Préparation aux oraux : série 2

CCINP

Planche n° 5

I) Montrer que la suite des fonctions f_n, définies sur $[0,1]$ par $f_n(0)=0$ et, pour $x>0$, $f_n(x)=x\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{2n}$ converge simplement mais pas uniformément vers une fonction *f* à préciser.

II) On donne un endomorphisme *u* d'un espace vectoriel *E* de dimension $n \geq 1$.
On suppose *u* injectif : déterminer $K_m = \ker u^m$ et $I_m = \operatorname{Im} u^m$.
Montrer que pour tout entier $m \geq 1$: $K_m \subset K_{m+1}$ et $I_{m+1} \subset I_m$.
On suppose *u* non injectif : montrer qu'il existe $p \in [\![0,n]\!]$ tel que $K_p = K_{p+1}$ et $I_p = I_{p+1}$.
Montrer alors que pour tout $q \in \mathbb{N}$, $K_p = K_{p+q}$, $I_p = I_{p+q}$ et $E = K_p \oplus I_p$.

Planche n° 6

I) Soit la suite (u_n), définie par $u_0 \in [0,\pi]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1-\cos u_n$.
Montrer que (u_n) converge vers 0, puis déterminer la nature de la série de terme général u_n.

II) Pour *a* donné non nul dans un espace euclidien *E*, déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $u : x \mapsto \alpha(x \mid a)a - x$ est une isométrie.

Planche n° 7

I) Nature de $I = \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t}\,dt$ et $J = \int_0^{+\infty} \sin t \sin\left(\frac{1}{t}\right)dt$.

II) Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et une matrice diagonale *D* semblable à *A*.

Montrer que si *M* commute avec *D*, elle est diagonale.
Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^7 + M + I_3 = A$.

Planche n° 8

I) Montrer que $\sum \frac{2n^2+3n+1}{2^{n+1}}$ converge et calculer sa somme.

II) Calculer le polynôme caractéristique de $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2-n & n-2 & n \end{pmatrix}$.

Déterminer les sous-espaces propres de A_3. Les matrices A_1 et A_2 sont-elles diagonalisables ?

Centrale-Supélec

Planche n° 9

Soient P et Q deux polynômes non nuls de $\mathbb{C}_n[X]$.

On suppose que P et Q admettent une racine commune λ. Montrer qu'il existe deux polynômes U et V de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, non nuls, tels que $UP+VQ=0$.

On pose $n=2$, et on définit ϕ par $\phi(U,V)=UP+VQ$. Montrer que ϕ est linéaire de $\mathbb{C}_1[X]^2$ dans $\mathbb{C}_3[X]$ et exprimer sa matrice dans des bases à déterminer.

Donner une condition sur les coefficients de P et Q pour qu'ils n'aient aucune racine commune.

Planche n° 10

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.

Donner une relation entre l'ordre de multiplicité d'une valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé. Qu'est-ce qu'un polynôme caractéristique ? Donner le théorème de Cayley-Hamilton.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et P son polynôme caractéristique. Montrer que si $P'(0) \neq 0$, alors $\ker u = \ker u^2$.

[*Pour* $n=3$, *montrer que* $\ker u = \ker u^2$ *si et seulement si 0 est valeur propre de même ordre de multiplicité de* u *et* u^2.] Justifier que cette question est fausse !

Planche n° 11

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant la relation (E): $A^2 = {}^tA$.

a) Dans cette question seulement, on suppose que $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. A quelle condition sur a et b la matrice A vérifie-t-elle (E) ? Donner les couples (a,b) solutions.

b) Trouver un polynôme de degré 4 annulateur de A.

c) Montrer que A^3 est la matrice d'un projecteur et qu'elle est symétrique.

d) Monter que $\ker A^3 = \ker A$ et $\operatorname{Im} A^3 = \operatorname{Im} A$.

e) Soit F un sous-espace de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On dit que F est stable par A si pour tout $X \in F$, $AX \in F$. Monter que si F est stable par A, alors $F^{\perp}$ aussi.

f) Soit $Y \in \operatorname{Im} A$. On note $F_Y = \operatorname{Vect}\left(Y, AY, A^2Y\right)$. Montrer que l'application $X \mapsto AX$ induit une isométrie sur F_Y, puis reconnaitre cette isométrie.

Planche n° 12

Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, $P = X^n - nX + 1$ admet une unique racine $x_n \in \left]0,1\right[$.

Trouver un équivalent simple a_n de x_n, puis de $x_n - a_n$.

Planche n° 13

Soit $p \in]0,1[$. On se donne une pièce qui tombe sur pile avec la probabilité *p*. On la lance jusqu'à obtenir deux fois pile et on appelle *X* le nombre de faces obtenus.

a. Donner la loi de *X*.

b. Montrer l'existence et donner la valeur de l'espérance de *X*.

c. Si $X = n$, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à *n* dans une urne. On pioche une boule au hasard et *Y* désigne le numéro de la boule piochée. Donner la loi de *Y* et son espérance.

Planche n° 14

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $T_n = \dfrac{1}{S_n}$ et $m_n = E(T_n)$ si elle existe.

a. Calculer $E(X_1)$ et $E(S_n)$.

b. Montrer que $m_n \le 1/n$.

c. Montrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $E\left(\dfrac{X_k}{S_n}\right) = \dfrac{1}{n}$.

d. Montrer que $E\left(\dfrac{S_k}{S_n}\right)$ vaut $1+\dfrac{k-n}{p}m_n$ quand $k > n$ et $\dfrac{k}{n}$ sinon.

Planche n° 15

Soit $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{1+x^2} & \text{quand } y \ge 0 \\ 0 & \text{quand } y < 0 \end{cases}$.

a. La fonction *f* est-elle continue ? de classe C^1 ? Déterminer ses lignes de niveau.

b. On considère une droite D_α de $\mathbb{R}^2$, de pente α et passant par le point $P = (1,1)$. Soient S la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = f(x,y)$ et C la courbe tracée sur S et dont la projection orthogonale sur le plan d'équation $z = 0$ est D_α. Soit *M* un point de C. Déterminer la tangente à C en *M*.

Planche n° 16

On cherche à résoudre $2xy'(x) - 2y(-x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Montrer que toute fonction *f* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Montrer que le problème, sous certaines conditions supplémentaires que l'on précisera, se ramène à deux équations différentielles d'ordre 1 et résoudre.

Mines-Ponts

Planche n° 5

I) Justifier l'existence de $\int_0^1 e^{-t}\ln t\,dt$, puis en donner une valeur approchée sous forme de nombre rationnel à 10^{-3} près (on pourra faire apparaître un développement en série entière usuel).

II) Soit $n\in\mathbb{N}$ et $(a_k)_{0\le k\le n}\in\mathbb{K}^{n+1}$. Montrer que :

$$(a_0\neq 0)\quad\Leftrightarrow\quad\left(\forall\, Q\in\mathbb{K}[X],\exists!\,P\in\mathbb{K}[X],\sum_{k=0}^{n}a_kP^{(k)}=Q\right).$$

Planche n° 6

I) Existence et valeur de $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{th}(3x)-\operatorname{th}x}{x}\,dx$.

II) Montrer que si $z_0, z_1, \dots, z_n$ sont des complexes deux à deux distincts, la famille des $(X-z_k)^n$ est libre dans $\mathbb{C}[X]$.

Planche n° 7 (cf planches 1 et 11)

I) On note D_n le nombre de permutations sans point fixe de $[\![1,n]\!]$ avec par convention $D_0=1$.

Montrer que $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_k=n!$. Montrer que $\sum_{n\ge 0}\frac{D_n}{n!}x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1.

On note *S* sa somme sur $]-1,1[$. Calculer $T(x)=e^xS(x)$ et en déduire une expression de D_n.

II) On donne $n\ge 2$ variables aléatoires réelles discrètes et indépendantes $X_1,\dots,X_n\hookrightarrow\mathscr{B}(p)$ avec $p\in\,]0,1[$. On pose $U=\begin{pmatrix}X_1\\ \vdots\\ X_n\end{pmatrix}$ et $M=U\,{}^tU\in\mathcal{M}_n(\{0,1\})$.

Donner les lois de $rg(M)$ et $Tr(M)$. Quelle est la probabilité que *M* soit une matrice de projection ?

Planche n° 8

I) Montrer que $f: x\mapsto\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$ peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

Montrer qu'elle est alors de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, mais pas sur $\mathbb{R}_+$.

II) Montrer que si deux matrices *A* et *B*, carrées, complexes de taille 2 commutent, alors *A* est un polynôme en *B* ou *B* est un polynôme en *A*. Cela reste-t-il vrai pour des matrices de taille 3 ? Pour des matrices à coefficients réels ?