi/2}\frac{t\cos t}{x^2}\,dt=\frac{1}{x^2}\int_0^{\pi/2}t\cos t\,dt=\frac{1}{x^2}\,\frac{\pi-2}{2}.$$

Donc, on a bien :

$$\boxed{g(x)\underset{x\to+\infty}{=}O\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

On a :

$$g(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{t+x}dt-\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{x}dt = f(x)-\frac{1}{x}\int_0^{\pi/2}\cos t dt = f(x)-\frac{1}{x}.$$

Or, $g(x)=\underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ implique $g(x)=\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$, donc :

$$g(x)=f(x)-\frac{1}{x}=\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ce qui implique :

$$\boxed{f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x}}$$

3) Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$h(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{t+x}dt-\int_0^{\pi/2}\frac{1}{t+x}dt=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t-1}{t+x}dt.$$

Or, $-\frac{1}{2}t^2\leq\cos t-1\leq 0$ sur $\mathbb{R}_+$, donc sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, d'où pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ :

$$|h(x)|=\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos t}{t+x}dt\leq\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{t^2}{t}dt\leq\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}t\,dt=\frac{\pi^2}{16}.$$

Or, $\int_0^{\pi/2}\frac{1}{t+x}dt=\ln\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\ln x$, donc pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ :

$$|h(x)|=\left|f(x)-\ln\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\ln x\right|\leq\frac{\pi^2}{16}.$$

Alors, pour tout $x\in\,]0,1[$ :

$$\left|\frac{f(x)}{-\ln x}-1\right|=\frac{1}{-\ln x}|f(x)+\ln x|\leq\frac{1}{-\ln x}\left[\left|f(x)+\ln x-\ln\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right|+\ln\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right]\leq\frac{1}{-\ln x}\left[\frac{\pi^2}{16}+\ln\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right].$$

Et comme $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{-\ln x}\left[\frac{\pi^2}{16}+\ln\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right]\right)=0$, on obtient par comparaison, $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{-\ln x}=1$, soit :

$$\boxed{f(x)\underset{x\to0^+}{\sim}-\ln x}$$

***Exercice 6***

1) Soit $f(x,t)=\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}\times[0,1]$ et :

- pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue, donc intégrable, sur le segment $[0,1]$ ;
- pour tout $t\in[0,1]$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ ;
- pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=-2xe^{-x^2(1+t^2)}$ est continue sur $[0,1]$ ;

- pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,1]$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leq\sqrt{\dfrac{2}{e(1+t^2)}}$ (il suffit d'étudier $x\mapsto 2xe^{-x^2(1+t^2)}$ sur $\mathbb{R}$) et la fonction $t\mapsto\sqrt{\dfrac{2}{e(1+t^2)}}$ est continue, donc intégrable, sur le segment $[0,1]$.

Alors, la fonction $F$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x\mapsto -2\int_0^1 xe^{-x^2(1+t^2)}dt$.

La fonction $x\mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $g:x\mapsto\int_0^x e^{-t^2}dt$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$. Comme $G=g^2$, $G$ est aussi de de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et $G'=2g'g$.

Finalement :

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } x\in\mathbb{R},\ F'(x)=-2\int_0^1 xe^{-x^2(1+t^2)}dt \text{ et } G'(x)=2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt.}$$

2) Comme $F$ et $G$ le sont, $F+G$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$ :

$$F'(x)+G'(x)=-2\int_0^1 xe^{-x^2(1+t^2)}dt+2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt=2e^{-x^2}\left(\int_0^x e^{-t^2}dt-\int_0^1 xe^{-(xt)^2}dt\right).$$

En posant $u=xt$, on obtient $\int_0^1 xe^{-(xt)^2}dt=\int_0^x e^{-u^2}du$ et ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(F+G)'(x)=0$, donc ;

$$\boxed{F+G \text{ est constante sur } \mathbb{R}.}$$

3) Pour tout pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,1]$, on a $e^{-x^2(1+t^2)}=e^{-x^2}e^{-x^2t^2}\leq e^{-x^2}$ donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ :

$$|F(x)|=F(x)=\int_0^1\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt\leq e^{-x^2}\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{4}e^{-x^2}.$$

D'après le théorème des gendarmes, on obtient immédiatement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}F(x)=0}$$

Remarquons préalablement que $\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt$ est impropre en $+\infty$, mais $e^{-t^2}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, donc $\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt$ converge, donc :

$$\lim_{x\to+\infty}G(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2=\left(\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt\right)^2.$$

Comme $F+G$ est constante sur $\mathbb{R}$, on a, avec $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0=G(0)$ :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[F(x)+G(x)\right]=F(0)+G(0)\quad\Leftrightarrow\quad\left(\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt\right)^2=F(0)=\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}.$$

Et comme $\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt>0$, on obtient :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

4) Comme $t \mapsto e^{-t^2}$ est paire sur $\mathbb{R}$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$, donc :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}}$$

Remarquons préalablement que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$ est impropre en 0 et $+\infty$, mais :

- $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ donc $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ converge ;
- $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge.

Ainsi :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt \text{ converge.}$$

En posant $u = \sqrt{t}$ dans $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\frac{1}{2\sqrt{t}}dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du\,.$$

Soit :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = \sqrt{\pi}}$$

## *Exercice 7*

1) Pour $f \in E$, posons $h(x,t) = e^{-xt} f(t)$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $f \in E$, la fonction $t \mapsto h(x,t) = e^{-xt} f(t)$ est continue $\mathbb{R}_+$. De plus, $|f(t)| \underset{t\to+\infty}{=} O(1)$, donc $e^{-xt}|f(t)| \underset{t\to+\infty}{=} O(e^{-xt})$. Or, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt$ converge (car $x > 0$), ce qui permet de conclure que :

$$\mathscr{L}(f) \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}_+^*.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

- pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto h(x,t) = e^{-xt} f(t)$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t) = (-t)^k e^{-xt} f(t)\ ;$$

- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t) = (-t)^k e^{-xt} f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ ;

  de plus, $\left|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)\right| \underset{t\to+\infty}{=} O(t^k e^{-xt})$ et $t^k e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc $\int_0^{+\infty} t^k e^{-xt}dt$ converge et ainsi, $t \mapsto \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ ;

- pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$ et tout $(x,t)\in[a,+\infty[\times\mathbb{R}_+$, on a $\left|t\mapsto\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)\right|\le t^k e^{-at}f(t)$ et on vient de voir que $t\mapsto t^k e^{-at}f(t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Alors, $x\mapsto\int_0^{+\infty}e^{-xt}f(t)\,dt$ est de classe $C^\infty$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$, soit pour tout $f\in E$ :

$$\boxed{\mathscr{L}(f)\text{ est de classe }C^\infty\text{ sur }\mathbb{R}_+^*.}$$

De plus, on a pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\mathscr{L}(f)^{(k)}:x\mapsto\int_0^{+\infty}(-t)^k e^{-xt}f(t)\,dt$.

2) Soit $f\in E$. On veut $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-xt}f(t)\,dt$.

Comme *f* est bornée sur $\mathbb{R}_+$, il existe $M\in\mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $|f(t)|\le M$ et :

$$|\mathscr{L}(f)(x)|=\left|\int_0^{+\infty}e^{-xt}f(t)\,dt\right|\le\int_0^{+\infty}\left|e^{-xt}f(t)\right|dt=\int_0^{+\infty}e^{-xt}\,|f(t)|\,dt\le M\int_0^{+\infty}e^{-xt}dt=\frac{M}{x}.$$

Ceci donne immédiatement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\mathscr{L}(f)(x)=0}$$

3) Soit $g:t\mapsto\frac{\sin t}{t}$.

La fonction *g* est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient de telles fonctions et, comme $\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$, elle se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0)=1$.

La fonction ainsi prolongée, renommée *g*, est continue sur le segment $[0,1]$, donc y est bornée et pour tout $t\in[1,+\infty[$, on a $|g(t)|=\frac{|\sin t|}{t}\le\frac{1}{t}\le1$, donc *g* est aussi bornée sur $[1,+\infty[$.

Ainsi, *g* est bornée sur $[0,1]$ et $[1,+\infty[$, donc sur $\mathbb{R}_+$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\text{La fonction }t\mapsto\frac{\sin t}{t}\text{ se prolonge par continuité en une fonction }g\text{ de }E.}$$

D'après la question 1, on a pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\mathscr{L}(g)'(x)=\int_0^{+\infty}(-t)e^{-xt}g(t)\,dt$, soit :

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(g)'(x)&=\int_0^{+\infty}(-t)e^{-xt}\,\frac{\sin t}{t}\,dt=-\int_0^{+\infty}e^{-xt}\sin t\,dt=\mathrm{Im}\left(-\int_0^{+\infty}e^{(-x+i)t}dt\right)\\&=\mathrm{Im}\left(\left[\frac{-1}{-x+i}e^{(-x+i)t}\right]_0^{+\infty}\right)=\mathrm{Im}\left(\left[\frac{x+i}{x^2+1}e^{-xt}e^{it}\right]_0^{+\infty}\right)=-\,\mathrm{Im}\left(\frac{x+i}{x^2+1}\right)\end{aligned}$$

Soit pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ :

$$\boxed{\mathscr{L}(g)'(x)=-\frac{1}{x^2+1}}$$

On a alors pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\mathscr{L}(g)(x)=-\arctan x+C$ où C est une constante d'intégration.

Or, d'après la question 2, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathscr{L}(g)(x)=0$, soit $-\dfrac{\pi}{2}+C=0$ et donc $C=\dfrac{\pi}{2}$.

Finalement, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ :

$$\boxed{\mathscr{L}(g)(x)=\frac{\pi}{2}-\arctan x=\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}$$

## *Exercice 8*

1) Posons $f(s,x)=e^{-x}x^{s-1}$ pour tout $(s,x)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ fixé, la fonction $s\mapsto f(s,x)$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec, pour tout $k\in\mathbb{N}$ :

$$\frac{\partial^k f}{\partial s^k}(s,x)=(\ln x)^k e^{-x}x^{s-1}.$$

- Pour tout $s\in\mathbb{R}_+^*$ et tout $k\in\mathbb{N}$, $x\mapsto\dfrac{\partial^k f}{\partial s^k}(s,x)$ est continue, donc continue par morceaux, sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $k\in\mathbb{N}$, tous $a,b\in\mathbb{R}_+^*$ tels que $a\le 1\le b$ et tout $(s,x)\in[a,b]\times\mathbb{R}_+^*$ :

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial s^k}(s,x)\right|=\left|\ln x\right|^k e^{-x}x^{s-1}\le\varphi(x)=\begin{cases}\left|\ln x\right|^k e^{-x}x^{a-1} & \text{pour } x\le 1\\ \left|\ln x\right|^k e^{-x}x^{b-1} & \text{pour } x\ge 1\end{cases}$$

  La fonction φ est continue (même en 1 où elle vaut 0), donc continue par morceaux, et positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

  - pour $x\le 1$, $\varphi(x)=\left|\ln x\right|^k e^{-x}x^{a-1}=\left|\ln x\right|^k e^{-x}x^{\frac{a}{2}}x^{\frac{a}{2}-1}\underset{x\to 0}{=}o(x^{\frac{a}{2}-1})$ (car $\lim\limits_{x\to 0}\left|\ln x\right|^k e^{-x}x^{\frac{a}{2}}=0$ par croissances comparées), et l'intégrale de Riemann $\int_0 x^{\frac{a}{2}-1}dx$ converge (car $\dfrac{a}{2}-1>-1$), donc $\int_0\varphi(x)\,dx$ converge ;
  - pour $x\ge 1$, $\varphi(x)=\left|\ln x\right|^k e^{-x}x^{b-1}\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\ln x\right|^k e^{-x}x^{b+1}=0$ par croissances comparées), et l'intégrale de Riemann $\int^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2}$ converge, donc $\int^{+\infty}\varphi(x)\,dx$ converge

  Ainsi, la fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Tout ceci permet de conclure que Γ est de classe $C^\infty$ sur tout $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$ (avec $a\le 1\le b$), donc :

$$\boxed{\Gamma \text{ est définie et de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

De plus, on a pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\Gamma^{(k)}(s)=\int_0^{+\infty}(\ln x)^k e^{-x}x^{s-1}dx$ pour tout $s\in\mathbb{R}_+^*$.

2) Pour tout $s\in\mathbb{R}_+^*$, on a en intégrant par parties (on vérifie que toutes les intégrales convergent) :

$$\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^s dx=\left[-e^{-x}x^s\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}sx^{s-1}e^{-x}dx=s\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx.$$

Soit pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$\boxed{\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)}$$

3) On a $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty}$, donc :

$$\boxed{\Gamma(1) = 1}$$

On a pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a $\Gamma(m+1) = m\Gamma(m)$. Une récurrence simple permet de prouver que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(m) \neq 0$ et on peut alors écrire pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m \geq 2$ :

$$\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m)} = m \quad \Rightarrow \quad \prod_{k=1}^{m-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k)} = \prod_{k=1}^{m-1} k \quad \Rightarrow \quad \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(1)} = (m-1)! \quad \Rightarrow \quad \Gamma(m) = (m-1)!$$

La relation reste valable pour $m = 1$ et ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ :

$$\boxed{\Gamma(m) = (m-1)!}$$

On a $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\frac{1}{2}-1} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$ et d'après l'exercice 6 :

$$\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}}$$

On a pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(m+\frac{1}{2}+1\right) = \left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)$.

Avec $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \neq 0$, une récurrence simple permet de prouver que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) \neq 0$ et on peut alors écrire pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ :

$$\frac{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)} = m+\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \prod_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \prod_{k=0}^{m-1}\left(k+\frac{1}{2}\right).$$

Et :

$$\prod_{k=0}^{m-1}\left(k+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^m}\prod_{k=0}^{m-1}(2k+1) = \frac{1}{2^m} 1\times 3\times \ldots \times(2m-3)\times(2m-1) = \frac{1}{2^m}\frac{(2m)!}{2\times 4\times \ldots \times(2m-2)\times(2m)} = \frac{(2m)!}{2^{2m} m!}.$$

Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ :

$$\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\prod_{k=0}^{m-1}\left(k+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\frac{(2m)!}{2^{2m} m!}.$$

La relation reste valable pour $m = 0$ et ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}$ :

$$\boxed{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\frac{(2m)!}{2^{2m} m!}}$$

4) En prenant $s=1$ dans la relation de la question 2, on obtient $\Gamma(2)=\Gamma(1)$.

Or, on a vu que $\Gamma$ est dérivable sur $[1,2]$, donc on peut utiliser le théorème de Rolle pour conclure que :

$$\boxed{\text{Il existe } \alpha\in\,]1,2[\text{ tel que } \Gamma'(\alpha)=0.}$$

On a pour tout $s\in\mathbb{R}_+^*$, $\Gamma''(s)=\int_0^{+\infty}(\ln x)^2e^{-x}x^{s-1}dx\geq 0$, donc :

$$\boxed{\Gamma' \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

Comme $\Gamma'$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et s'annule en $\alpha\in\,]1,2[$, on a $\Gamma'(s)\leq 0$ sur $]0,\alpha]$ et $\Gamma'(s)\geq 0$ sur $[\alpha,+\infty[$. Alors :

$$\boxed{\Gamma \text{ est décroissante sur } ]0,\alpha] \text{ et croissante sur } [\alpha,+\infty[.}$$

Pour construire le tableau de variation complet de $\Gamma$, il faut déterminer ses limites en 0 et $+\infty$.

On a vu que pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, $\Gamma(m)=(m-1)!$ donc $\lim\limits_{m\to+\infty}\Gamma(m)=+\infty$ et la fonction $\Gamma$ n'est pas bornée au voisinage de $+\infty$. Comme elle croissante sur $[\alpha,+\infty[$, on a :

$$\boxed{\lim_{s\to+\infty}\Gamma(s)=+\infty}$$

On a vu que pour tout $s\in\mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$. Or, $\Gamma$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc en 1, d'où :

$$\lim_{s\to 0}\Gamma(s+1)=\lim_{x\to 1}\Gamma(x)=\Gamma(1)=1.$$

Ainsi, $\lim\limits_{s\to 0}s\Gamma(s)=1$, donc :

$$\boxed{\Gamma(s)\underset{s\to 0}{\sim}\frac{1}{s}\quad\text{et}\quad\lim_{s\to 0}\Gamma(s)=+\infty}$$

On obtient le tableau :

| $s$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Gamma$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\Gamma(\alpha)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

5) Par convexité de la fonction exponentielle, on a $1+u\leq e^u$ pour tout $u\in\mathbb{R}$.

Avec $u=-\frac{x}{m}$, on obtient pour tout $x\in[0;m]$, $0\leq 1-\frac{x}{m}\leq e^{-\frac{x}{m}}$. En élevant à la puissance *m*, ceci donne pour tout $m\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in[0;m]$ :

$$\boxed{\left(1-\frac{x}{m}\right)^m\leq e^{-x}}$$

On a pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0;m]$ :

$$\left(1-\frac{x}{m}\right)^m = \exp\left[m\ln\left(1-\frac{x}{m}\right)\right] = \exp\left[m\left(-\frac{x}{m}+\underset{m\to+\infty}{o}\left(\frac{x}{m}\right)\right)\right] = e^{-x+\underset{m\to+\infty}{o}(1)} = e^{-x}+\underset{m\to+\infty}{o}(1).$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{m\to+\infty}\left(1-\frac{x}{m}\right)^m = e^{-x}}$$

6) Pour tout réel $s>0$ et tout $m \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto \left(1-\frac{x}{m}\right)^m x^{s-1}$ est continue sur $[0,m]$ et, en posant le changement de variable $t=\frac{x}{m}$ ($x \mapsto \frac{x}{m}$ est de classe $C^1$, bijective de $[0,m]$ dans $[0,1]$), on obtient :

$$\int_0^m \left(1-\frac{x}{m}\right)^m x^{s-1}dx = \int_0^1 (1-t)^m (mt)^{s-1} m dt = m^s \int_0^1 (1-t)^m t^{s-1}dt .$$

En intégrant par parties entre $a \in ]0,1]$ et 1 ($t \mapsto (1-t)^m$ et $t \mapsto \frac{1}{s}t^s$ sont de classe $C^1$ sur $[a,1]$), on aboutit à :

$$\int_a^1 (1-t)^m t^{s-1}dt = \left[(1-t)^m \frac{t^s}{s}\right]_a^1 - \int_a^1 \left[-m(1-t)^{m-1}\right]\frac{t^s}{s}dt = -(1-a)^m\frac{a^s}{s} + \frac{m}{s}\int_a^1 (1-t)^{m-1}t^s dt .$$

Et en faisant tendre $a$ vers 0 (les intégrales, impropres en 0 seulement, convergent car $(1-t)^{m-1}t^s \underset{t\to 0}{\sim} t^s$ et $(1-t)^m t^{s-1} \underset{t\to 0}{\sim} t^{s-1}$, et, comme $s>0$, les intégrales de Riemann $\int_0 t^{s-1}dt$ et $\int_0 t^s dt$ convergent), on obtient pour tout réel $s>0$ et tout $m \in \mathbb{N}^*$ :

$$\int_0^1 (1-t)^m t^{s-1}dt = \frac{m}{s}\int_0^1 (1-t)^{m-1}t^s dt .$$

Alors :

$$\int_0^1 (1-t)^m t^{s-1}dt = \frac{m}{s}\int_0^1 (1-t)^{m-1}t^s dt = \frac{m}{s}\int_0^1 (1-t)^{m-1}(t-1+1)t^{s-1}dt = -\frac{m}{s}\int_0^1 (1-t)^m t^{s-1}dt + \frac{m}{s}\int_0^1 (1-t)^{m-1}t^{s-1}dt .$$

D'où, pour tout réel $s>0$ et tout $m \in \mathbb{N}^*$ :

$$\int_0^1 (1-t)^m t^{s-1}dt = \frac{m}{s+m}\int_0^1 (1-t)^{m-1}t^{s-1}dt .$$

Pour $s>0$ fixé, posons alors, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ :

$$I_m = \frac{(s+1)(s+2)...(s+m)}{m!}\int_0^1 (1-t)^m t^{s-1}dt .$$

On a alors pour tout $m \geq 2$ :

$$I_m = \frac{m}{s+m}\frac{(s+1)(s+2)...(s+m)}{m!}\int_0^1 (1-t)^{m-1}t^{s-1}dt = \frac{(s+1)(s+2)...(s+m-1)}{(m-1)!}\int_0^1 (1-t)^{m-1}t^{s-1}dt = I_{m-1}.$$

La suite $(I_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est donc constante. Ainsi, pour tout pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ :

$$I_m = I_1 = \frac{s+1}{1!}\int_0^1 (1-t)t^{s-1}dt = (s+1)\int_0^1 (1-t)t^{s-1}dt = (s+1)\frac{1}{s+1}\int_0^1 t^{s-1}dt = \left[\frac{t^s}{s}\right]_0^1 = \frac{1}{s}.$$

On a donc $\dfrac{(s+1)(s+2)...(s+m)}{m!}\int_0^1 (1-t)^m t^{s-1}dt = \dfrac{1}{s}$ et ainsi, pour tout réel $s>0$ et tout $m\in\mathbb{N}^*$ :

$$\boxed{\int_0^m \left(1-\frac{x}{m}\right)^m x^{s-1}dx = \frac{m^s m!}{s(s+1)(s+2)...(s+m-1)(s+m)}}$$

7) Soit un réel $s>0$ fixé. Posons pour tout $m\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}_+$ :

$$\gamma(x)=e^{-x}x^{s-1} \quad f_m(x)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{x}{m}\right)^m x^{s-1} & \text{pour } x\in[0;m]\\ 0 & \text{pour } x\in[m;+\infty[\end{cases}$$

- Pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, $f_m$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (même en *m*, où elle vaut 0).
- D'après la question 5, on a pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{m\to+\infty} f_m(x)=\gamma(x)$ avec $\gamma$ continue sur $\mathbb{R}_+$.
- A nouveau d'après la question 5, on a pour tout $m\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in[0;m]$, $|f_m(x)|=f_m(x)\le\gamma(x)$.

  Ceci reste vrai pour $x\in[m;+\infty[$, donc pour tout $m\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}_+$ :

  $$|f_m(x)|\le\gamma(x).$$

  Et $\gamma$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (d'intégrale $\Gamma(s)$).

Alors, on a :

$$\lim_{m\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_m(x)\,dx=\int_0^{+\infty}\gamma(x)\,dx=\Gamma(s).$$

Or, d'après la question précédente, on a pour tout $m\in\mathbb{N}^*$ :

$$\int_0^{+\infty} f_m(x)\,dx=\int_0^m\left(1-\frac{x}{m}\right)^m x^{s-1}dx=\frac{m!\,m^s}{s(s+1)...(s+m)}.$$

Ainsi, pour tout réel $s>0$ :

$$\boxed{\lim_{m\to+\infty}\frac{m!\,m^s}{s(s+1)...(s+m)}=\Gamma(s)}$$

8) On pose pour $x\in[1;+\infty[$ :

$$\varphi(x)=\int_x^{x+1}\ln\big(\Gamma(t)\big)dt=\int_1^{x+1}\ln\big(\Gamma(t)\big)dt-\int_1^{x}\ln\big(\Gamma(t)\big)dt \ .$$

La fonction $\varphi$ est dérivable sur $[1;+\infty[$ en tant que différence de telles fonctions et pour tout $x\in[1;+\infty[$ :

$$\varphi'(x)=\ln\big(\Gamma(x+1)\big)-\ln\big(\Gamma(x)\big)=\ln\left(\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}\right).$$

Or, d'après la question 2, on a $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, donc pour tout $x\in[1;+\infty[$ :

$$\varphi'(x)=\ln x.$$

Alors, $\varphi'(x)\ge 0$ sur $[1;+\infty[$ avec $\varphi'(x)=0$ en 1 uniquement, donc $\varphi$ est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

De plus, avec $\varphi'(x)=\ln x$, il existe une constante *C* telle que pour tout $x\in[1;+\infty[$, $\varphi(x)=x\ln x-x+C$.

On a alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$.

D'après la question 4, on a le tableau :

| $s$ | $1$ | | $\alpha$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Gamma$ | $1$ | $\searrow$ | $\Gamma(\alpha)$ | $\nearrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

D'où le tableau de signes :

| $s$ | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln\left(\Gamma(s)\right)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

On a alors $\varphi(1)=\int_1^2\ln\left(\Gamma(t)\right)dt<0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $n\geq 2$, $\varphi(n)=\int_n^{n+1}\ln\left(\Gamma(t)\right)dt>0$.

Comme pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\varphi(n)$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante, strictement positive à partir du rang 2 et de limite infinie.

Ceci permet de conclure que la série $\sum\frac{(-1)^n}{u_n}$ vérifie le critère spécial des séries alternées à partir du rang 2 et donc que :

$$\boxed{\text{La série } \sum\frac{(-1)^n}{u_n} \text{ converge.}}$$

## *Exercice 9*

### <u>**Première intégrale**</u>

Posons $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}dt$.

*<u>Définition</u>* :

- Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, la fonction $t\mapsto\frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$ et tout $t\in\mathbb{R}_+$, $0<\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\leq\frac{1}{1+t^2}$.

  Comme $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt$ converge donc $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}dt$ converge aussi et ainsi :

  $$\underline{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+.}$$

*<u>Continuité</u>* :

- Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, la fonction $x\mapsto\frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Avec l'hypothèse de domination vue ci-dessus, on peut conclure que :

  $$\underline{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.}$$

*<u>Dérivabilité</u>* :

- La fonction $x\mapsto\frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}_+$, de dérivées successives $x\mapsto-\frac{te^{-tx}}{1+t^2}$ et $x\mapsto\frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}$.

- Les fonctions $t \mapsto -\dfrac{te^{-tx}}{1+t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\left|-\dfrac{te^{-tx}}{1+t^2}\right| = \underset{t\to+\infty}{o}(e^{-tx})$ et $t \mapsto e^{-tx}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc $t \mapsto -\dfrac{te^{-tx}}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $x \in [a,+\infty[$, on a $\left|\dfrac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}\right| \le e^{-ta}$ et $t \mapsto e^{-ta}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, *f* est de classe $C^2$ sur $[a,+\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$\underline{f \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ avec } f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}\,dt.}$$

Remarquons alors que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2-1)e^{-tx}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-tx}dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{x}e^{-tx}\right]_0^{+\infty} - f(x) = \frac{1}{x} - f(x).$$

Ainsi, *f* est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de :

$$(E):\ y''+y = \frac{1}{x}.$$

Par ailleurs, soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t+x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$, on a par intégration par parties :

$$\int_0^A \frac{\sin t}{t+x}\,dt = \left[-\frac{\cos t}{t+x}\right]_0^A - \int_0^A \frac{\cos t}{(t+x)^2}\,dt = \frac{1}{x} - \frac{\cos A}{A+x} - \int_0^A \frac{\cos t}{(t+x)^2}\,dt.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\left|\dfrac{\cos t}{(t+x)^2}\right| \le \dfrac{1}{(t+x)^2}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+x)^2}$ converge, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(t+x)^2}\,dt$ converge.

Comme $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{\cos A}{A+x} = 0$, on peut conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, avec :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(t+x)^2}\,dt.$$

**<u>Seconde intégrale</u>**

Posons alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t+x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et on a vu que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt$ converge.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin t}{t+x}$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivées première et seconde :

$$x \mapsto -\frac{\sin t}{(t+x)^2} \text{ et } x \mapsto \frac{2\sin t}{(t+x)^3}.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, les fonctions $t \mapsto -\dfrac{\sin t}{(t+x)^2}$ et $t \mapsto \dfrac{2\sin t}{(t+x)^3}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$.

- Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $x \in [a, +\infty[$, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ :

$$\left|\frac{\sin t}{(t+x)^2}\right| \leq \frac{1}{(t+a)^2} \text{ et } \left|\frac{2\sin t}{(t+x)^3}\right| \leq \frac{2}{(t+a)^3}.$$

Comme $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+a)^2}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+a)^3}$ convergent, les hypothèses de domination sont vérifiées.

On peut donc conclure que :

$$g \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ avec } g''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin t}{(t+x)^3}\,dt.$$

Or, pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$, on a en faisant deux par intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned}
\int_0^A \frac{2\sin t}{(t+x)^3}\,dt &= \left[-\frac{\sin t}{(t+x)^2}\right]_0^A + \int_0^A \frac{\cos t}{(t+x)^2}\,dt \\
&= \left[-\frac{\sin t}{(t+x)^2}\right]_0^A + \left[-\frac{\cos t}{t+x}\right]_0^A - \int_0^A \frac{\sin t}{t+x}\,dt \\
&= -\frac{\sin A}{(A+x)^2} - \frac{\cos A}{A+x} + \frac{1}{x} - \int_0^A \frac{\sin t}{t+x}\,dt
\end{aligned}$$

Et en passant à la limite quand $A \to +\infty$, on obtient :

$$g''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin t}{(t+x)^3}\,dt = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt = \frac{1}{x} - g(x).$$

Ainsi, la fonction $g$ est elle aussi solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de $(E)$.

Alors, $f - g$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de $y'' + y = 0$, donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$f(x) - g(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x = K\cos(x - \varphi)$$

avec $K = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, $\cos\varphi = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}$ et $\sin\varphi = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}$.

Enfin :

- $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ |f(x)| = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dt = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ;
- $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \left|\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(t+x)^2}\,dt\right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+x)^2} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(t+x)^2}\,dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

  car $g(x) = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(t+x)^2}\,dt$.

Ainsi, $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - g(x)\right] = \lim_{x\to+\infty} K\cos(x-\varphi) = 0$ et la seule possibilité pour obtenir cela est d'avoir $K = 0$ (car la fonction cosinus n'admet pas de limite en $+\infty$).

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) - g(x) = 0$, soit :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt}$$

***Exercice 11***

En posant $u=\sqrt{t}$ (avec $t\mapsto\sqrt{t}$ est de classe $C^1$ et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$), on a :

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\operatorname{sh}(\sqrt{t})}=\int_0^{+\infty}\frac{2u}{\operatorname{sh}u}\,du\,.$$

L'intégrale est impropre en 0 et + ∞.

- Comme $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\operatorname{sh}u}{u}=1$, la fonction $u\mapsto\frac{2u}{\operatorname{sh}u}$ se prolonge par continuité en 0, donc $\int_0\frac{2u}{\operatorname{sh}u}\,du$ converge.
- On a $\frac{2u}{\operatorname{sh}u}\underset{u\to+\infty}{\sim}4u\,e^{-u}$, $4u\,e^{-u}\underset{u\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{u^2}\right)$ (par croissances comparées) et l'intégrale de Riemann $\int^{+\infty}\frac{du}{u^2}$ converge, donc $\int^{+\infty}\frac{2u}{\operatorname{sh}u}\,du$ converge.

Finalement, $\int_0^{+\infty}\frac{2u}{\operatorname{sh}u}\,du$ converge, donc :

$$\boxed{\text{L'intégrale } I=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\operatorname{sh}(\sqrt{t})} \text{ existe bien.}}$$

On a :

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{2u}{\operatorname{sh}u}\,du=4\int_0^{+\infty}\frac{u\,e^{-u}}{1-e^{-2u}}\,du\,.$$

Or, pour tout $u\in\mathbb{R}_+^*$, $0<e^{-2u}<1$, donc $\frac{1}{1-e^{-2u}}=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}e^{-2nu}$ et ainsi :

$$I=4\int_0^{+\infty}\left(u\,e^{-u}\sum_{n\in\mathbb{N}}e^{-2nu}\right)du=4\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}u\,e^{-(2n+1)u}\right)du=4\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}f_n(u)\right)du$$

avec $f_n(u)=u\,e^{-(2n+1)u}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $u\in\mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n$ est continue, donc continue par morceaux, et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car définie et continue en 0 et $f_n(u)\underset{u\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{u^2}\right)$).
- La série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction $f:u\mapsto\frac{u\,e^{-u}}{1-e^{-2u}}$, continue, donc continue par morceaux, sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|f_n|=f_n$ et :

$$\int_0^{+\infty}|f_n(u)|\,du=\int_0^{+\infty}f_n(u)\,du=\int_0^{+\infty}u\,e^{-(2n+1)u}du\,.$$

  Les fonctions $u\mapsto u$ et $u\mapsto-\frac{1}{2n+1}e^{-(2n+1)u}$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et une intégration par parties donne, pour tout $A\in\mathbb{R}_+^*$ :

$$\int_0^A u\,e^{-(2n+1)u}du=\left[-\frac{u}{2n+1}e^{-(2n+1)u}\right]_0^A-\int_0^A\left(-\frac{1}{2n+1}e^{-(2n+1)u}\right)du$$

$$=\left[-\frac{u}{2n+1}e^{-(2n+1)u}\right]_0^A+\left[-\frac{1}{(2n+1)^2}e^{-(2n+1)u}\right]_0^A$$

Soit $\int_0^A u\,e^{-(2n+1)u}du = -\frac{A}{2n+1}e^{-(2n+1)A} - \frac{1}{(2n+1)^2}e^{-(2n+1)A} + \frac{1}{(2n+1)^2}$ et quand $A \to +\infty$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} |f_n(u)|\,du = \int_0^{+\infty} f_n(u)\,du = \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Et donc, la série $\sum \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge (car $\frac{1}{(2n+1)^2} \sim \frac{1}{4n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge).

On peut alors écrire :

$$\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(u)\right)du = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_0^{+\infty} f_n(u)\,du = \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Or :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(2n)^2} - \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2} = \frac{3}{4}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2} = \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Avec $I = 4\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(u)\right)du$, on obtient finalement :

$$\boxed{I = \frac{\pi^2}{2}}$$

***Exercice 10***

1) On a $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \lambda t^{\alpha}$, donc $\frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} \underset{t\to 0}{\sim} \lambda t^{x+\alpha}$ et $\int_0 t^{x+\alpha}dt$ converge si et seulement si $x+\alpha+1>0$, donc $\int_0 \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}}dt$ converge si et seulement si $x+\alpha+1>0$, soit $x>-\alpha-1$.

Comme *f* est continue en 1, on a $\frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{f(1)}{\sqrt{1-t}}$ quand $f(1)\neq 0$ et $\frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} \underset{t\to 1}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ quand $f(1)=0$.

Comme $\int^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$ converge, dans les deux cas, l'intégrale $\int^1 \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}}dt$ converge quel que soit *x*.

Finalement, $\int_0^1 \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}}dt$ converge si et seulement si $x>-\alpha-1$ et donc :

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est définie sur } \left]-\alpha-1,+\infty\right[.}$$

2) Remarquons déjà que $|f|$ est continue $\left]0,1\right]$ et vérifie $|f(t)| \underset{t\to 0}{\sim} |\lambda| t^{\alpha}$, donc on prouve comme plus haut que $\int_0^1 \frac{t^x |f(t)|}{\sqrt{1-t}}dt$ converge si et seulement si $x>-\alpha-1$ et dans ce cas, $t\mapsto \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}}$ est intégrable sur $\left]0,1\right[$.

Soit $h:(x,t)\mapsto \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} = \frac{e^{x\ln t} f(t)}{\sqrt{1-t}}$, définie sur $\left]-\alpha-1,+\infty\right[\times\left]0,1\right[$.

- Pour tout $x\in\left]-\alpha-1,+\infty\right[$, $t\mapsto h(x,t)$ est continue, donc continue par morceaux, sur $\left]0,1\right[$ (car *f* l'est).
- Pour tout $t\in\left]0,1\right[$, $x\mapsto h(x,t)$ est continue sur $\left]-\alpha-1,+\infty\right[$ (car $x\mapsto e^{x\ln t}$ l'est).

- Soit $a \in \left]-\alpha-1,+\infty\right[$. Pour tout $(x,t) \in \left[a,+\infty\right[ \times \left]0,1\right[$, on a :

$$\left|h(x,t)\right| = \frac{t^x\left|f(t)\right|}{\sqrt{1-t}} \leq \frac{t^a\left|f(t)\right|}{\sqrt{1-t}}.$$

On a vu plus haut que $t \mapsto \dfrac{t^a\left|f(t)\right|}{\sqrt{1-t}}$ est positive, continue par morceaux et intégrable sur $\left]0,1\right[$.

Tout ceci permet de conclure que $g$ est continue sur $\left[a,+\infty\right[$, et ceci pour tout $a \in \left]-\alpha-1,+\infty\right[$, donc :

$$\boxed{g \text{ est continue sur } \left]-\alpha-1,+\infty\right[.}$$

3) On reprend les notations de la question précédente.

- Pour tout $x \in \left]-\alpha-1,+\infty\right[$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\left]0,1\right[$.
- Pour tout $t \in \left]0,1\right[$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $C^1$ sur $\left]-\alpha-1,+\infty\right[$ (car $x \mapsto e^{x\ln t}$ l'est), avec :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \frac{t^x \ln t\, f(t)}{\sqrt{1-t}}.$$

- Pour tout $x \in \left]-\alpha-1,+\infty\right[$, $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est continue, donc continue par morceaux, sur $\left]0,1\right[$.
- Soit $a \in \left]-\alpha-1,+\infty\right[$. Pour tout $(x,t) \in \left[a,+\infty\right[ \times \left]0,1\right[$, on a :

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = -\frac{t^x \ln t\left|f(t)\right|}{\sqrt{1-t}} \leq -\frac{t^a \ln t\left|f(t)\right|}{\sqrt{1-t}} = \varphi(t).$$

La fonction $\varphi$ est positive et continue par morceaux sur $\left]0,1\right[$.

De plus, comme ln est continue en 1, on montre comme plus haut que $\int^1 \varphi(t)\,dt$ converge. Enfin :

$$\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} -\left|\lambda\right| t^{a+\alpha} \ln t = -\left|\lambda\right| t^{\frac{a+\alpha-1}{2}}\, t^{a+\alpha-\frac{a+\alpha-1}{2}} \ln t.$$

Comme $-1 < \dfrac{a+\alpha-1}{2} < a+\alpha$, on a $a+\alpha-\dfrac{a+\alpha-1}{2} > 0$, donc $\lim\limits_{t\to 0} t^{a+\alpha-\frac{a+\alpha-1}{2}} \ln t = 0$ et $\varphi(t) \underset{t\to 0}{=} o\left(t^{(a+\alpha-1)/2}\right)$.

Or, l'intégrale $\int_0 t^{(a+\alpha-1)/2}dt$ converge (car $\dfrac{a+\alpha-1}{2} > -1$), donc $\int_0 \varphi(t)\,dt$ converge et ainsi, $\varphi$ est intégrable sur $\left]0,1\right[$.

Tout ceci permet de conclure que $g$ est de classe $C^1$ sur $\left[a,+\infty\right[$, et ceci pour tout $a \in \left]-\alpha-1,+\infty\right[$, donc :

$$\boxed{g \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \left]-\alpha-1,+\infty\right[.}$$

4) Sur le segment $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$, $f$ est continue donc bornée, et il existe $M \geq 0$ tel que $\left|f(t)\right| \leq M$ pour tout $t \in \left[\dfrac{1}{2},1\right]$.

Soit $\varepsilon \in \left]0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$. Pour tout $x \in \left]0,+\infty\right[$, on a :

$$g(x) = \int_0^1 \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}}\,dt = \int_0^{1-\varepsilon^2} \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}}\,dt + \int_{1-\varepsilon^2}^1 \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}}\,dt.$$

Avec $t^x \leq 1$ pour tout $t \in \left[1-\varepsilon^2, 1\right]$ (car $x > 0$) et $\left[1-\varepsilon^2, 1\right] \subset \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, on a alors :

$$\left|\int_{1-\varepsilon^2}^{1} \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}}\, dt\right| \leq \int_{1-\varepsilon^2}^{1} \frac{t^x \left|f(t)\right|}{\sqrt{1-t}}\, dt \leq \int_{1-\varepsilon^2}^{1} \frac{M}{\sqrt{1-t}}\, dt = 2M\varepsilon .$$

Si de plus, $x > -\alpha+1$, on peut poser $x = -\alpha+1+h$ et :

$$\left|\int_{0}^{1-\varepsilon^2} \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}}\, dt\right| \leq \int_{0}^{1-\varepsilon^2} \frac{t^x \left|f(t)\right|}{\sqrt{1-t}}\, dt = \int_{0}^{1-\varepsilon^2} \frac{t^{-\alpha+1+h} \left|f(t)\right|}{\sqrt{1-t}}\, dt = \int_{0}^{1-\varepsilon^2} t^h \frac{t^{-\alpha+1} \left|f(t)\right|}{\sqrt{1-t}}\, dt \leq (1-\varepsilon^2)^h \int_{0}^{1-\varepsilon^2} \frac{t^{-\alpha+1} \left|f(t)\right|}{\sqrt{1-t}}\, dt .$$

Or, quand $x \to +\infty$, $h \to +\infty$ et $(1-\varepsilon^2)^h \to 0$ (car $0 < 1-\varepsilon^2 < 1$), donc il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \geq A$, on a :

$$(1-\varepsilon^2)^h \int_{0}^{1-\varepsilon^2} \frac{t^{-\alpha+1} \left|f(t)\right|}{\sqrt{1-t}}\, dt \leq \varepsilon .$$

Finalement, pour tout $\varepsilon \in \left]0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$ (donc pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$), il existe un réel $A > 0$ te que pour tout réel $x \geq A$ :

$$\left|g(x)\right| \leq \left|\int_{0}^{1-\varepsilon^2} \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}}\, dt\right| + \left|\int_{1-\varepsilon^2}^{1} \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}}\, dt\right| \leq \varepsilon + 2M\varepsilon = (1+2M)\varepsilon .$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0}$$