Préparation aux oraux - Série 3

CCINP

Planche n° 9

I) Nature et somme de la série $\sum n^{(-1)^n} x^n$.

II) Montrer que *f*, défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f(P)(x)=\int_x^{x+1} P(t)dt$ est un endomorphisme et donner sa trace.

Planche n° 10

I) Convergence simple de la suite de fonctions données par $f_n(x)=\cos\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)x\right)$.

Y a-t-il convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{R}$?

II) On munit $E=C^1([0,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle f,g\rangle=\int_0^1\left[f(t)g(t)+f'(t)g'(t)\right]dt$.

Montrer que $(\mathrm{ch},\mathrm{sh})$ est une base de $A=\left\{f\in C^2([0,1],\mathbb{R})\setminus f''=f\right\}$.

Montrer que si $f\in A$, alors pour tout $g\in E$, $\langle f,g\rangle=f'(1)g(1)-f'(0)g(0)$.

Calculer $\langle \mathrm{ch},\mathrm{sh}\rangle$, $\|\mathrm{ch}\|^2$, $\|s\,\mathrm{h}\|^2$.

Montrer que si $f\in A$ et $g\in B=\{h\in E\setminus h(0)=h(1)=0\}$, $\langle f,g\rangle=0$.

Pour $f\in H=\{h\in E\setminus h(0)=\mathrm{ch}\,1, h(1)=1\}$, calculer $\langle f,\mathrm{ch}\rangle$ et $\langle f,\mathrm{sh}\rangle$. Donner les coordonnées dans la base $(\mathrm{ch},\mathrm{sh})$ de la projection orthogonale de $f\in H$ sur *A*.

Calculer $\inf\limits_{f\in H}\int_0^1\left[f(t)^2+f'(t)^2\right]dt$.

Planche n° 11

I) Reconnaître l'endomorphisme représenté par $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1\\ 1 & -2 & -2\\ -2 & 1 & -2\end{pmatrix}$ dans une base orthonormale.

II) n variables aléatoires indépendantes $X_1,\dots,X_n$ suivent chacune une loi de Bernoulli de paramètre $p_n\in\,]0,1[$ et vérifient $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i=p$.

Montrer que pour tout $\varepsilon>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left(\left|\frac{X_1+\dots+X_n}{n}-p\right|>\varepsilon\right)=0$.

Planche n° 12

I) Montrer que si $M \in GL_k(\mathbb{C})$ est de carré diagonalisable, alors elle est diagonalisable (on pourra montrer qu'il existe un polynôme scindé à racines simples annulant *M*).

Soit $N = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ A & 0_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ avec $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$. En calculant N^{-1}, montrer que $N \in GL_{2n}(\mathbb{C})$.

Calculer N^2, puis $P(N^2)$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$.

On suppose *N* diagonalisable. Montrer que le produit AB est diagonalisable. Qu'en est-il de la réciproque ?

II) Soient, pour $\alpha > 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Montrer que $R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ au voisinage de $+\infty$.

Etudier la convergence de $\sum \frac{R_n}{S_n}$ suivant la valeur de α.

Planche n° 13

I) Donner les éléments propres de $A(t) = \begin{pmatrix} 1-3t & 4t \\ -2t & 1+3t \end{pmatrix}$.

Si *A* est diagonalisable, donner la matrice de passage *P*.

Résoudre le système différentiel $Y'(t) = A(t)Y(t)$.

II) Une variable aléatoire *X* suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Calculer l'espérance de $Y = X^2 + 1$. Calculer $P(2X < Y)$.

Calculer la probabilité que *X* soit pair ; y a-t-il plus de chances que *X* soit impair ?

Centrale-Supélec

Planche n° 17 (PC)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Minorer le rayon de convergence de $\sum_{p\geq 0} tr(A^p)\, z^p$ et exprimer sa somme en fonction du polynôme caractéristique de *A*.

Planche n° 18 (PC, *adapté*)

Montrer qu'une matrice est nilpotente si et seulement si sa seule valeur propre est 0.

Que dire de *M* nilpotente et diagonalisable ?

Soient M_1 et M_2 deux matrices nilpotentes, D_1 et D_2 deux matrices diagonalisables. Les quatre matrices commutent deux à deux et $D_1 + M_1 = D_2 + M_2$. Montrer que $M_1 = M_2$ et $D_1 = D_2$.

Planche n° 19

Soit $E=\left\{f\in C^2([0,1],\mathbb{R})\setminus f(0)=f'(0)=0\right\}$.

Montrer que N, définie par $N(f)=\sup\limits_{[0,1]}\left|f''+2f'+f\right|$ est une norme sur E.

Soit $h(t)=e^t f(t)$ avec $f\in E$. Montrer que pour tout $t\in[0,1]$, $h(t)=\int_0^t (t-u)h''(u)du$.

Montrer qu'il existe $a\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $\|f\|_\infty\leq aN(f)$ et minimiser a.

Planche n° 20

Soient $\alpha\in\mathbb{R}$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k^\alpha}{n^2}\right)$.

On choisit ici $\alpha=2$. Etudier la convergence et donner la limite éventuelle de (u_n).

Ici, $\alpha\in[0,1]$. Convergence et limite éventuelle de (a_n) telle que $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^\alpha}{n^2}$.

Même question pour (u_n).

Planche n° 21

Montrer la convergence pour $x\in\mathbb{R}^*$ de $f(x)=\int_{-x}^{x}\dfrac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}}$.

La fonction f admet-elle une limite en + ∞ ? Si oui, la calculer.

Etudier également l'existence d'une limite en 0.

On note $\tilde{f}$ la fonction prolongée par continuité en 0^+.

Trouver une série de fonctions $S(x)$ coïncidant avec $\tilde{f}$ sur un intervalle $[0,h[$, avec $h>0$.

Planche n° 22

Soient $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \setminus \max(x,y)\leq 2,\ \min(x,y)\geq -2\right\}$ et $F(x,y)=x^4+y^4-2(x-y)^2$.

F admet-elle des extrema sur A ?

Quels points sont susceptibles d'être ses extrema locaux ?

Etudier $F(x,x)$ et $F(-x,x)$. Que dire à propos de l'un des extrema locaux ?

Donner les extrema de F sur A, puis tous ses extrema.

Planche n° 23 (avec Python)

La probabilité d'obtenir pile en lançant une pièce est $p\in\left]0,1\right[$; on note E_n l'évènement « ne pas obtenir 2 piles d'affilée au cours des n premiers lancers » et p_n sa probabilité.

[*Ecrire un programme qui prend n et p pour paramètres et renvoie* ***True*** *si* E_n *et* ***False*** *sinon.*]

Montrer que $p_{n+2} = (1-p)p_{n+1} + p(1-p)p_n$ et en déduire que l'évènement « obtenir 2 piles d'affilée sur un nombre infini de lancers » est presque sûr.

On note *T* la variable aléatoire donnant le rang d'apparition du second pile de la première paire de piles consécutifs (aucun piles consécutifs entre les rangs 1 et $T-1$, et pile sort aux rangs T et $T-1$).

[*Ecrire un programme qui donne la probabilité de l'évènement* $(T=n)$ *pour un entier* $n \geq 2$.]

Donner la fonction génératrice de *T*, montrer que *T* admet une espérance et la calculer.

[*Ecrire un programme qui vérifie la valeur de cette espérance.*]

Planche n° 24 (avec Python)

Une particule se déplace sur une surface comportant quatre positions successives, A_0 qui est un puits, A_1 et A_2, deux positions intermédiaires, A_3 un second puits. A l'instant $t=n$:

- si la particule est dans un puits, elle y reste avec une probabilité égale à 1 ;
- si elle est en A_1, elle va en A_0 avec la probabilité p et en A_2 avec la probabilité $1-p$;
- si elle est en A_2, elle va en A_1 avec la probabilité p et en A_3 avec la probabilité $1-p$.

On note x_n la position de la particule à $t=n$, avec $x_n(\Omega) = [\![0,3]\!]$.

[*Ecrire une fonction Python qui donne* x_{n+1} *en fonction de* x_n *et* $p = \frac{1}{2}$.

Ecrire une fonction renvoyant x_n *en fonction de* x_0 *et* p. *Faire l'histogramme des* x_n *obtenues sur N essais.*]

Soit $X_n = \begin{pmatrix} P(x_n = 0) \\ P(x_n = 1) \\ P(x_n = 2) \\ P(x_n = 3) \end{pmatrix}$. Trouver $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, indépendante de *n*, telle que $X_{n+1} = AX_n$.

Montrer que *A* est diagonalisable si et seulement si $0 < p < 1$.

On suppose $p = \frac{1}{2}$. Diagonaliser *A* et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} X_n$.

[*Comparer aux résultats obtenus précédemment.*]

Mines-Ponts

Planche n° 9

I) Déterminer la nature puis la valeur de l'intégrale $\int_a^b (b-t)^\alpha (t-a)^n dt$ où *a*, *b* et α sont des réels (avec $a < b$) et *n* un entier naturel non nul.

II) On note $S_n(I)$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille *n* dont les valeurs propres sont dans l'intervalle non vide *I*.

Montrer que pour tout $S \in S_n(\mathbb{R})$ et tout $X \in \mathbb{R}^n$, $(\min\limits_{\lambda \in Sp(S)} \lambda)\, {}^t XX \leq {}^t XSX$.

Montrer que $S_n(I)$ est une partie convexe de $S_n(\mathbb{R})$.

Planche n° 10

I) Montrer que *D* défini par $D(f)(x) = xf'(x)$ est un endomorphisme de l'espace des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Trouver $\ker D$, puis les éléments propres de *D*.

II) Ensemble de définition et calcul de $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt)\, dt$ avec $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

Planche n° 11

I) Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$. On note *U* le vecteur de coordonnées $X_1, \dots, X_n$ et $M = U\,{}^tU$.

Donner les lois de probabilité de $rg(M)$ et $Tr(M)$.

Donner la probabilité que *M* soit une matrice de projecteur.

On note *V* le vecteur dont toutes les coordonnées valent 1 et $S = {}^tVMV$. Donner l'espérance et la variance de *S*.

II) Soient *E* un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe *p* endomorphismes non nuls $v_1, \dots, v_p$ et *p* réels distincts $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^n = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^n v_i$.

Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(u) = \sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i) v_i$ et que *u* est diagonalisable.

Montrer qu'il existe une base $\left(L_1, \dots, L_p\right)$ de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ telle que pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$:

$$L_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}.$$

Montrer que $Sp(u) = \left\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\right\}$.

Planche n° 12

I) Domaine de définition, continuité et dérivabilité de $f : x \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{x}{n(1 + nx^2)}$.

Donner un équivalent de *f* en $+\infty$.

II) Deux variables aléatoires indépendantes *X* et *Y* suivent une loi géométrique de paramètres respectifs *p* et *q*.

Montrer que $Z = \min(X, Y)$ et $T = \max(X, Y)$ sont deux variables aléatoires.

Donner leur fonction génératrice et, si elle existe, leur espérance.