Préparation aux oraux : série 5

CCINP

Planche n° 19

I) Donner un équivalent de $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ quand *n* tend vers + ∞.

II) Montrer que $(P \mid Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Montrer que $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = 0\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$, donner sa dimension et calculer $d(1, E)$.

Planche n° 20

I) Ecrire la matrice de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x - 2y + z = 0$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

II) On lance *n* fois un dé et on note X_k le chiffre obtenu au $k^{\text{ième}}$ lancer.

Donner la loi et la fonction de répartition *F* de X_k.

Donner, en fonction de *F*, la fonction de répartition F_n du maximum M_n atteint au cours des *n* lancers. La suite (F_n) converge-t-elle ? Uniformément ?

Mêmes questions pour le minimum m_n.

Planche n° 21

I) Une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie $M^2 + 4I_2 = 0_2$ et $S = {}^tMM = M\,{}^tM$.

Trouver un polynôme annulateur de degré 2 de *S*. En déduire que $\frac{1}{2}M$ est orthogonale.

Déterminer toutes les matrices *M* de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + 4I_2 = 0_2$ et ${}^tMM = M\,{}^tM$.

II) Etude de l'arc paramétré $\left(x(t) = \frac{1}{t} + \ln(2+t)\, ,\ y(t) = t + \frac{1}{t} \right)$. On précisera en particulier les tangentes parallèles aux axes du repère, les branches infinies, les points particuliers de l'arc.

Planche n° 22 (ENSAM)

I) Montrer que *f*, donnée par $f(x)=\int_1^{+\infty}\frac{t^{-x}}{1+t}\,dt$, est continue et décroissante sur $]0,+\infty[$.

Calculer $f(1)$.

Montrer que pour tout réel $x>0$, $f(x+1)+f(x)=\frac{1}{x}$ et trouver un équivalent de *f* en 0.

Trouver la limite et un équivalent de *f* en + ∞.

II) Montrer que *f*, défini par $f(M)=M+Tr(M)\,I_n$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et déterminer les dimensions de $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.

Déterminer un polynôme annulateur de *f* de degré 2.

L'endomorphisme *f* est-il diagonalisable ? Bijectif ? Si oui, calculer f^{-1}.

Planche n° 23

I) Des variables aléatoires mutuellement indépendantes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p\in\,]0,1[$. Déterminer la loi de $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$.

On se donne une variable aléatoire *N* à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $N+1$ suive la loi géométrique de paramètre *p*. Calculer, pour tout $k\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\,]-1,1[$, la valeur de $\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^{n-k}$.

Déterminer $P\left(S_N=k\right)$ pour tout entier naturel *k*.

II) Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2+{}^tM=I_n$.

Montrer que si *P* est un polynôme annulateur de *M*, toute valeur propre de *M* est racine de *P*.

Montrer, sans utiliser le théorème spectral, que si *M* est symétrique, alors elle est diagonalisable et que $Tr(M)\times\det M\neq 0$.

Dans le cas général, montrer que *M* est diagonalisable et symétrique si et seulement si 1 n'en est pas valeur propre.

Centrale-Supélec

Planche n° 31

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possédant *p* valeurs propres distinctes $\lambda_1,\dots,\lambda_p$, avec $2\le p\le n$. On suppose que pour tout $i\in[\![2,p]\!]$, $|\lambda_i|<|\lambda_1|$ (*).

1) Pour tout $k\in\mathbb{N}$ tel que $Tr(A^k)\neq 0$, on note $t_k=\frac{Tr(A^{k+1})}{Tr(A^k)}$.

   Montrer que la suite $\left(t_k\right)$ est définie à partir d'un certain rang, qu'elle converge et déterminer sa limite.

2) Justifier que si l'hypothèse (*) n'est pas vérifiée, le résultat précédent peut être faux.

3) Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a. Montrer que A et B sont semblables.

   b. Déterminer la limite de $\frac{1}{k}A^k$ quand $k \to +\infty$.

Planche n° 32 (avec Python)

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci définie par $F_0=0$, $F_1=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$.

On note β la racine négative de X^2-X-1 et $f:\left]-1,1\right[\to\mathbb{R}\,;x\mapsto\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{1-x^k}$.

1) Montrer que *f* est bien définie et de classe C^1 sur $\left]-1,1\right[$.

2) Ecrire une fonction `f(n,x)` qui renvoie $\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{1-x^k}$ et une fonction `Tracef(n)` qui trace la fonction $x\mapsto f(n,x)$ sur $\left]-1,1\right[$.

3) Ecrire une fonction `SommeFibo(n)` qui renvoie $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{F_{2k}}$, puis conjecturer la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{F_{2k}}-\sqrt{5}\left(f(\beta^2)-f(\beta^4)\right)$.

4) Exprimer F_n en fonction de n et β, puis prouver la conjecture.

5) A l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que $f(e^{-y}) \underset{y\to 0^+}{\sim} -\frac{\ln y}{y}$.

Planche n° 33

On note $diag(a,b)=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ pour $a,b\in\mathbb{R}$.

1. Soit $S=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$. Montrer que S est semblable à une matrice diagonale que l'on précisera.
   Montrer que S est semblable à une matrice de diagonale nulle.
2. Soient $D=diag(1,2)$ et $\varphi: M\mapsto DM-MD$.
   Montrer qu'il existe des matrices A et B telles que $S=AB-BA$.

Planche n° 34 (avec Python)

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\alpha} (\operatorname{sh} t)^n \, dt$ où le réel α est défini ci-dessous.

1) Justifier que l'équation $\operatorname{sh} x = 1$ d'inconnue réelle x admet une unique solution, appelée α.
2) Donner un encadrement de longueur 10^{-5} de cette solution.
3) Écrire une fonction `Suite(n)` donnant une valeur approchée de chacun des réels $I_1, \dots, I_n$.
4) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$.
5) Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
6) En déduire un équivalent de I_n en $+\infty$.

Planche n° 35 (avec Python)

On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices symétriques à coefficients strictement positifs.

Dans la suite, $\mathbb{R}^n$ est assimilé à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et muni du produit scalaire et de la norme canoniques.

1. a) Faire un programme qui prend en argument un entier n et renvoie une matrice de $\mathcal{E}_n$ avec des coefficients tirés aléatoirement.

   b) Déterminer à l'aide de Python les valeurs propres de différentes matrices de $\mathcal{E}_n$.
   Une matrice de $\mathcal{E}_n$ peut-elle avoir une valeur propre strictement négative ? toutes les valeurs propres strictement négatives ?

2. On note $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de $A \in \mathcal{E}_n$ et $(X_1, \dots, X_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres, où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, X_i est associé à λ_i.

   a) Que peut-on conjecturer sur les coefficients de X_n ?

   b) Montrer que pour tout $Y \in \mathbb{R}^n$, ${}^tYAY \leq \lambda_n \|Y\|^2$.

   c) Démontrer la conjecture (on pourra considérer le vecteur Z_n dont les composantes sont les valeurs absolues des composantes de X_n).

3. On note $A_a = \begin{pmatrix} A & aX_3 \\ a\,{}^tX_3 & 0 \end{pmatrix}$ pour tout réel a.

   a) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

   Donner les valeurs propres de A. En déduire celles de A_a pour certaines valeurs de a.

   b) Donner les valeurs propres de A_a dans le cas général.

   c) *Question non notée*.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :

Question 2.c) : Montrer que ${}^tZ_nAZ_n \geq \lambda_n \|Z_n\|^2$.

Question 3.a) : S'intéresser à $A_a \begin{pmatrix} X_i \\ 0 \end{pmatrix}$ où X_i est un vecteur propre de associé à λ_i.

Planche n° 36 (PC)

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme :

$$A \mapsto \|A\| = \sup\left\{\|AX\|_2 , X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\|_2 = 1\right\}.$$

1) Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2) Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} ; A \mapsto Tr(A)$. Déterminer $f\left(O_n(\mathbb{R})\right)$.

Planche n° 37 (PC)

On définit pour tout réel $\alpha > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$ et $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ où x est un réel.

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, étudier la convergence de $I_n(\alpha)$ en fonction de α.
2) Montrer que $\Gamma(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
3) Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha n^{\frac{1}{\alpha}} I_n(\alpha) = \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.
4) Une question non notée.

Planche n° 38 (PC, avec Python)

L'espace $\mathbb{R}^n$, est identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, est muni du produit scalaire et de la norme canoniques.

Soit $H_n = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1 \le i, j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (matrice de Hilbert) et pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $q_n(x) = \langle H_n x \mid x \rangle$.

1) Énoncer le théorème spectral. Peut-on l'appliquer à H_n ?
2) Exprimer $q_n(x)$ en fonction des x_i. La fonction est-elle continue sur $\mathbb{R}^n$?
3) Soit $S_n = \left\{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\right\}$. Montrez que q_n est bornée et atteint ses bornes sur S_n.
4) Ecrire un programme Python qui calcule H_n et $q_n(x)$. Calculez les valeurs propres de H_n pour n compris entre 2 et 5 inclus. Faire une conjecture sur le signe des valeurs propres de H_n.
5) Montrer que $q_n(x) = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1}\right)^2 dt$ et conclure sur la conjecture.
6) 7) 8) Trois questions non notées.

Mines-Ponts

Planche n° 17

I) Montrer que si f est de classe C^n sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et s'annule n fois, alors pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $f^{(n-k)}$ s'annule au moins k fois.

Qu'en déduit-on, au mieux, en fonction du degré de $P \in \mathbb{R}[X]$, sur le nombre de fois où $P(x) = e^x$.

II) Montrer qu'un endomorphisme symétrique s d'un espace euclidien est ρ-lipchitzien si et seulement si toutes ses valeurs propres sont de module au plus égal à ρ.

Montrer que, dans le cas d'un endomorphisme quelconque, seul un sens de l'équivalence reste vrai.

Planche n° 18

I) Par une comparaison série-intégrale, trouver un équivalent de $u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k}$ défini pour $n \geq 2$.

Etudier la monotonie et la convergence de la suite de terme général $v_n = u_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2$.

On admet que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$. Montrer que $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k \ln k}{k} = \ln 2\left(\gamma - \frac{\ln 2}{2}\right)$.

II) Déterminer les classes de similitude de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Planche n° 19

I) Domaine de définition de f, définie par $f(x) = \int_0^x \frac{\ln|1-t|}{t} dt$.

La fonction f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ? Quel est alors son rayon de convergence ? Calculer $f(1)$. Etudier la dérivabilité de f.

II) **(*PC*)** Soient A et B deux matrices symétriques réelles d'ordre n.
On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ bijectif, tel que $P(A) = P(B)$. Montrer que $A = B$.

Planche n° 20

I) Convergence et calcul de $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{(1+2i)^n}$.

II) A, B et C étant données dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que si A et B n'ont aucune valeur propre commune, l'équation $AX - XB = C$ admet une unique solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Qu'en est-il de la réciproque ? Le montrer.

III) On pioche une poignée de jetons dans une urne en contenant n, numérotés de 1 à n. On admet que chaque poignée (y compris la poignée vide) a la même probabilité d'être tirée.

Donner l'espérance de la variable aléatoire S donnant la somme des numéros tirés.