

Convergence uniforme sur tout segment d'un intervalle

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I .

On suppose que la suite converge simplement vers une fonction f sur I (autrement dit, pour tout $x \in I$, $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$)

On veut établir une propriété de régularité de f sur I (continuité, classe C^1 , C^k , C^∞).

Pour cela, il faut avoir des hypothèses sur les f_n . Pour la classe C^k , avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, il faut que :

- toutes les fonctions f_n soit de classe C^k sur I ;
- les suites $(f_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$ pour $i = 0, 1, \dots, k-1$ convergent simplement ;
- et il faudrait que la suite $(f_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers une fonction g , définie sur I .

Or, il arrive assez souvent que ce ne soit pas le cas, on a en général la convergence simple (point par point), mais pas forcément la convergence uniforme (qui dit que $\sup_I |f_n^{(i)} - g|$ tend vers 0). Ceci pour deux raisons possibles :

- Le $\sup_I |f_n^{(i)} - g|$ n'existe pas.

Exemple : $f_n(x) = \frac{1}{1-x^n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ sur $[0, 1[$, mais $\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{1}{1-x^n} - 1 \right| = +\infty$, donc $\sup_{x \in [0, 1[} |f_n(x) - 1|$ n'existe pas.

- Le $\sup_I |f_n^{(i)} - g|$ existe, mais ne tend pas vers 0.

Exemple : $f_n(x) = x^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ sur $[0, 1[$, mais $\sup_{x \in [0, 1[} |f_n(x)| = 1$ ne tend pas vers 0.

C'est dans ce cas que l'on peut avoir recours aux segments de I .

En effet, si $(f_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur tout segment $[a, b]$ de I , alors on peut utiliser le théorème du cours sur $[a, b]$ pour conclure que g est de classe C^k sur $[a, b]$.

Or, si g est C^k sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I , elle est C^k sur leur réunion qui est I .

Ainsi, on peut obtenir la propriété de régularité voulue sur I , sans pour autant avoir la convergence uniforme sur I .

Avec les deux exemples précédents et la continuité.

Exemple 1 : $f_n(x) = \frac{1}{1-x^n}$ sur $[0, 1[$.

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers $x \mapsto 1$ sur $[0, 1[$ et toutes les f_n sont continues sur $[0, 1[$.

De plus, pour tout $a \in [0, 1[$, on a :

$$\sup_{x \in [0, a]} |f_n(x) - 1| = \frac{a^n}{1-a^n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Donc, il y a convergence uniforme sur $[0, a]$ et ainsi, la limite f de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est continue sur $[0, a]$. Ceci étant vrai pour tout $a \in [0, 1[$, f est continue sur $\bigcup_{a \in [0, 1[} [0, a] = [0, 1[$.

MAIS, la convergence n'est **PAS uniforme sur** $[0, 1[$.

Exemple 2 : $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1[$. A faire de la même façon.