Préparation aux oraux : Modalité des épreuves 2024

CCINP

L'épreuve orale de mathématiques durera une heure avec :

- une demi-heure pour présenter les documents administratifs et préparer le sujet qui ne contiendra plus qu'un seul exercice ;
- une demi-heure de présentation au tableau divisée en 20 minutes pour présenter le sujet préparé puis 10 minutes pour traiter des questions non préparées.

Le sujet à préparer sera composé d'un seul exercice portant sur le programme des deux années de classe préparatoire. Une fois entré dans la salle, le candidat réparera ce sujet pendant une demi-heure. Il présentera ensuite sa préparation puis l'examinateur l'interrogera sur des questions pouvant porter sur du cours, des énoncés ou des démonstrations, des exemples ou des contre-exemples… La deuxième partie de l'interrogation aura pour but d'évaluer en particulier la connaissance rigoureuse du cours.

Centrale-Supélec

La durée de chaque interrogation est de 30 minutes, précédées de 30 minutes de préparation. Un ordinateur équipé de Python, Scilab et d'autres logiciels à prise en main immédiate est à la disposition du candidat.

Mines-Ponts

Chacune des épreuves de mathématiques et de physique comportent au minimum deux questions. Elles portent sur l'ensemble des programmes des classes préparatoires en vigueur. Pour la première question, le candidat dispose d'un temps de préparation de 15 minutes. La durée totale de l'épreuve, temps de préparation inclus, est d'environ 1 h 15. L'utilisation de la calculatrice pourra être autorisée par l'examinateur.

Mines-Télécom

Chaque épreuve a une durée de 30 minutes et est sans préparation.

Mathématiques : résolution de deux exercices portant sur des parties différentes de l'ensemble des programmes de première et deuxième années de la filière du candidat.

e3a-Polytech

Dépend des écoles.

Préparation aux oraux : série 1

CCINP

Planche n° 1

I) Déterminer, dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, la matrice de l'endomorphisme *f* donné par $f(P)(X) = (X-a)P'(X) + P(X) - P(a)$.

Donner son noyau, son image, ses éléments propres.

II) Montrer la convergence simple et uniforme de la suite de fonction $f_n(x) = x^n \dfrac{e^x}{n!}$, puis étudier la convergence de la série $\sum f_n$.

Planche n° 2

I) Déterminer la limite de la suite de terme général $a_n = \int_0^1 \left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^n dt$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq \dfrac{1}{n+1}$.

Rayon de convergence et domaine de définition de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

II) On note *f* l'application qui à $P \in \mathbb{R}_6[X]$ associe le reste de la division euclidienne de *P* par $D(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

Montrer que *f* est linéaire de $\mathbb{R}_6[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ et donner sa matrice dans les bases canoniques.

Donner la dimension et une base de $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$.

Planche n° 3

I) Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, l'équation pour tout $e^x = nx$ admet deux solutions x_n et y_n telles que $0 \leq x_n < y_n$. Etudier la monotonie des suites (x_n) et (y_n). En déduire que chacune des suites admet une limite que l'on déterminera.

Montrer qu'en $+\infty$, $x_n \sim \dfrac{1}{n}$. Trouver un équivalent de $x_n - \dfrac{1}{n}$ et en déduire un développement asymptotique à deux termes de x_n.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $y_n \leq (1+\varepsilon)\ln n$.

II) On donne une famille $(f_1, \dots, f_n)$ d'endomorphismes d'un espace vectoriel *E* de dimension finie, tels que $\sum_{k=1}^{n} f_k = Id$ et pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$, on a $f_i \circ f_j = 0$.

Montrer que les f_k sont des projecteurs et que *E* est somme directe de leurs images.

Planche n° 4

I) Calculer le rang de $A=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, puis le rang de A^2.

Montrer que $\ker A$ et $\operatorname{Im} A$ sont supplémentaires.

En déduire que A est semblable à $A'=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $B\in GL_2(\mathbb{R})$.

Donner le spectre de B et en déduire que A est diagonalisable.

II) On note N la variable représentant le nombre n de jetons tirés au cours d'un jeu. Elle vérifie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $P(N=n)=\dfrac{1}{2^n}$.

Si N est pair, le joueur gagne N jetons, sinon il en perd N.

Donner la probabilité de gagner, l'expression du gain algébrique G et son espérance.

Centrale-Supélec

Planche n° 1

Montrer que f, définie pour réel $x>0$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-xt}}{1+t^2}dt$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Trouver un équivalent de f en $+\infty$, puis en 0.

Planche n° 2

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On cherche la dimension de $E=\left\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\setminus AMA=0_n\right\}$.

On suppose A diagonalisable. Montrer que $\dim E=\dim\left\{N\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\setminus DND=0_n\right\}$ où D est une matrice diagonale à définir. Donner alors la dimension de E en fonction du rang de A.

Peut-on généraliser au cas où A n'est pas diagonalisable ?

Planche n° 3

Montrer que $y''=(x^4+1)y$ admet une unique solution f telle que $f'(0)=f(0)=1$.

On admet que $\dfrac{1}{f^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $g:x\mapsto f(x)\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{dt}{f(t)^2}$ est solution de l'équation différentielle.

Montrer que $\dfrac{1}{f^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Planche n° 4

Une famille $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toute une même loi, d'espérance nulle, prend un nombre fini de valeurs. On pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$.

Montrer que pour tout réel $\varepsilon>0$, $h_+(\varepsilon)=\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\left(t\varepsilon-\ln\left(E(e^{tX_1})\right)\right)>0$.

Montrer que :

$$P\left(\frac{1}{n}S_n\geq\varepsilon\right)\leq e^{-nh_+(\varepsilon)},$$

puis que pour tout $(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2$:

$$P\left(S_n\geq n\varepsilon\right)P\left(\sum_{k=1}^{m}X_{n+k}\geq m\varepsilon\right)\leq P\left(S_{n+m}\geq(n+m)\varepsilon\right).$$

Planche n° 5

Etudier la convergence simple sur $\mathbb{R}_+$ de la série de fonctions $u_n(t)=\frac{1}{n^2}e^{-nt}$.

On pose $f(x,y)=\sum_{n\geq 1}u_n(x^2+y^2)$. Montrer que *f* est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Montrer que *f* admet des dérivées partielles d'ordre 1, puis qu'elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Planche n° 6

Soient $A\in\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB=\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.

a) La matrice AB est-elle inversible ? Quelles sont les valeurs possibles de *x* ?
b) La matrice BA est-elle diagonalisable ?
c) Montrer que $\mathbb{R}^3=\operatorname{Im}A\oplus\ker B$.
d) Montrer qu'il existe une infinité de couples de matrices (A,B) vérifiant l'hypothèse de l'énoncé.

Planche n° 7

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux une même loi géométrique de paramètre $p\in\,]0,1[$. Déterminer les lois de $Z=\min(X,Y)$ et $T=X-Y$.

Les variables aléatoires *T* et *Z* sont-elles indépendantes ?

Planche n° 8 (PC)

Pour une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée, résoudre l'équation $X+{}^tX=tr(X)A$.

Mines-Ponts

Planche n° 1

I) Donner la définition d'un projecteur orthogonal d'un espace E euclidien.

Soient p et q deux projecteurs orthogonaux de E.

Montrer que le polynôme caractéristique de $u = p + q$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Montrer que toutes les valeurs propres de u sont dans $[0;2]$.

Déterminer $\ker u$ et $\ker(u - 2id)$.

II) Si R est le rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$, quel est le mode de convergence de f sur $]-R;R[$?

On note p_n le nombre de partitions de $[\![1,n]\!]$ (on rappelle que $(U_1, \dots, U_p)$ est une partition de $[\![1,n]\!]$ si et seulement si les U_k sont deux à deux disjointes et si leur réunion vaut $[\![1,n]\!]$).

Montrer que $p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k$.

On pose $p_0 = 1$. Montrer que $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{p_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence $R \geq 1$, puis calculer $f(x)$.

Planche n° 2

I) Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\arctan(x-1) + \arctan x + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}$.

II) Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^3$.

Planche n° 3

I) On note $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et on donne $p \in \mathbb{R}$.

Trouver les fonctions $g \in C^2(U, \mathbb{R})$ telles qu'il existe $f \in C^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ vérifiant pour tout $(x, y) \in U$:

$$g(x, y) = f(x^2 + y^2) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = p(x^2 + y^2).$$

II) Montrer que u, endomorphisme d'un espace vectoriel E, est une homothétie si et seulement s'il commute avec tout automorphisme orthogonal de E.

Existe-t-il toujours une base canonique dans un espace vectoriel ? Si oui, y en a-t-il une seule ? Plusieurs ? Une infinité ?

Si u commute avec toutes les symétries orthogonales par rapport à un hyperplan de E, qu'en déduit-on pour u ?

Planche n° 4

I) Justifier que $f(x)=\int_0^1 \frac{e^{-t}}{1-x\sin^2 t}\,dt$ est définie sur $]-\infty,1[$, puis développer *f* en série entière.

II) Déterminer le polynôme caractéristique de $B=\begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$ en fonction de celui de $A\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que si *A* est diagonalisable, *B* l'est aussi.