Corrigés des TD du chapitre 1

Exercice 1

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on a $u_n > 0$ et :

$$\ln(n^2 u_n) = 2\ln n + (\ln n)^2 - n\ln(\ln n) = n\left(2\frac{\ln n}{n} + \frac{(\ln n)^2}{n} - \ln(\ln n)\right).$$

Or :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^2}{n} = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \ln(n^2 u_n) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0 \quad \Rightarrow \quad u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc :

$$\boxed{\text{La série converge.}}$$

b. On a $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} \to 0$ (car $\alpha > 0$), donc :

$$u_n = \ln\left(1 + \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)\right) = \ln\left[1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + o\left(\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^2\right)\right] = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$$

Or, la série $\Sigma \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ vérifie le critère spécial des séries alternées (car $\alpha > 0$), donc elle converge.

Alors, Σu_n converge si et seulement si la série de Riemann $\Sigma \dfrac{1}{n^{2\alpha}}$ converge, autrement dit :

$$\boxed{\text{La série converge si et seulement si } \alpha > \frac{1}{2}.}$$

c. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} u_{3n} + u_{3n+1} + u_{3n+2} &= \frac{j^{3n}}{\sqrt{3n}} + \frac{j^{3n+1}}{\sqrt{3n+1}} + \frac{j^{3n+2}}{\sqrt{3n+2}} = \frac{1}{\sqrt{3n}} + \frac{j}{\sqrt{3n+1}} + \frac{j^2}{\sqrt{3n+2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3n}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3n+1}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3n+2}} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3n+1}} - \frac{1}{\sqrt{3n+2}}\right) \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left[u_{3n} + u_{3n+1} + u_{3n+2}\right] &= \frac{1}{2\sqrt{3n}}\left(2 - \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{-1/2} - \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{-1/2}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3n}}\left[2 - \left(1 - \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] = \frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{1}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

$$\mathrm{Im}\left[u_{3n}+u_{3n+1}+u_{3n+2}\right]=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n+1}}{\sqrt{3n+1}\sqrt{3n+2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{3n+1}\sqrt{3n+2}\left(\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n+1}\right)}$$

$$=\frac{1}{6n\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{3n}}\sqrt{1+\frac{2}{3n}}\left(\sqrt{1+\frac{2}{3n}}+\sqrt{1+\frac{1}{3n}}\right)}$$

Ainsi :

$$\mathrm{Re}\left[u_{3n}+u_{3n+1}+u_{3n+2}\right]\sim\frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{1}{n\sqrt{n}}\text{ et }\mathrm{Im}\left[u_{3n}+u_{3n+1}+u_{3n+2}\right]\sim\frac{1}{12n\sqrt{n}}.$$

La série de Riemann $\Sigma\frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge. Alors, les séries $\sum\mathrm{Re}\left[u_{3n}+u_{3n+1}+u_{3n+2}\right]$, $\sum\mathrm{Im}\left[u_{3n}+u_{3n+1}+u_{3n+2}\right]$ et donc $\sum\left[u_{3n}+u_{3n+1}+u_{3n+2}\right]$ convergent.

Or, si on pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$, on a pour tout $n\geq 2$:

$$S_{3n}=u_1+u_2+\sum_{k=1}^{n}\left[u_{3k}+u_{3k+1}+u_{3k+2}\right]-u_{3n+1}-u_{3n+2}$$

$$S_{3n+1}=u_1+u_2+\sum_{k=1}^{n}\left[u_{3k}+u_{3k+1}+u_{3k+2}\right]-u_{3n+2}$$

$$S_{3n+2}=u_1+u_2+\sum_{k=1}^{n}\left[u_{3k}+u_{3k+1}+u_{3k+2}\right]$$

Comme $u_n\to 0$, les trois suites (S_{3n}), (S_{3n+1}) et (S_{3n+2}) convergent vers la même limite et donc :

$$\boxed{\text{La série converge.}}$$

d. On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\geq 0$ et $\frac{1}{n}=o(u_n)$. Comme $\Sigma\frac{1}{n}$ diverge, la série Σu_n diverge aussi.

La fonction $f:t\mapsto\frac{\ln t}{t}$ est définie et dérivable sur $[1;+\infty[$ en tant que quotient de telles fonctions et :

$$f'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}.$$

On a $f'(t)\leq 0$ pour $t\geq e$, donc f est continue (car dérivable), positive et décroissante sur $[\mathrm{e};+\infty[$.

De plus, $\int_1^n f(t)\,dt=\left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_1^n=\frac{(\ln n)^2}{2}\to+\infty$ donc, par comparaison série-intégrale, $S_n\sim\int_1^n f(t)\,dt$, soit :

$$\boxed{\text{La série diverge et } S_n\sim\frac{(\ln n)^2}{2}}$$

e. La fonction $f:t\mapsto\frac{\ln t}{t^2}$ est définie et dérivable sur $[1;+\infty[$ en tant que quotient de telles fonctions et :

$$f'(t)=\frac{1-2\ln t}{t^3}.$$

On a $f'(t)\leq 0$ pour $t\geq\sqrt{e}$, donc f est continue (car dérivable), positive et décroissante sur $[\sqrt{\mathrm{e}};+\infty[$.

De plus, en intégrant par parties, on obtient :

$$\int_1^n f(t)\,dt = \int_1^n \frac{\ln t}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\ln t\right]_1^n - \int_1^n \left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = \left[-\frac{1}{t}\ln t - \frac{1}{t}\right]_1^n = 1 - \frac{1+\ln n}{n} \to 1$$

Alors, par comparaison série-intégrale, la série converge et on a, pour tout entier $n \geq 2$:

$$0 \leq \frac{1+\ln n}{n} - R_n \leq \frac{\ln n}{n^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n} - \frac{\ln n}{n^2} \leq R_n \leq \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n}.$$

Comme $\dfrac{\ln n}{n^2} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, on a :

$$\boxed{\text{La série converge et } R_n = \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).}$$

Exercice 2

a. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{1}{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2} = \frac{6}{n(n+1)(2n+1)} = 6\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}\right).$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6}\sum_{k=1}^n u_k &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} - \frac{4}{2k+1}\right] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - 4\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} - 4\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} - 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}\right) \\
&= 2\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1 + \frac{1}{n+1} - 4\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} + 4 + 2\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\
&= 4\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 4\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} + 3 + \frac{1}{n+1} = 3 + \frac{1}{n+1} - 4\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} \\
&= 3 + \frac{1}{n+1} - 4\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} - \frac{4}{2n+1}
\end{aligned}$$

Or, en posant $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$, qui est une somme de Riemann. Comme la fonction f est continue sur $[0,1]$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \left[\ln(1+t)\right]_0^1 = \ln 2.$$

Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{6}\sum_{k=1}^n u_k = \lim_{n\to+\infty}\left[3 + \frac{1}{n+1} - 4\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} - \frac{4}{2n+1}\right] = 3 - 4\ln 2.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La série } \Sigma u_n \text{ converge et sa somme est } 6(3-4\ln 2).}$$

b. Posons $f(t)=\dfrac{\ln t}{t}$, $I_n=\int_1^n f(t)\,dt$ et $v_n=\sum_{k=3}^{n}\dfrac{\ln k}{k}-\int_3^n f(t)\,dt$ pour tout entier $n\geq 3$.

D'après la question d de l'exercice précédent, f est continue, positive et décroissante sur $[\mathrm{e};+\infty[$ et $I_n=\dfrac{(\ln n)^2}{2}$. Par comparaison série-intégrale, on a pour tout entier $n\geq 3$:

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1}\leq\int_n^{n+1} f(t)\,dt\leq\frac{\ln n}{n}.$$

En sommant de 3 à $n\geq 3$, on obtient :

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{\ln(k+1)}{k+1}\leq\sum_{k=3}^{n}\int_k^{k+1} f(t)\,dt\leq\sum_{k=3}^{n}\frac{\ln k}{k}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=3}^{n+1}\frac{\ln k}{k}-\frac{\ln 3}{3}\leq\int_3^{n+1} f(t)\,dt\\ \displaystyle\int_3^n f(t)\,dt+\int_n^{n+1} f(t)\,dt\leq\sum_{k=3}^{n}\frac{\ln k}{k}\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}v_{n+1}\leq\dfrac{\ln 3}{3}\\ \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt\leq v_n\end{cases}$$

Comme $v_3=\dfrac{\ln 3}{3}$, on a pour tout entier $n\geq 3$:

$$\int_n^{n+1} f(t)\,dt\leq v_n\leq\frac{\ln 3}{3}.$$

De plus, $v_{n+1}-v_n=\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}-\int_n^{n+1} f(t)\,dt\leq 0$, donc $(v_n)_{n\geq 3}$ est décroissante minorée (par 0) : elle converge.

Enfin, on a $\int_3^n f(t)\,dt=\left[\dfrac{1}{2}(\ln t)^2\right]_3^n=\dfrac{(\ln n)^2}{2}-\dfrac{(\ln 3)^2}{2}$, donc $\left(\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\ln k}{k}-\dfrac{(\ln n)^2}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel a et :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}=\frac{1}{2}(\ln n)^2+a+o(1)}$$

On a vu dans que la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)_{n\geq 3}$ est décroissante. De plus, elle converge vers 0 (par croissances comparée), donc la série $\sum u_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées donc converge. Et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{2n}u_k=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\frac{\ln k}{k}=\sum_{\substack{k=1\\ k\text{ pair}}}^{2n}\frac{\ln k}{k}-\sum_{\substack{k=1\\ k\text{ impair}}}^{2n}\frac{\ln k}{k}=2\sum_{\substack{k=1\\ k\text{ pair}}}^{2n}\frac{\ln k}{k}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln k}{k}$$
$$=2\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln k}{k}=\ln 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln k}{k}$$

Or :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln k}{k}=\left[\frac{1}{2}(\ln n)^2+a+o(1)\right]-\left[\frac{1}{2}(\ln 2n)^2+a+o(1)\right]=\frac{1}{2}(\ln n)^2-\frac{1}{2}(\ln 2n)^2+o(1)$$
$$=\frac{1}{2}(\ln n)^2-\frac{1}{2}\left(\ln 2+\ln n\right)^2+o(1)=-\frac{(\ln 2)^2}{2}-\ln 2\ln n+o(1)$$

Et avec $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}=\ln n+\gamma+o(1)$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{2n}u_k=\ln 2\left(\ln n+\gamma+o(1)\right)-\frac{(\ln 2)^2}{2}-\ln 2\ln n+o(1)=\gamma\ln 2-\frac{(\ln 2)^2}{2}+o(1)\ .$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La série } \Sigma u_n \text{ converge et sa somme est } \gamma\ln 2-\frac{(\ln 2)^2}{2} \text{ où } \gamma \text{ est la constante d'Euler.}}$$

Exercice 3

Posons pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\dfrac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}(3k-1)^{1/n}$. On a :

$$u_n=\frac{1}{n}\left[\prod_{k=1}^{n}(3k-1)\right]^{1/n}=\frac{1}{n}\left[\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{3k-1}{3k}\right)\right]^{1/n}\left[\prod_{k=1}^{n}(3k)\right]^{1/n}$$
$$=\frac{1}{n}\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{3k}\right)\right]^{1/n}\left[\prod_{k=1}^{n}3\right]^{1/n}\left[\prod_{k=1}^{n}k\right]^{1/n}=\frac{1}{n}\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{3k}\right)\right]^{1/n}3\left(n!\right)^{1/n}$$

On a $n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$, donc on peut écrire $n!=\varepsilon_n\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ avec pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\varepsilon_n>0$ et $\varepsilon_n\to1$.

Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\left(n!\right)^{1/n}=e^{\frac{\ln\varepsilon_n}{n}}\left(2\pi n\right)^{\frac{1}{2n}}\dfrac{n}{e}$ et $\dfrac{\ln\varepsilon_n}{n}\to0$, donc $e^{\frac{\ln\varepsilon_n}{n}}\to1$ et ainsi :

$$\left(n!\right)^{1/n}\sim\left(2\pi n\right)^{\frac{1}{2n}}\frac{n}{e}.$$

Et $\left(2\pi n\right)^{\frac{1}{2n}}=\exp\left(\dfrac{\ln\left(2\pi n\right)}{2n}\right)\to e^0=1$, donc :

$$\left(n!\right)^{1/n}\sim\frac{n}{e}.$$

Par ailleurs, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $1-\dfrac{1}{3n}>0$ et :

$$\ln\left(\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{3k}\right)\right]^{1/n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{3k}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(1-\frac{1}{3k}\right)+\frac{1}{3k}\right]-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(1-\frac{1}{3k}\right)+\frac{1}{3k}\right]-\frac{1}{3n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

On a :

- $\ln\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)+\dfrac{1}{3n}\sim-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3n}\right)^2$ et la série $\Sigma\dfrac{1}{n^2}$ converge, donc $\left(\sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(1-\dfrac{1}{3k}\right)+\dfrac{1}{3k}\right]\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(1-\frac{1}{3k}\right)+\frac{1}{3k}\right]\to0.$$

- $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\sim\ln n$, donc $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\sim\dfrac{\ln n}{n}\to0$.

Ainsi :

$$\ln\left(\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{3k}\right)\right]^{1/n}\right)\to0\quad\Rightarrow\quad\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{3k}\right)\right]^{1/n}\to1.$$

Finalement, on obtient $u_n\sim\dfrac{1}{n}3\dfrac{n}{e}$, soit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}(3k-1)^{1/n}=\frac{3}{e}}$$

Exercice 4

1) Comme $u_0 > 0$, une récurrence immédiate permet de prouver que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = u_n > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{u_{n+1}} > \frac{1}{u_n} \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} < u_n .$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge vers une limite ℓ positive ou nulle. Si $\ell > 0$, on obtient en passant à la limite dans la relation de récurrence : $\frac{1}{\ell} = \ell + \frac{1}{\ell}$, soit $\ell = 0$, ce qui est absurde. Donc, $\ell = 0$.

Par télescopage, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \right) = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_0} .$$

Comme $u_n \to 0^+$, on obtient $\sum_{k=0}^{n} u_k \to +\infty$ et ainsi :

$$\boxed{\text{La série } \Sigma u_n \text{ diverge.}}$$

2) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{u_{n+1}} = u_n + \frac{1}{u_n}$ et en élevant au carré :

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} = \left(u_n + \frac{1}{u_n} \right)^2 = u_n^2 + 2 + \frac{1}{u_n^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = u_n^2 + 2 .$$

En passant à la somme, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} \right) = \sum_{k=0}^{n} \left(u_k^2 + 2 \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_0^2} = \sum_{k=0}^{n} u_k^2 + 2(n+1) .$$

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k^2 + 2n \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} + u_n^2 = \sum_{k=0}^{n} u_k^2 + 2n \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} u_k^2 = \frac{1}{u_n^2} + u_n^2 - \frac{1}{u_0^2} - 2n .$$

Et avec $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = u_n^2 + 2$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k^2 = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_0^2} - 2n - 2$$

Remarquons que $\frac{1}{u_1^2} - \frac{1}{u_0^2} = u_0^2 + 2$, donc $u_0^2 = \sum_{k=0}^{0} u_k^2 = \frac{1}{u_1^2} - \frac{1}{u_0^2} - 2$ et la relation ci-dessus reste vraie pour $n = 0$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k^2 = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_0^2} - 2n - 2}$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k^2 = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} - 2n \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{nu_n^2} = 2 + \frac{1}{nu_0^2} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k^2 .$$

Or, $u_n^2 \to 0$ (car $u_n \to 0$) et la moyenne de Césaro $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k^2$ tend aussi vers 0. Avec $u_n > 0$, on a donc :

$$\frac{1}{nu_n^2} \to 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{n}\,u_n} \to \sqrt{2} .$$

Soit :

$$\boxed{u_n \sim \frac{1}{\sqrt{2n}}}$$

Exercice 5

1) Soit un entier $n \geq 3$. Posons $f_n(x) = x - n\ln x$. La fonction f_n est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que différence de telles fonctions et $f_n\,'(x) = \frac{x-n}{x} > 0$ pour $x > n$. De plus, $f_n(n) = n(1-\ln n) < 0$ car $n \geq 3 > e$.

La fonction f_n est continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}_+^*$, donc d'après le théorème de la bijection continue :

- sur $]0;n]$, f_n est strictement décroissante de $\lim\limits_{0^+} f_n = +\infty$ à $f_n(n) < 0$, donc s'annule exactement une fois sur cet intervalle en un réel x_n ;
- sur $[n;+\infty[$, f_n est strictement croissante de $f_n(n) < 0$ à $\lim\limits_{+\infty} f_n = +\infty$, donc s'annule exactement une fois sur cet intervalle en un réel y_n.

Comme $(E_n): e^x = x^n \iff f_n(x) = 0$:

$$\boxed{\text{L'équation } (E_n) \text{ admet exactement deux solutions strictement positives : } x_n \text{ et } y_n \text{ avec } 0 < x_n < y_n .}$$

2) Pour tout entier $n \geq 3$, $f_n(1) = 1 > 0$ et $f_n(e) = e - n < 0$ donc $x_n \in]1;e[$ et :

$$x_n - n\ln x_n = 0 \quad \iff \quad \frac{\ln x_n}{x_n} = \frac{1}{n} \quad \iff \quad g(x_n) = \frac{1}{n}$$

avec $g(x) = \frac{\ln x}{x}$.

La fonction g est définie, continue et dérivable sur $[1;e]$ en tant que quotient de telles fonctions. Sur $[1;e]$, on a $g\,'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \geq 0$ avec $g\,'(x) = 0$ uniquement en e, donc g est strictement croissante de $g(1) = 0$ à $g(e) = \frac{1}{e}$.

Ainsi, g réalise une bijection continue strictement décroissante de $[1;e]$ dans $\left[0;\frac{1}{e}\right]$ et sur $\left[0;\frac{1}{e}\right]$, g^{-1} est strictement croissante de 1 à e. On a alors $x_n = g^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} g^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{0} g^{-1} = 1$, donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = 1}$$

3) Posons $z_n = x_n - 1$. D'après ce qui précède, $z_n \to 0$ et pour tout entier $n \geq 3$, $\dfrac{\ln(1+z_n)}{1+z_n} = \dfrac{1}{n}$.

Comme $z_n \to 0$, on a $\dfrac{\ln(1+z_n)}{1+z_n} \sim z_n$ et donc : $z_n \sim \dfrac{1}{n}$.

De plus, $x_n \in]1;e[$, donc $z_n > 0$. Par ailleurs, on a $y_n > n$, donc pour tout entier $n \geq 3$:

$$0 < u_n = \frac{x_n - 1}{y_n} = \frac{z_n}{y_n} < \frac{z_n}{n}.$$

Comme $\dfrac{z_n}{n} \sim \dfrac{1}{n^2}$, on peut conclure par comparaison que :

$$\boxed{\text{La série } \Sigma u_n \text{ converge.}}$$

Exercice 6

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$v_{n+1} - v_n = \ln((n+1)^\alpha u_{n+1}) - \ln(n^\alpha u_n) = \alpha \ln(n+1) + \ln u_{n+1} - \alpha \ln n - \ln u_n = \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

$$= \alpha \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \alpha\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{\alpha}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc :

$$v_{n+1} - v_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi, la série $\Sigma(v_{n+1} - v_n)$ converge et donc :

$$\boxed{\text{La suite } v \text{ converge.}}$$

Notons λ la limite de v. On a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} e^{v_n} = e^\lambda = k > 0$. Comme k n'est pas nul, on peut écrire :

$$u_n \sim \frac{k}{n^\alpha}.$$

Alors par comparaison à une série de Riemann, on a immédiatement :

$$\boxed{\text{La série } \Sigma u_n \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.}$$

Exercice 7

1) a. L'application σ est bien définie sur $\mathbb{N}^*$ et à images dans $\mathbb{N}^*$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, notons k_n et r_n le quotient et le reste de la division euclidienne de n par 3.

On a donc $n = 3k_n + r_n = 3(k_n+1) + r_n - 3$ avec $r_n = 0, 1$ ou 2 et :

$$n = \begin{cases} 3k_n & \text{si } r_n = 0 \\ 3(k_n+1) - 2 & \text{si } r_n = 1 \\ 3(k_n+1) - 1 & \text{si } r_n = 2 \end{cases} \Rightarrow \sigma(n) = \begin{cases} 2k_n & \text{si } r_n = 0 \\ 4k_n + 1 & \text{si } r_n = 1 \\ 4k_n + 3 & \text{si } r_n = 2 \end{cases}$$

Remarquons que si on note ρ_n le reste de la division euclidienne de $\sigma(n)$ par 4, on a :

$$\begin{cases} r_n = 0 \Leftrightarrow \rho_n = 0 \text{ ou } 2 \\ r_n = 1 \Leftrightarrow \rho_n = 1 \\ r_n = 2 \Leftrightarrow \rho_n = 3 \end{cases}$$

Soient $n, n' \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sigma(n) = \sigma(n')$. On a alors $\rho_n = \rho_{n'}$ et, d'après ce qui précède :

$$\begin{cases} \rho_n = \rho_{n'} = 0 \text{ ou } 2 \Rightarrow r_n = r_{n'} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma(n) = 2k_n = \sigma(n') = 2k_{n'} \\ r_n = r_{n'} \end{cases} \\ \rho_n = \rho_{n'} = 1 \Rightarrow r_n = r_{n'} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sigma(n) = 4k_n + 1 = \sigma(n') = 4k_{n'} + 1 \\ r_n = r_{n'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_n = k_{n'} \\ r_n = r_{n'} \end{cases} \Rightarrow n = n' \\ \rho_n = \rho_{n'} = 3 \Rightarrow r_n = r_{n'} = 2 \Rightarrow \begin{cases} \sigma(n) = 4k_n + 3 = \sigma(n') = 4k_{n'} + 3 \\ r_n = r_{n'} \end{cases} \end{cases}$$

Dans tous les cas, on obtient $n = n'$ quand $\sigma(n) = \sigma(n')$, donc σ est injective.

Soit maintenant $N \in \mathbb{N}^*$ tel $N = 4K_N + \rho_N$ est la division euclidienne de *N* par 4. On a alors :

$$\begin{cases} \rho_N = 0 \text{ ou } 2 \Rightarrow N = \sigma\left(\dfrac{3}{2}N\right) \\ \rho_N = 1 \Rightarrow N = \sigma\left(3\dfrac{N-1}{4} + 1\right) \\ \rho_N = 3 \Rightarrow N = \sigma\left(3\dfrac{N-3}{4} + 2\right) \end{cases}$$

Donc, *N* admet un antécédent par σ. Ceci prouve que σ est surjective.

Finalement, σ est injective et surjective, donc bijective de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$, donc :

$$\boxed{\sigma \text{ est bien une permutation de } \mathbb{N}^*.}$$

b. La série $\sum u_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées, donc :

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ converge.}}$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_{\sigma(k)}$. On a alors :

$$S_{3n} = \sum_{k=1}^{3n} u_{\sigma(k)} = \sum_{j=1}^{n} \left(u_{\sigma(3j-2)} + u_{\sigma(3j-1)} + u_{\sigma(3j)}\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(u_{4j-3} + u_{4j-1} + u_{2j}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{(-1)^{4j-2}}{\sqrt{4j-3}} + \frac{(-1)^{4j}}{\sqrt{4j-1}} + \frac{(-1)^{2j+1}}{\sqrt{2j}}\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{4j-3}} + \frac{1}{\sqrt{4j-1}} - \frac{1}{\sqrt{2j}}\right)$$

Et :

$$\frac{1}{\sqrt{4j-3}}+\frac{1}{\sqrt{4j-1}}-\frac{1}{\sqrt{2j}}=\frac{1}{2\sqrt{j}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{4j}}}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4j}}}-\sqrt{2}\right)\underset{j\to+\infty}{\sim}\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{j}}.$$

Comme la série $\sum\frac{1}{\sqrt{j}}$ diverge, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}S_{3n}=+\infty$, et donc :

$$\boxed{\text{La série } \sum u_{\sigma(n)} \text{ diverge.}}$$

2) On montre comme plus haut que σ est bien une permutation de $\mathbb{N}^*$.

La série $\sum u_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées, donc :

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ converge.}}$$

Comme plus haut, on pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_{\sigma(k)}$. On a alors :

$$\begin{aligned}S_{3n}&=\sum_{k=1}^{3n}u_{\sigma(k)}=\sum_{j=1}^{n}\left(u_{\sigma(3j-2)}+u_{\sigma(3j-1)}+u_{\sigma(3j)}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(u_{2j-1}+u_{4j-2}+u_{4j}\right)\\&=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{(-1)^{2j}}{2j-1}+\frac{(-1)^{4j-1}}{4j-2}+\frac{(-1)^{4j+1}}{4j}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2j-1}-\frac{1}{4j-2}-\frac{1}{4j}\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2j(2j-1)}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2j-1}-\frac{1}{2j}\right)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(u_{2j-1}+u_{2j}\right)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n}u_j\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{2n}u_j=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty}S_{3n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$.

Comme $u_{\sigma(n)}\to 0$ ($u_n\to 0$ et $\sigma(n)\to+\infty$), on a aussi :

$$\lim_{n\to+\infty}S_{3n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left[S_{3n}+u_{\sigma(3n+1)}\right]=\lim_{n\to+\infty}S_{3n+2}=\lim_{n\to+\infty}\left[S_{3n}+u_{\sigma(3n+1)}+u_{\sigma(3n+2)}\right]=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$, autrement dit :

$$\boxed{\text{La série } \sum u_{\sigma(n)} \text{ converge, avec } \sum_{n=1}^{+\infty}u_{\sigma(n)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}u_n.}$$

Exercice 8

1) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, les fonctions $t\mapsto t$ et $t\mapsto\frac{\sin(nt)}{n}$ sont de classe C^1 sur $[0,1]$ et par intégration par parties, on obtient :

$$\int_0^1 t\cos(nt)dt=\left[t\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^1-\int_0^1\frac{\sin(nt)}{n}dt=\left[t\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^1+\left[\frac{\cos(nt)}{n^2}\right]_0^1=\frac{\sin n}{n}+\frac{\cos n-1}{n^2}=u_n-v_n.$$

Donc, on a bien pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{u_n=\int_0^1 t\cos(nt)dt+v_n}$$

2) La fonction $f:t\mapsto\dfrac{t}{\sin t}$ est de classe C^1 sur $\left]0;\dfrac{1}{2}\right]$ en tant que quotient de telles fonctions, avec :

$$f'(t)=\frac{\sin t-t\cos t}{\sin^2 t}.$$

On a $\lim\limits_{t\to 0}f(t)=1$, donc *f* se prolonge par continuité en 0 (en posant $f(0)=1$) et :

$$f'(t)=\frac{\sin t-t\cos t}{\sin^2 t}=\frac{\left(t+\underset{0}{o}(t^2)\right)-t\left(1+\underset{0}{o}(t)\right)}{t^2+\underset{0}{o}(t^2)}=\frac{\underset{0}{o}(1)}{1+\underset{0}{o}(1)}\quad\Rightarrow\quad\lim_{t\to 0}f'(t)=0.$$

La fonction *f*, prolongée par continuité en 0, est alors de classe C^1 en 0, avec $f'(0)=0$.

Finalement :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ se prolonge en une fonction de classe } C^1 \text{ sur } \left[0;\tfrac{1}{2}\right].}$$

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $t\in\,]0;1]$, $e^{it}\neq 1$ et :

$$\sum_{k=1}^n t\cos(kt)=t\sum_{k=1}^n\mathrm{Re}(e^{ikt})=t\,\mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^n(e^{it})^k\right]=t\,\mathrm{Re}\left[e^{it}\,\frac{e^{int}-1}{e^{it}-1}\right]=t\,\mathrm{Re}\left[e^{it}\,\frac{e^{i\frac{nt}{2}}(e^{i\frac{nt}{2}}-e^{-i\frac{nt}{2}})}{e^{i\frac{t}{2}}(e^{i\frac{t}{2}}-e^{-i\frac{t}{2}})}\right]$$

$$=t\,\mathrm{Re}\left[e^{i\frac{(n+1)t}{2}}\,\frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right]=t\,\frac{\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}=t\,\frac{\sin\left(\frac{nt}{2}+\frac{(n+1)t}{2}\right)-\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}-\frac{nt}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

$$=t\,\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)-\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}=\frac{\frac{t}{2}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)-\frac{1}{2}t$$

Soit pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $t\in[0;1]$:

$$\boxed{\sum_{k=1}^n t\cos(kt)=f\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)-\frac{1}{2}t}$$

4) On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n u_k=\sum_{k=1}^n\left(\int_0^1 t\cos(kt)dt+v_k\right)=\int_0^1\left[\sum_{k=1}^n t\cos(kt)\right]dt+\sum_{k=1}^n v_k$$

$$=\int_0^1\left[f\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)-\frac{1}{2}t\right]dt+\sum_{k=1}^n v_k=\int_0^1 f\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt-\frac{1}{2}\int_0^1 t\,dt+\sum_{k=1}^n v_k$$

$$=\int_0^1 f\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt-\frac{1}{4}+\sum_{k=1}^n v_k$$

Avec le changement de variable $u=\frac{t}{2}$ ($t\mapsto\frac{t}{2}$ réalise une bijection de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\left[0,\frac{1}{2}\right]$) :

$$\sum_{k=1}^{n}u_k=2\int_0^{1/2}f(u)\sin\big((2n+1)u\big)\,du-\frac{1}{4}+\sum_{k=1}^{n}v_k\,.$$

Comme *f* (prolongée) est de classe C^1 sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, on peut intégrer par parties :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}u_k&=2\left(\left[-f(u)\frac{\cos\big((2n+1)u\big)}{2n+1}\right]_0^{1/2}+\int_0^{1/2}f'(u)\frac{\cos\big((2n+1)u\big)}{2n+1}du\right)-\frac{1}{4}+\sum_{k=1}^{n}v_k\\&=\frac{2}{2n+1}\left(1-f\left(\frac{1}{2}\right)\cos\left(\frac{2n+1}{2}\right)+\int_0^{1/2}f'(u)\cos\big((2n+1)u\big)\,du\right)-\frac{1}{4}+\sum_{k=1}^{n}v_k\end{aligned}$$

Comme *f* (prolongée) est de classe C^1 sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, $|f'|$ est majorée par un réel M et :

$$\left|1-f\left(\frac{1}{2}\right)\cos\left(\frac{2n+1}{2}\right)+\int_0^{1/2}f'(u)\cos\big((2n+1)u\big)\,du\right|\le 1+f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}M\,.$$

Alors :

$$\frac{2}{2n+1}\left(1-f\left(\frac{1}{2}\right)\cos\left(\frac{2n+1}{2}\right)+\int_0^{1/2}f'(u)\cos\big((2n+1)u\big)\,du\right)\to 0\,.$$

Par ailleurs, on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0\le v_n=\frac{1-\cos n}{n^2}\le\frac{2}{n^2}$, donc par comparaison à une série de Riemann convergente, la série Σv_n converge.

Ainsi :

$$\boxed{\text{La série } \Sigma u_n \text{ converge et } \sum_{k=1}^{+\infty}u_k=\sum_{k=1}^{+\infty}v_k-\frac{1}{4}.}$$

5) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{\sin(n+1)}{n}=\frac{\sin n\cos 1+\cos n\sin 1}{n}=\frac{\sin n}{n}\cos 1+\frac{\cos n}{n}\sin 1\,.$$

Donc :

$$\frac{\cos n}{n}=\frac{1}{\sin 1}\frac{\sin(n+1)}{n}-\frac{\cos 1}{\sin 1}\frac{\sin n}{n}=\frac{1}{\sin 1}u_{n+1}-(\operatorname{cotan}1)u_n+\frac{1}{\sin 1}\frac{\sin(n+1)}{n(n+1)}$$

On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\left|\frac{\sin(n+1)}{n(n+1)}\right|=\frac{|\sin(n+1)|}{n(n+1)}\le\frac{1}{n^2}$ et $\Sigma\frac{1}{n^2}$ converge. Ainsi, la série $\Sigma\frac{\sin(n+1)}{n(n+1)}$ est absolument convergente, donc convergente. Comme $\Sigma u_n=\Sigma\frac{\sin n}{n}$ converge, la série $\Sigma\frac{\cos n}{n}$ converge, ainsi que la série $\Sigma\frac{\cos n+i\sin n}{n}$. Ceci prouve que :

$$\boxed{\text{La série } \Sigma\frac{e^{in}}{n} \text{ converge.}}$$

Exercice 9

Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et à termes positifs, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$:

$$0 \le u_{2n} \le u_k .$$

Donc :

$$0 \le n u_{2n} \le \sum_{k=n+1}^{2n} u_k = S_{2n} - S_n .$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(S_{2n} - S_n\right) = S - S = 0$, donc d'après al théorème de gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} n u_{2n} = 0$, soit :

$$\lim_{n\to+\infty} 2n u_{2n} = 0 .$$

On a de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le u_{2n+1} \le u_{2n}$, donc :

$$0 \le (2n+1) u_{2n+1} \le (2n+1) u_{2n} = 2n u_{2n} + u_{2n} .$$

Comme Σu_n converge, on a $u_{2n} \to 0$ et avec $n u_{2n} \to 0$, on a, à nouveau grâce au théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} (2n+1) u_{2n+1} = 0 .$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1) u_{2n+1} = 0$ et donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n u_n = 0}$$

Remarquons préalablement que pour tout $(p,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \le p \le n$, on a :

$$R_{p-1} - R_n = \sum_{k=p}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_{n-1} + u_n .$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n - R_{n+1} = u_{n+1} \ge 0$ donc $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et à termes positifs (car $(\mathrm{u}_\mathrm{n})_{n\in\mathbb{N}}$ l'est). Ainsi, d'après le résultat précédent, si ΣR_n converge, alors $n R_n \to 0$.

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k u_k &= u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \ldots + (n-1)u_{n-1} + n u_n \\
&= (u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n) + (u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n) + \ldots + (u_{n-1} + u_n) + u_n \\
&= (R_0 - R_n) + (R_1 - R_n) + \ldots + (R_{n-2} - R_n) + (R_{n-1} - R_n) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} R_k - n R_n
\end{aligned}$$

Ainsi, si ΣR_n converge, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} k u_k \right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} R_k - n R_n \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} R_k - \lim_{n\to+\infty} n R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} R_k .$$

Et ainsi :

$$\boxed{\text{Si } \Sigma R_n \text{ converge alors } \Sigma n u_n \text{ converge vers la même somme.}}$$

Exercice 10

Comme $x \in]-1;1[$, la série Σx^n est absolument convergente.

Donc le produit de Cauchy Σu_n (avec $u_n = \sum_{k=0}^{n} x^k x^{n-k}$) converge et sa somme est $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)^2$. Or :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} x^k x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} x^n = (n+1)x^n .$$

Donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)^2 .$$

Enfin, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} x^n = \lim_{N \to +\infty} \frac{1-x^{N+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$ car $|x|<1$ et ainsi :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}}$$

Exercice 11

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_1^n \frac{\cos(\ln t)}{t} dt = \left[\sin(\ln t)\right]_1^n = \sin(\ln n) .$$

Comme $\lim_{n \to +\infty} \ln n = +\infty$ et la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$:

$$\boxed{\text{La suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'admet pas de limite.}}$$

Soit $f : x \mapsto \int_1^x \frac{\cos(\ln t)}{t} dt$. Cette fonction est de classe C^∞ sur $[1,+\infty[$, comme primitive d'une fonction C^∞ sur $[1,+\infty[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre 1 appliquée à f entre n et $n+1$ donne :

$$f(n+1) - f(n) = f'(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t) f''(t)\, dt .$$

Alors :

$$\sum_{k=1}^{n} \left[f(k+1) - f(k) \right] = \sum_{k=1}^{n} f'(k) + \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} (k+1-t) f''(t)\, dt .$$

Soit, en posant $v_n = \int_n^{n+1} (n+1-t) f''(t)\, dt$:

$$f(n+1) - f(1) = f(n+1) = I_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} u_k + \sum_{k=1}^{n} v_k \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} u_k = I_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} v_k .$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|v_n| = \left| \int_n^{n+1} (n+1-t) f''(t)\, dt \right| \le \int_n^{n+1} \left| (n+1-t) f''(t) \right| dt \le \int_n^{n+1} \left| f''(t) \right| dt .$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n}|v_k| \leq \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}|f''(t)|\,dt = \int_1^{n+1}|f''(t)|\,dt\,.$$

Or, pour tout $x \in [1,+\infty[$, $|f''(x)| = \left|\dfrac{\cos(\ln x)+\sin(\ln x)}{x^2}\right| \leq \dfrac{2}{x^2}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n}|v_k| \leq \int_1^{n+1}|f''(t)|\,dt \leq \int_1^{n+1}\frac{dt}{t^2} = 1-\frac{1}{n+1} \leq 1\,.$$

Ceci prouve que la série $\sum v_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Alors, comme $\sum_{k=1}^{n} u_k = I_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} v_k$, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et $\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, autrement dit :

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ diverge.}}$$

Exercice 12

1) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta^2 a_n = \Delta a_n - \Delta a_{n+1} \geq 0$, donc la suite $(\Delta a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

On veut $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, soit $\Delta a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta a_N < 0$.

Alors, comme $(\Delta a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a pour tout entier $n > N$, $\Delta a_n \leq \Delta a_N < 0$ et, avec un télescopage :

$$\sum_{k=N}^{n-1}\Delta a_k = \sum_{k=N}^{n-1}\left(a_k - a_{k+1}\right) \leq \sum_{k=N}^{n-1}\Delta a_N \quad\Rightarrow\quad a_N - a_n \leq (n-N)\Delta a_N \quad\Rightarrow\quad a_N - (n-N)\Delta a_N \leq a_n\,.$$

Et comme $\Delta a_N < 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(a_N - (n-N)\Delta a_N\right) = +\infty$, donc par comparaison : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Ceci est absurde car la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc il n'existe pas d'entiers naturel N tel que $\Delta a_N < 0$.

Ainsi, $\Delta a_n = a_n - a_{n+1} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc :

$$\boxed{\text{La suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive, elle est minorée par 0 et donc :

$$\boxed{\text{La suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers une limite positive.}}$$

2) Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$.

D'après ce qui précède, on a $\Delta a_k \geq \Delta a_n$ pour tout entier $k \leq n$. Alors, si $p < n$, on a comme plus haut :

$$\sum_{k=p}^{n}\Delta a_k = a_p - a_{n+1} \geq \sum_{k=p}^{n}\Delta a_n = (n-p+1)\Delta a_n\,.$$

Ceci donne :

$$\boxed{n\Delta a_n \leq (p-1)\Delta a_n + a_p - a_{n+1}}$$

3) Soit un réel $\varepsilon > 0$.

Notons $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell \geq 0$. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \Delta a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(a_n - a_{n+1}\right) = \ell - \ell = 0$.

Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq p$, $\ell - \dfrac{\varepsilon}{3} \leq a_n \leq \ell + \dfrac{\varepsilon}{3}$, donc :

$$-\ell - \frac{\varepsilon}{3} \leq -a_{n+1} \leq -\ell + \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad a_p \leq \ell + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Et, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (p-1)\Delta a_n = 0$, il existe aussi $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N_1$, $(p-1)\Delta a_n \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Alors, en posant $N = \max(p, N_1) \in \mathbb{N}$, on a pour tout entier $n \geq N$:

$$n\Delta a_n \leq (p-1)\Delta a_n + a_p - a_{n+1} \leq \frac{\varepsilon}{3} + \ell + \frac{\varepsilon}{3} - \ell + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Or, on a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta a_n \geq 0$, donc $n\Delta a_n \geq 0$ et ainsi, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout entier $n \geq N$, $0 \leq n\Delta a_n \leq \varepsilon$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\Delta a_n = 0}$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(k+1)\Delta^2 a_k &= \sum_{k=0}^{n}(k+1)\left(\Delta a_k - \Delta a_{k+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\Delta a_k + \sum_{k=0}^{n} k\,\Delta a_k - \sum_{k=0}^{n}(k+1)\Delta a_{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(a_k - a_{k+1}\right) + \sum_{k=0}^{n}\left[k\,\Delta a_k - (k+1)\Delta a_{k+1}\right] \\
&= a_0 - a_{n+1} - (n+1)\Delta a_{n+1}
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)\Delta a_{n+1} = 0$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)\Delta^2 a_k\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(a_0 - a_{n+1} - (n+1)\Delta a_{n+1}\right) = a_0 - \ell.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La série } \sum (n+1)\Delta^2 a_n \text{ converge et sa somme est } a_0 - \lim_{n\to+\infty} a_n.}$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $u_k = v_k - v_{k-1}$, donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k u_k &= a_0 u_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (v_k - v_{k-1}) = a_0 u_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k v_k - \sum_{k=1}^{n} a_k v_{k-1} \\
&= a_0 u_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k v_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} v_k = a_0 u_0 + a_n v_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) v_k \\
&= a_0 u_0 + a_n v_n + \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta a_k) v_k = a_0 u_0 + a_n v_n + (\Delta a_0) v_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (\Delta a_k) v_k
\end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $v_k = (k+1)\,w_k - k\,w_{k-1}$, donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k u_k &= a_0u_0 + a_nv_n + (\Delta a_0)v_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (\Delta a_k)\big((k+1)\,w_k - k\,w_{k-1}\big) \\
&= a_0u_0 + a_nv_n + (\Delta a_0)v_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (\Delta a_k)(k+1)\,w_k - \sum_{k=1}^{n-1} (\Delta a_k)k\,w_{k-1} \\
&= a_0u_0 + a_nv_n + (\Delta a_0)v_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (\Delta a_k)(k+1)\,w_k - \sum_{k=0}^{n-2} (\Delta a_{k+1})(k+1)\,w_k \\
&= a_0u_0 + a_nv_n + (\Delta a_0)v_0 + (\Delta a_n)n\,w_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} \big(\Delta a_k - \Delta a_{k+1}\big)(k+1)\,w_k \\
&= a_0u_0 + a_nv_n + (\Delta a_0)v_0 + (n\,\Delta a_n)w_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} \big((k+1)\,\Delta^2 a_k\big)\,w_k
\end{aligned}$$

Par hypothèse, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_nv_n = 0$, et on a vu que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,\Delta a_n = 0$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \big(a_0u_0 + a_nv_n + (\Delta a_0)v_0 + (n\,\Delta a_n)w_{n-1}\big) = a_0u_0 + (\Delta a_0)v_0\,.$$

Pour le terme $\sum\limits_{k=1}^{n-2} \big((k+1)\,\Delta^2 a_k\big)\,w_k$, considérons deux cas, en rappelant que la série $\sum (n+1)\,\Delta^2 a_n$ converge :

- si $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$, on a $\big((k+1)\,\Delta^2 a_k\big)\,w_k = \underset{k\to+\infty}{o}\big((k+1)\,\Delta^2 a_k\big)$, donc $\sum \big((k+1)\,\Delta^2 a_k\big)\,w_k$ converge ;
- si $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \alpha \neq 0$, on a $\big((k+1)\,\Delta^2 a_k\big)\,w_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \alpha(k+1)\,\Delta^2 a_k$ et $\big((k+1)\,\Delta^2 a_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est positive, donc $\big(\alpha(k+1)\,\Delta^2 a_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est du signe de α et ainsi, $\sum \big((k+1)\,\Delta^2 a_k\big)\,w_k$ converge encore.

Finalement, la série $\sum \big((k+1)\,\Delta^2 a_k\big)\,w_k$ converge, donc $\left(\sum\limits_{k=1}^{n-2} \big((k+1)\,\Delta^2 a_k\big)\,w_k\right)_{n\geq 2}$ converge et ainsi :

$$\boxed{\text{La série } \sum a_n u_n \text{ converge.}}$$