Corrigés de la série 3 - Centrale-Supélec

Planche n° 17 (PC)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Minorer le rayon de convergence de $\sum_{p\geq 0} tr(A^p)\, z^p$ et exprimer sa somme en fonction du polynôme caractéristique de A.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les racines complexes distinctes ou non de χ_A, le polynôme caractéristique de A.

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A est trigonalisable, semblable à une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont les λ_k. Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p est trigonalisable, semblable à une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont les λ_k^p et $tr(A^p) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^p$.

Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\left|tr(A^p)\, z^p\right| = \left|\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^p\right) z^p\right| = \left|\left(\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k z)^p\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left|\lambda_k z\right|^p = \sum_{k=1}^{n} \left|\lambda_k\right|^p \left|z\right|^p \leq n\mu^p \left|z\right|^p$$

avec $\mu = \max\left(\left|\lambda_k\right|, k \in [\![1, n]\!]\right)$.

Alors, $\left(\left|tr(A^p)\, z^p\right|\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée si $\left(\left(\mu|z|\right)^p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ l'est, donc si $|z| < \dfrac{1}{\mu}$ quand $\mu \neq 0$. Ceci prouve que le rayon de convergence R de $\sum_{p\geq 0} tr(A^p)\, z^p$ vérifie $R \geq \dfrac{1}{\mu}$.

Si $\mu = 0$, alors tous les λ_k sont nuls, $tr(A^p) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, et $\sum_{p\geq 0} tr(A^p)\, z^p = tr(A^0) = n$.

On suppose dans la suite que $\mu \neq 0$.

****

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \dfrac{1}{\mu}$. On a alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $|z| < \dfrac{1}{\mu} \leq \dfrac{1}{|\lambda_k|}$, donc $\sum_{p\geq 0} \lambda_k^p\, z^p$ converge et, on peut écrire :

$$\sum_{p\geq 0} tr(A^p)\, z^p = \sum_{p\geq 0}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^p\right) z^p = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{p\geq 0} (\lambda_k z)^p\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\lambda_k z}.$$

Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$ et :

$$\chi_A{}' = \sum_{k=1}^{n} \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha\neq k}}^{n} (X - \lambda_\alpha).$$

Alors, pour tout $z\in\mathbb{C}^*$ tel que $|z|<\dfrac{1}{\mu}$, on a :

$$\frac{\chi_A'\left(\frac{1}{z}\right)}{\chi_A\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\prod_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq k}}^{n}\left(\frac{1}{z}-\lambda_\alpha\right)}{\displaystyle\prod_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{1}{z}-\lambda_\alpha\right)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{1}{z}-\lambda_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{z}{1-\lambda_k z}=z\left(\sum_{p\geq 0}tr(A^p)\,z^p\right).$$

Donc :

$$\sum_{p\geq 0}tr(A^p)\,z^p=\frac{1}{z}\frac{\chi_A'\left(\frac{1}{z}\right)}{\chi_A\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

Planche n° 18 (PC, *adapté*)

Montrer qu'une matrice est nilpotente si et seulement si sa seule valeur propre est 0.

Que dire de M nilpotente et diagonalisable ?

Soient M_1 et M_2 deux matrices nilpotentes, D_1 et D_2 deux matrices diagonalisables. Les quatre matrices commutent deux à deux et $D_1+M_1=D_2+M_2$.

Montrer que $M_1=M_2$ et $D_1=D_2$.

Soit $N\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Si N est nilpotente d'indice $p\in\mathbb{N}^*$. On a alors $N^p=0_n$ et si λ est une valeur propre de N et X_λ un vecteur propre (non nul) associé à λ, on a $N^pX_\lambda=\lambda^pX_\lambda=0$, donc $\lambda=0$ ($X_\lambda\neq 0$). Ainsi, 0 est la seule valeur propre de N.

Réciproquement, si 0 est la seule valeur propre de N, Alors, χ_N, le polynôme caractéristique de N est $\chi_N=X^n$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_N(N)=N^n=0_n$ et ainsi, N est nilpotente.

****

Que dire de M nilpotente et diagonalisable est semblable à la matrice nulle, donc nulle.

****

Comme D_1 et D_2 commutent, les sous-espaces propres de D_1 sont stables par D_2. Alors, tous les endomorphismes induits par un D_2 (qui est diagonalisable) sur les sous-espaces propres de D_1 sont diagonalisables. Ceci prouve que D_1 et D_2 sont simultanément diagonalisables, et donc que D_2-D_1 est diagonalisable.

Par ailleurs, si $M_1^p=0_n$ et $M_2^q=0_n$, alors comme M_1 et M_2 commutent, on a :

$$(M_1-M_2)^{p+q}=\sum_{k=0}^{p+q}\binom{p+q}{k}M_1^k(-M_2)^{p+q-k}.$$

Soit :

$$(M_1 - M_2)^{p+q} = M_2^q \sum_{k=0}^{p} \binom{p+q}{k} M_1^k (-1)^{p+q-k} M_2^{p-k} + M_1^p \sum_{k=p+1}^{p+q} \binom{p+q}{k} M_1^{k-p} (-M_2)^{p+q-k} = 0_n .$$

Donc, $M_1 - M_2$ est nilpotente.

Or, $D_1 + M_1 = D_2 + M_2$ se récrit $D_2 - D_1 = M_1 - M_2 = A$ et cette matrice A est nilpotente et diagonalisable, donc nulle d'après ce qui précède. Ainsi, $D_2 - D_1 = M_1 - M_2 = 0_n$, soit :

$$M_1 = M_2 \text{ et } D_1 = D_2 .$$

Planche n° 19

Soit $E = \left\{ f \in C^2([0,1],\mathbb{R}) \setminus f(0) = f'(0) = 0 \right\}$. Montrer que *N*, définie par $N(f) = \sup\limits_{[0,1]} |f'' + 2f' + f|$ est une norme sur *E*.

Soit $h(t) = e^t f(t)$ avec $f \in E$. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $h(t) = \int_0^t (t-u)h''(u)du$.

Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\|f\|_\infty \leq aN(f)$ et minimiser *a*.

Notons : $\begin{array}{l} u : E \to C^0([0,1],\mathbb{R}) \\ \quad f \mapsto f'' + 2f' + f \end{array}$

L'application u est bien définie sur E et à images dans $C^0([0,1],\mathbb{R})$. De plus, elle est linéaire (par linéarité de la dérivation) et, pour toute $g \in C^0([0,1],\mathbb{R})$, le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} f'' + 2f' + f = g \\ f(0) = f'(0) = 0 \end{cases}$$

admet une unique solution dans *E*, ce qui prouve que *u* est bijective.

Ainsi, *u* est un isomorphisme de *E* dans $C^0([0,1],\mathbb{R})$ et pour toute $f \in E$:

$$N(f) = \|u(f)\|_\infty$$

où $\|.\|_\infty$ désigne la norme infinie sur $C^0([0,1],\mathbb{R})$.

L'application *N* est donc définie sur *E*, et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

De plus, pour toutes $f, g \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

- $N(\lambda f) = \|u(\lambda f)\|_\infty = \|\lambda u(f)\|_\infty = |\lambda| . \|u(f)\|_\infty$;
- $N(f) = 0 \Leftrightarrow \|u(f)\|_\infty = 0 \Leftrightarrow u(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$;
- $N(f+g) = \|u(f+g)\|_\infty = \|u(f) + u(g)\|_\infty \leq \|u(f)\|_\infty + \|u(g)\|_\infty = N(f) + N(g)$.

Donc, *N* est bien une norme sur *E*.

****

Comme *f* est C^2 sur $[0,1]$, *h* l'est aussi et, $h(0)=e^0f(0)=0$ et $h'(0)=e^0f(0)+e^0f'(0)=0$.

Pour tout $t\in[0,1]$, on a alors, en intégrant par parties :

$$\int_0^t(t-u)h''(u)du=\left[(t-u)h'(u)\right]_0^t+\int_0^t h'(u)du=th'(0)+\left[h(u)\right]_0^t=h(t)-h(0)=h(t).$$

****

Pour tout $t\in[0,1]$, on a $h'(t)=e^tf(t)+e^tf'(t)$, donc $h''(t)=e^t\left[f''(t)+2f'(t)+f(t)\right]$ et :

$$|h(t)|=\left|\int_0^t(t-u)h''(u)du\right|\le\int_0^t(t-u)|h''(u)|du=\int_0^t(t-u)e^u|f''(u)+2f'(u)+f(u)|du.$$

Et :

$$\int_0^t(t-u)e^u|f''(u)+2f'(u)+f(u)|du\le N(f)\int_0^t(t-u)e^udu=(e^t-t-1)N(f).$$

Ainsi, pour tout $t\in[0,1]$:

$$|h(t)|=|e^tf(t)|\le(e^t-t-1)N(f)\quad\Rightarrow\quad|f(t)|\le\left[1-(t+1)e^{-t}\right]N(f)\le(1-2e^{-2})N(f).$$

En passant à la borne supérieure, on obtient :

$$\|f\|_\infty\le(1-2e^{-2})N(f).$$

Si on pose $g(t)=1-(t+1)e^{-t}$, on a $g\in C^2\left([0,1],\mathbb{R}\right)$ avec $g(0)=0$ et $g'(t)=te^{-t}$ donc $g'(0)=0$ et ainsi, $g\in E$. Comme *g* est croissante et positive, on a $\|g\|_\infty=g(1)=1-2e^{-2}$.

De plus, pour tout $t\in[0,1]$, $g''(t)=e^{-t}-te^{-t}$, donc :

$$g''(t)+2g'(t)+g(t)=e^{-t}-te^{-t}+2te^{-t}+1-(t+1)e^{-t}=1$$

Ainsi, $N(g)=1$ et donc, $\|g\|_\infty=(1-2e^{-2})N(g)$ avec $g\in E$.

Ceci prouve que $1-2e^{-2}$ est la plus petite valeur possible de *a* tel que $\|f\|_\infty\le aN(f)$ pour toute fonction *f* de *E*.

Planche n° 20

Soient $\alpha\in\mathbb{R}$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{k^\alpha}{n^2}\right)$.

On choisit ici $\alpha=2$. Etudier la convergence et donner la limite éventuelle de (u_n).

Ici, $\alpha\in[0,1]$. Convergence et limite éventuelle de (a_n) telle que $a_n=\sum_{k=1}^n\frac{k^\alpha}{n^2}$.

Même question pour (u_n).

Remarquons que quel que soit α, on a $u_n>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. On peut donc en prendre le ln.

Pour $\alpha = 2$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right) = n\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right]$ avec $f(t) = \ln(1+t^2)$.

La fonction *f* est continue sur $[0,1]$, donc $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ est une somme de Riemann et ainsi ;

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt.$$

Comme $f(t) > 0$ sur $]0,1]$, on a $\int_0^1 f(t)dt > 0$ et ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \ln u_n = +\infty$, donc, quand $\alpha = 2$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

****

On suppose que $\alpha \in [0,1]$. Par comparaison série-intégrale, on obtient $\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, donc :

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^\alpha}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \sim \frac{1}{(\alpha+1)n^{1-\alpha}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{quand } \alpha < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{quand } \alpha = 1 \end{cases}$$

On a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $t - \frac{1}{2}t^2 \leq \ln(1+t) \leq t$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \frac{k^\alpha}{n^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{k^\alpha}{n^2}\right)^2 \leq \ln\left(1+\frac{k^\alpha}{n^2}\right) \leq \frac{k^\alpha}{n^2} \quad \Rightarrow \quad a_n - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{2\alpha}}{n^4} \leq \ln u_n \leq a_n.$$

Et, comme plus haut, $\sum_{k=1}^{n} k^{2\alpha} \sim \frac{n^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}$, donc $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{2\alpha}}{n^4} \sim \frac{1}{(2\alpha+1)n^{3-2\alpha}}$ et, comme $3-2\alpha \in [1,3]$, on a $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{2\alpha}}{n^4} = 0$, donc, $\lim_{n\to+\infty} \ln u_n = \lim_{n\to+\infty} a_n$ et ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} 1 & \text{quand } \alpha < 1 \\ \sqrt{e} & \text{quand } \alpha = 1 \end{cases}$$

Planche n° 21

Montrer la convergence pour $x \in \mathbb{R}^*$ de $f(x) = \int_{-x}^{x} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}}$.

La fonction *f* admet-elle une limite en + ∞ ? Si oui, la calculer.

Etudier également l'existence d'une limite en 0.

On note $\tilde{f}$ la fonction prolongée par continuité en 0^+.

Trouver une série de fonctions $S(x)$ coïncidant avec $\tilde{f}$ sur un intervalle $[0,h[$, avec $h > 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}} \underset{t \to \pm x}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{x^2-t^2}}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{dt}{\sqrt{x^2-t^2}}$ converge (et vaut $2\arcsin\left(\dfrac{x}{|x|}\right)$), donc $f(x)$ est bien défini.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $-x \in \mathbb{R}^*$ et $f(-x) = -f(x)$, donc *f* est impaire.

On a de plus, $\displaystyle\int_{-x}^{0} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}} = \int_{0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}}$, donc $\displaystyle f(x) = 2\int_{0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}}$.

Enfin, en posant $t = xu$, on obtient pour $x > 0$:

$$f(x) = 2\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1+x^2u^2)(1-u^2)}}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $g_n(t) = \dfrac{1}{\sqrt{(1+n^2t^2)(1-t^2)}}$. La fonction g_n est continue sur $]0,1[$ et la suite (g_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $]0,1[$, qui est continue.

De, plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in]0,1[$, $|g_n(t)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]0,1[$. Ainsi, par le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 g_n(u)du = \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1+n^2u^2)(1-u^2)}} = \int_0^1 0du = 0.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq f(x) \leq \displaystyle\int_0^1 g_{E(x)}(u)du$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^1 g_{E(x)}(u)du = 0$, donc :

$$\underline{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}.$$

****

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $1 - \dfrac{h}{2} \leq \dfrac{1}{\sqrt{1+h}} \leq 1$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $u \in [0,1[$, on a :

$$\left(1 - \frac{x^2u^2}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{(1+x^2u^2)(1-u^2)}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Donc :

$$2\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} - x^2\int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}du \leq f(x) \leq 2\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Soit, avec $\displaystyle 2\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = 2[\arcsin u]_0^1 = \pi$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}du = \frac{\pi}{4} \in \mathbb{R}$:

$$\pi - \frac{\pi}{4}x^2 \leq f(x) \leq \pi.$$

Avec le théorème de gendarmes, on obtient (avec l'imparité) :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\pi \text{ et } \lim_{x\to 0^-} f(x)=-\pi .$$

****

On a pour tout $t\in\,]-1,1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}t^n$, donc, pour tous $x\in\,]0,1[$ et $u\in[0,1[$:

$$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2u^2)(1-u^2)}}=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}\frac{u^{2n}}{\sqrt{1-u^2}}=\sum_{n\geq 0}h_n(u).$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, h_n est continue et intégrable sur $[0,1[$ (car $\dfrac{u^{2n}}{\sqrt{1-u^2}}\leq\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$).

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{u^{2n}}{\sqrt{1-u^2}}du$. On a alors :

$$I_n-I_{n+1}=\int_0^1\frac{u^{2n}-u^{2n+2}}{\sqrt{1-u^2}}du=\int_0^1 u^{2n}\sqrt{1-u^2}\,du.$$

En intégrant par parties (les différents termes convergent en 1) :

$$I_n-I_{n+1}=\left[\frac{u^{2n+1}}{2n+1}\sqrt{1-u^2}\right]_0^1-\int_0^1\frac{u^{2n+1}}{2n+1}\frac{-2u}{2\sqrt{1-u^2}}du=\frac{1}{2n+1}\int_0^1\frac{u^{2(n+1)}}{\sqrt{1-u^2}}du=\frac{1}{2n+1}I_{n+1}.$$

Donc, $I_{n+1}=\dfrac{2n+1}{2n+2}I_n$ et comme $I_0=\displaystyle\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{\pi}{2}$, les I_n sont tous strictement positifs et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$I_n=\left(\prod_{k=0}^{n-1}\frac{I_{k+1}}{I_k}\right)I_0=\left(\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2k+1}{2k+2}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{1\times 3\times\ldots\times(2n-1)}{2\times 4\times\ldots\times(2n)}\frac{\pi}{2}=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}.$$

On a donc :

$$\int_0^1|h_n(u)|\,du=\int_0^1\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}\frac{u^{2n}}{\sqrt{1-u^2}}du=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}I_n=\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2\frac{\pi}{2}x^{2n}.$$

Or, avec la formule de Stirling, on a $\displaystyle\int_0^1|h_n(u)|\,du\sim\frac{x^{2n}}{2n}$ et $\sum\dfrac{x^{2n}}{2n}$ converge car $0<x^2<1$, donc $\sum\displaystyle\int_0^1|h_n(u)|\,du$ converge et ainsi :

$$f(x)=2\int_0^1\left(\sum_{n\geq 0}h_n(u)\right)du=2\sum_{n\geq 0}\int_0^1 h_n(u)du=2\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}I_n.$$

Soit, pour tout $x\in[0,1[$:

$$\tilde{f}(x)=\pi\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2x^{2n}.$$

Planche n° 22

Soient $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \setminus \max(x,y)\leq 2,\ \min(x,y)\geq -2\}$ et $F(x,y)=x^4+y^4-2(x-y)^2$.

F admet-elle des extrema sur A ?

Quels points sont susceptibles d'être ses extrema locaux ?

Etudier $F(x,x)$ et $F(-x,x)$. Que dire à propos de l'un des extrema locaux ?

Donner les extrema de F sur A, puis tous ses extrema.

On a :

$$\max(x,y)\leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 2 \\ y\leq 2 \end{cases} \qquad \min(x,y)\geq -2 \Leftrightarrow \begin{cases} -2\leq x \\ -2\leq y \end{cases}$$

Donc, on a simplement $A=[-2,2]^2$, qui est une partie fermée, bornée de $\mathbb{R}^2$. Or, la fonction F est polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}^2$ et ainsi, elle admet un minimum et un maximum sur la partie compacte A.

****

La fonction F est polynomiale, donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et points où les extrema locaux sont susceptibles d'être atteints sont les points critiques. On a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)=4x^3-4(x-y)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)=4y^3+4(x-y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3=x-y \\ y^3=-x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-2x=0 \\ y=-x \end{cases}$$

Ainsi, es points critiques sont : $(0,0)$ $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

****

On a pour tout $x\in[-2,2]$, $F(x,x)=2x^4\geq 0$ et $F(-x,x)=2x^4-8x^2=2x^2(x^2-4)\leq 0$.

Comme $F(0,0)=0$, on a pour tout $x\in[-2,2]$, $F(x,x)\geq F(0,0)$ et $F(-x,x)\leq F(0,0)$, ce qui veut dire que $F(0,0)=0$ n'est pas un extremum (local ou global).

****

Pour tout $(x,y)\in A$:

$$F(x,y)=x^4+y^4-2(x-y)^2\leq x^4+y^4\leq 2^4+2^4=32=F(2,2).$$

Donc, 32 est le maximum de F sur A, atteint en $(2,2)$ (et $(-2,-2)$).

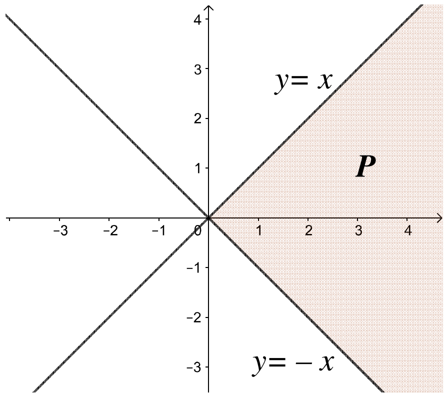
Remarquons que $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x,x)=\lim\limits_{x\to+\infty}2x^4=+\infty$, donc F n'admet pas de maximum sur $\mathbb{R}^2$.

****

Remarquons que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $F(x,y)=F(-x,-y)=F(y,x)$ et pour tout $(x,y)\in A$, $(-x,-y)\in A$ et $(y,x)\in A$.

Ainsi, si F admet un minimum sur A (*resp.* sur $\mathbb{R}^2$), ce minimum sera atteint dans $A\cap P$ (*resp.*

dans *P*), où *P* est le quart de plan défini par : $\begin{cases} x \geq 0 \\ -x \leq y \leq x \end{cases}$, tel que sur la figure suivante.



Pour $(x, y) \in P$, posons $u = \dfrac{x+y}{2} \geq 0$ et $v = \dfrac{x-y}{2} \geq 0$. On a alors $x = u+v$, $y = u-v$ et :

$$\begin{aligned} F(x, y) &= (u+v)^4 + (u-v)^4 - 2(u+v-u+v)^2 \\ &= 2u^4 + 2(v^4 - 4v^2) + 12u^2v^2 = 2u^4 + 12u^2v^2 + 2(v^2-2)^2 - 8 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $(x, y) \in P$, $F(x, y) \geq -8 = F(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, donc -8 est le minimum de *F* sur $A \cap P$ et sur *P*, et finalement, -8 est le minimum de *F* sur *A* et sur $\mathbb{R}^2$.

Planche n° 23 (avec Python)

La probabilité d'obtenir pile en lançant une pièce est $p \in]0,1[$; on note E_n l'évènement « ne pas obtenir 2 piles d'affilée au cours des *n* premiers lancers » et p_n sa probabilité.

[*Ecrire un programme qui prend n et p pour paramètres et renvoie* ***True*** *si* E_n *et* ***False*** *sinon.*]

Montrer que $p_{n+2} = (1-p)p_{n+1} + p(1-p)p_n$ et en déduire que l'évènement « obtenir 2 piles d'affilée sur un nombre infini de lancers » est presque sûr.

On note *T* la variable aléatoire donnant le rang d'apparition du second pile de la première paire de piles consécutifs (aucun piles consécutifs entre les rangs 1 et $T-1$, et pile sort aux rangs T et $T-1$).

[*Ecrire un programme qui donne la probabilité de l'évènement* $(T = n)$ *pour un entier* $n \geq 2$.]

Donner la fonction génératrice de *T*, montrer que *T* admet une espérance et la calculer.

[*Ecrire un programme qui vérifie la valeur de cette espérance.*]

Appelons E_n^p (*resp.* E_n^f) l'évènement « ne pas obtenir 2 piles d'affilée au cours des *n* premiers lancers et obtenir pile (*resp.* face) au $n^{\text{ième}}$ lancer ». (E_{n+2}^p, E_{n+2}^f) forme une partition de E_{n+2} donc :

$$p_{n+2} = p(E_{n+2}) = p(E_{n+2}^p) + p(E_{n+2}^f).$$

- pour réaliser E_{n+2}^p, il faut ne pas avoir obtenu 2 piles d'affilée au cours des *n* premiers lancers, avoir face au $(n+1)^{\text{ième}}$ lancer et pile au $(n+2)^{\text{ième}}$, donc $p(E_{n+2}^p) = p(E_n)(1-p)p = p(1-p)p_n$.

- pour réaliser E_{n+2}^{f}, il faut ne pas avoir obtenu 2 piles d'affilée au cours des $n+1$ premiers lancers et avoir face au $(n+2)^{\text{ième}}$ lancer, donc $p(E_{n+2}^{f}) = p(E_{n+1})(1-p) = (1-p)p_{n+1}$.

Ainsi, on a bien :

$$p_{n+2} = (1-p)p_{n+1} + p(1-p)p_n .$$

****

On a $p_1 = p(E_1) = 1$ et $p_2 = p(E_2) = 1-p^2$ (car $p(\overline{E}_2) = p^2$). Si on pose $p_0 = 1$, la relation de récurrence reste vérifiée au rang 0. Cette relation est une relation de récurrence linéaire double, d'équation caractéristique associée : $x^2 - (1-p)x - p(1-p) = 0$, dont les racines sont :

$$r_1 = \frac{1-p+\sqrt{(1-p)(1+3p)}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1-p-\sqrt{(1-p)(1+3p)}}{2}.$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n .$$

Avec $p_0 = \lambda + \mu = 1$ et $p_1 = \lambda r_1 + \mu r_2 = 1$, on obtient :

$$\lambda = \frac{1-r_2}{r_1 - r_2} = \frac{1+p+\sqrt{(1-p)(1+3p)}}{2\sqrt{(1-p)(1+3p)}} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{r_1 - 1}{r_1 - r_2} = \frac{-(1+p)+\sqrt{(1-p)(1+3p)}}{2\sqrt{(1-p)(1+3p)}}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_n = \frac{1+p+\sqrt{(1-p)(1+3p)}}{2\sqrt{(1-p)(1+3p)}}\left(\frac{1-p+\sqrt{(1-p)(1+3p)}}{2}\right)^n - \frac{1+p-\sqrt{(1-p)(1+3p)}}{2\sqrt{(1-p)(1+3p)}}\left(\frac{1-p-\sqrt{(1-p)(1+3p)}}{2}\right)^n$$

Posons $f(x) = \dfrac{1-x+\sqrt{(1-x)(1+3x)}}{2}$ et $g(x) = \dfrac{1-x-\sqrt{(1-x)(1+3x)}}{2}$.

L'étude de ces deux fonctions montre que sur $[0,1]$, f est strictement décroissante de 1 à 0, et g est strictement décroissante de 0 à $-\dfrac{1}{3}$ sur $\left[0,\dfrac{2}{3}\right]$ et strictement croissante de $-\dfrac{1}{3}$ à 0 sur $\left[\dfrac{2}{3},1\right]$.

Ainsi, pour tout $p \in]0,1[$, on a $|r_1| = |f(p)| < 1$ et $|r_2| = |g(p)| < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$.

On a alors $p(\overline{E}_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(1-p_n) = 1$ et ainsi, l'évènement limite « obtenir 2 piles d'affilée sur un nombre infini de lancers » est presque sûr.

****

Notons A_n l'évènement « obtenir pile au $n^{\text{ième}}$ lancer ».

Avec les notations introduites plus haut, on a alors, pour un entier $n \geq 2$:

$$(T = n) = E_{n-1}^{p} \cap A_n .$$

Les lancers étant indépendants, E_{n-1}^p et A_n sont indépendants, donc :

$$P(T=n)=P(E_{n-1}^p)P(A_n).$$

On a vu que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $p(E_{n+2}^p)=p(1-p)p_n$, donc, avec $P(A_n)=p$, on obtient pour tout entier $n\geq 3$:

$$P(T=n)=p^2(1-p)p_{n-3}.$$

Alors, avec $P(T=2)=P(A_1\cap A_2)=P(A_1)P(A_2)=p^2$, on obtient pour tout $t\in[0,1]$:

$$G_T(t)=\sum_{n=2}^{+\infty}P(T=n)t^n=p^2t^2+\sum_{n=3}^{+\infty}p^2(1-p)p_{n-3}t^n=p^2t^2+p^2(1-p)t^3\sum_{n=0}^{+\infty}p_nt^n.$$

Avec les notations introduites plus haut, on obtient :

$$G_T(t)=p^2t^2+p^2(1-p)t^3\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lambda r_1^n+\mu r_2^n\right)t^n=p^2t^2+p^2(1-p)t^3\left(\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}r_1^nt^n+\mu\sum_{n=0}^{+\infty}r_2^nt^n\right).$$

Soit, avec $|r_1|<1$ et $|r_2|<1$, pour tout $t\in[0,1]$:

$$\boxed{G_T(t)=p^2t^2+p^2(1-p)t^3\left(\frac{\lambda}{1-r_1t}+\frac{\mu}{1-r_2t}\right)}$$

La fonction G_T est rationnelle, définie et dérivable en 1, donc *T* admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}E(T)=G_T'(1)&=2p^2+3p^2(1-p)\left(\frac{\lambda}{1-r_1}+\frac{\mu}{1-r_2}\right)+p^2(1-p)\left(\frac{\lambda r_1}{(1-r_1)^2}+\frac{\mu r_2}{(1-r_2)^2}\right)\\&=2p^2+3p^2(1-p)\frac{\lambda(1-r_2)+\mu(1-r_1)}{(1-r_1)(1-r_2)}+p^2(1-p)\frac{\lambda r_1(1-r_2)^2+\mu r_2(1-r_1)^2}{(1-r_1)^2(1-r_2)^2}\\&=2p^2+3p^2(1-p)\frac{\lambda+\mu-(\lambda r_2+\mu r_1)}{(1-r_1)(1-r_2)}+p^2(1-p)\frac{\lambda r_1+\mu r_2-2(\lambda+\mu)r_1r_2+(\lambda r_2+\mu r_1)r_1r_2}{(1-r_1)^2(1-r_2)^2}\end{aligned}$$

Rappelons que $\lambda+\mu=1$ et $\lambda r_1+\mu r_2=1$, et r_1 et r_2 sont les racines de $X^2-(1-p)X-p(1-p)$, donc $X^2-(1-p)X-p(1-p)=(X-r_1)(X-r_2)$ et :

$$\begin{aligned}&(1-r_1)(1-r_2)=1^2-(1-p)-p(1-p)=p^2\\&r_1+r_2=1-p\\&r_1r_2=-p(1-p)\\&\lambda r_2+\mu r_1=(1-\mu)r_2+(1-\lambda)r_1=r_1+r_2-(\lambda r_1+\mu r_2)=1-p-1=-p\end{aligned}$$

Alors :

$$E(T)=2p^2+3p^2(1-p)\frac{1+p}{p^2}+p^2(1-p)\frac{1+2p(1-p)+p^2(1-p)}{p^4}$$

Ainsi, *T* admet une espérance et :

$$\boxed{E(T)=\frac{1+p}{p^2}}$$

Planche n° 24 (*avec Python*)

Une particule se déplace sur une surface comportant quatre positions successives, A_0 qui est un puits, A_1 et A_2, deux positions intermédiaires, A_3 un second puits. A l'instant $t = n$:

- si la particule est dans un puits, elle y reste avec une probabilité égale à 1 ;
- si elle est en A_1, elle va en A_0 avec la probabilité p et en A_2 avec la probabilité $1-p$;
- si elle est en A_2, elle va en A_1 avec la probabilité p et en A_3 avec la probabilité $1-p$.

On note x_n la position de la particule à $t = n$, avec $x_n(\Omega) = [\![0,3]\!]$.

[*Ecrire une fonction Python qui donne* x_{n+1} *en fonction de* x_n *et* $p = \frac{1}{2}$.

Ecrire une fonction renvoyant x_n *en fonction de* x_0 *et* p.

Faire l'histogramme des x_n *obtenues sur N essais.*]

Soit $X_n = \begin{pmatrix} P(x_n = 0) \\ P(x_n = 1) \\ P(x_n = 2) \\ P(x_n = 3) \end{pmatrix}$. Trouver $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, indépendante de *n*, telle que $X_{n+1} = AX_n$.

Montrer que *A* est diagonalisable si et seulement si $0 < p < 1$.

On suppose $p = \frac{1}{2}$. Diagonaliser *A* et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} X_n$.

[*Comparer aux résultats obtenus précédemment.*]

Soit $k \in [\![0,3]\!]$, par la loi des probabilités totales, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(x_{n+1} = k) = \sum_{i=0}^{3} P_{(x_n = i)}(x_{n+1} = k) P(x_n = i).$$

Ceci donne :

$$\begin{cases} P(x_{n+1} = 0) = P(x_n = 0) + pP(x_n = 1) \\ P(x_{n+1} = 1) = pP(x_n = 2) \\ P(x_{n+1} = 2) = (1-p)P(x_n = 1) \\ P(x_{n+1} = 3) = (1-p)P(x_n = 2) + P(x_n = 3) \end{cases} \Leftrightarrow \quad X_{n+1} = AX_n \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 1 \end{pmatrix}.$$

****

On a alors :

$$\chi_A = (X-1)^2 \left(X + \sqrt{p(1-p)} \right) \left(X - \sqrt{p(1-p)} \right).$$

Donc, $Sp(A) = \left\{ 1, -\sqrt{p(1-p)}, \sqrt{p(1-p)} \right\}$.

Si $X = (x, y, z, t)$, on a :

$$AX = X \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} py = (1-p)y = 0 \\ y = z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad y = z = 0.$$

Donc, $\ker(A-I_4)=\text{Vect}\left[(1,0,0,0),(0,0,0,1)\right]$ et $\dim\left(\ker(A-I_4)\right)=2$.

De plus, $\sqrt{p(1-p)}\neq 1$ quel que soit p et $-\sqrt{p(1-p)}\neq\sqrt{p(1-p)}$ si et seulement si $p\in\,]0,1[$.
Dans ce cas, A admet trois valeurs propres distinctes, $\dim\left(\ker(A-I_4)\right)=2$ et les deux autres sous-espaces propres sont des droites, donc A est diagonalisable.

Si $p=0$, on a $Sp(A)=\{0,1\}$ et $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$. On a alors $rg(A)=3$, donc $\dim\left(\ker A\right)=1$ et ainsi, $\dim\left(\ker(A-I_4)\right)+\dim\left(\ker A\right)=3<4$, donc A n'est pas diagonalisable. On montre de même que c'est aussi le cas pour $p=1$ et finalement, A est diagonalisable si et seulement si $0<p<1$.

****

On prend $p=\frac{1}{2}$. Alors, $A=\begin{pmatrix}1&½&0&0\\0&0&½&0\\0&½&0&0\\0&0&½&1\end{pmatrix}$ et $Sp(A)=\left\{1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$, avec :

$$\ker(A-I_4)=\text{Vect}\left[(1,0,0,0),(0,0,0,1)\right]$$
$$\ker(A-\tfrac{1}{2}I_4)=\text{Vect}\left[(1,-1,-1,1)\right]$$
$$\ker(A+\tfrac{1}{2}I_4)=\text{Vect}\left[(1,-3,-1,3)\right]$$

Donc:

$$A=P\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&½&0&0\\0&0&-½&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}\text{ avec }P=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&-1&-3&0\\0&-1&3&0\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\text{ et }P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&4&2&0\\0&-3&-3&0\\0&-1&1&0\\0&2&4&6\end{pmatrix}.$$

On a alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A^n=P\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&(½)^n&0&0\\0&0&(-½)^n&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$ et $X_n=A^nX_0$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty}X_n=\lim_{n\to+\infty}A^nX_0=P\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}X_0=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&2&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&2&3\end{pmatrix}X_0.$$