Préparation aux oraux : série 4

CCINP

Planche n° 14

I) Pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$, on cherche à déterminer les matrices A symétriques réelles de taille n telles que $A^3 + 4A^2 + 5A = 0_n$. Montrer que A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont racines d'un polynôme de degré 3. Conclure.

II) Montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + x^3 + t^3}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

Trouver a, b et c réels tels que $\frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2 - x + 1}$.

En déduire $f(0)$ et calculer la limite de f en $+\infty$.

Planche n° 15

I) Donner le domaine de convergence D de la série de fonctions $\sum u_n$ telle que $u_n(x) = \frac{\ln x}{x^n \ln n}$.

Converge-t-elle normalement sur D ? On note S sa somme et R_n le reste d'ordre n.

Montrer que $|R_n(x)| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$ et en déduire que S est continue. S est-elle intégrable ?

II) Déterminer un polynôme annulateur de A réelle, non nulle, carrée de taille 2 et telle que $A^2 = {}^tA$.

Déterminer les valeurs propres de A si on suppose que 0 en est une.

Montrer que A est orthogonalement semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Planche n° 16

I) Trouver a, b et c tels que $\frac{2x+1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$.

On admet que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 tE\left(\frac{1}{t}\right)dt$ converge et la calculer.

II) Pour un entier n pair tel que $n \geq 2$, déterminer le rang de $A_n = \begin{pmatrix} 1 & n & 1 & \cdots & n \\ 2 & n-1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & n & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer qu'une matrice et sa transposée ont même spectre.

Montrer que A_n est diagonalisable, donner ses éléments propres.

Planche n° 17

I) Montrer que la série de terme général $u_n = \ln\left(2n+(-1)^n\right) - \ln\left(2n\right)$ est semi-convergente.

II) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est symétrique à valeurs propres positives, si et seulement s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tBB$.

Planche n° 18

I) Soient n variables aléatoire indépendantes $X_1, X_2, \dots, X_n$ suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètres respectifs $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}$. Soit la variable aléatoire N qui vaut 0 si $X_1 = X_2 = \dots = X_n = 1$ et $\min\left\{k \in [\![1,n]\!], X_k = 0\right\}$ sinon. Déterminer la loi de N.

II) Montrer que H, plan de E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3, est stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\operatorname{Im}\left(u - \lambda id\right) \subset H$.

Trouver les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Centrale-Supélec

Planche n° 25 (ENSAM)

I) Que peut-on dire de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commute avec une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients diagonaux sont distincts deux à deux ?

Trouver $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $X^2 - 2X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

II) Représenter la courbe d'équation $\dfrac{x^2}{n^2} + y^2 = 1$ pour $n = 1$ et $n = 2$.

Calculer l'aire de la surface S_n délimitée par la courbe dans le cas général.

On note L_n la longueur de la courbe. Etudier les rayons de convergence de $\sum_{n\geq 1} S_n x^n$ et $\sum_{n\geq 1} L_n x^n$.

☺ *On rappelle que pour tout* $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$, *on a* $\sqrt{a^2+b^2} \leq a+b$.

Planche n° 26 (ENSAM)

I) Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^2 = -I_n$, alors n est pair.

Montrer que si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $B^2 - B + I_n = 0_n$, alors n est pair.

Montrer que si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $C^3 + C^2 + C = 0_n$, alors C est de rang pair.

II) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre ½. On note T la variable aléatoire égale au plus petit entier n tel qu'on ait deux 1 consécutifs aux $n^{\text{ième}}$ et $(n+1)^{\text{ième}}$ tirages.

On note A_n : « pas deux 1 consécutifs lors des n premiers tirages et $X_n = 0$ » et B_n : « pas deux 1 consécutifs lors des n premiers tirages et $X_n = 1$ ». On pose $p_n = P(A_n)$ et $q_n = P(B_n)$.

Calculer $P(T=1)$ et $P(T=2)$. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_n \\ q_n\end{pmatrix}$.

Prouver que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $P(T=n) = \dfrac{F_n}{2^{n+1}}$ où $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite de Fibonacci.

Planche n° 27

I) Montrer que $f : x \mapsto \int_0^1 \mathrm{ch}\left(x\,\mathrm{sh}\,t\right)dt$ est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Trouver une équation différentielle vérifiée par *f* et une solution développable en série entière de cette équation.

II) *Cours* : Définir une fonction continue par morceaux ; *f* définie par $f(0)=0$ et $f(x) = \dfrac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ est-elle continue par morceaux sur $[0,1]$? sur $]0,1[$?

Dessiner les courbes de *ch* et *sh*. Comment se comportent-elles en $+\infty$? Quelle est la valeur de $ch1$? Donner une relation entre ch^2 et sh^2.

Si $f' = g'$, à quelle condition $f = g + cste$? Que vaut $\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x}$?

Topologiquement, qu'est-ce que le produit cartésien de deux segments ?

Donner le théorème de Cauchy. Est-il applicable dans l'exercice précédent ? Quelle est la forme de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle obtenue ?

Donner un exemple de série entière de rayon de convergence infini, puis de rayon de convergence nul. Définir le rayon de convergence. Quels sont les modes de convergence d'une série entière ?

Planche n° 28

On donne $u_0 = 1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+a}{n+b}$, où *a* et *b* sont deux réels strictement positifs, et on pose $v_n = \ln\left(n^{b-a}u_n\right)$. Montrer la convergence de $\sum(v_{n+1}-v_n)$ et en déduire une condition sur *a* et *b* pour que $\sum u_n$ converge. Cette condition étant vérifiée, on note $f(x) = \sum_{n\geq 0} u_n x^n$. Donner le domaine de définition de *f* et calculer $f(1)$.

Planche n° 29

Soit $f_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]\,;\, P \mapsto \sum_{k=0}^{n} \left(\int_0^1 P(t)\, t^k\, dt \right) X^k$.

a. Montrer que f_n est un automorphisme.

b. Montrer que M_n, la matrice de f_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, est diagonalisable.

c. Soit $Y = {}^t\left(y_0\ y_1\ \dots\ y_n \right) \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^tYM_nY = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} y_k t^k \right)^2 dt$.

d. Montrer que $Sp(f_n) \subset \mathbb{R}_+^*$.

e. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \min Sp(f_n)$. Montrer que la suite (u_n) tend vers 0.

Planche n° 30

Une urne contient initialement deux boules vertes et une boule noire. A chaque étape, on tire une boule au hasard dans l'urne avec remise et l'on ajoute une boule supplémentaire de la même couleur que la boule tirée.

La variable aléatoire *X* (*resp*. *Y*) désigne le rang de la première boule verte (*resp*. noire) tirée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire Z_n désigne le nombre de boules vertes dans l'urne après *n* étapes. Enfin U_n, est la variable aléatoire valant 1 si la boule tirée à la $n^{\text{ième}}$ étape est verte et sinon.

a. Déterminer les lois de *X* et *Y*.

b. Exprimer Z_n en fonction de certains des U_k et déterminer $Z_n(\Omega)$.

c. Calculer $P\left(U_{n+1} = 1 \mid Z_n = k\right)$.

d. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, U_n suit une loi de Bernoulli de paramètre 2/3.

e. Déterminer la loi de Z_n.

Mines-Ponts

Planche n° 13

I) Nature et calcul de $\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \right) dx$.

II) Réduire ϕ, définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $\phi(M) = M + tr(AM)A$ où *A* est fixée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Planche n° 14

I) Etablir la convergence uniforme de la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $f_n(x) = e^{-nx} - (1-x)^n$.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle ?

II) Trouver les nombres complexes z tels que le triangle ABC avec *A*, *B* et *C* d'affixes respectives z, z^2 et z^3 ait l'origine pour orthocentre.

Planche n° 15

I) Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie.

On suppose u diagonalisable, de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

Montrer qu'il existe p endomorphismes $u_1, \dots, u_p$ tels que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(u) = \sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i) u_i$.

Montrer que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, il existe $P_i \in \mathbb{C}[X]$ tel que $u_i = P_i(u)$.

Réciproquement, montrer que si u est un endomorphisme tel qu'il existe p endomorphismes $u_1, \dots, u_p$ vérifiant pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(u) = \sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i) u_i$, alors u est diagonalisable.

II) Convergence de la série de terme général $u_n = \int_0^1 \cos(nt^2) dt$.

Planche n° 16

I) Trouver les polynômes annulateurs de $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c \end{pmatrix}$.

II) Soit H, définie par $H(0,0) = 0$ et $H(x, y) = \dfrac{x^4 y}{(x^4 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$ pour $(x, y) \neq (0,0)$.

La fonction H est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?