Corrigés de la série 5 - Mines-Ponts

Planche n° 17

I) Montrer que si *f* est de classe C^n sur un intervalle *I* de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et s'annule *n* fois, alors pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $f^{(n-k)}$ s'annule au moins *k* fois.

Qu'en déduit-on, au mieux, en fonction du degré de $P \in \mathbb{R}[X]$, sur le nombre de fois où $P(x) = e^x$.

II) Montrer qu'un endomorphisme symétrique *s* d'un espace euclidien est ρ-lipchitzien si et seulement si toutes ses valeurs propres sont de module au plus égal à ρ.

Montrer que, dans le cas d'un endomorphisme quelconque, seul un sens de l'équivalence reste vrai.

I) On procède par récurrence finie et descendante sur $k \in [\![1,n]\!]$ (pour $k = 0$, la propriété dit que $f^{(n)}$ s'annule au moins 0 fois, ce qui est vrai… et passionnant !)

Pour $k = n$, $f^{(n-n)} = f$ s'annule au moins *n* fois par hypothèse, donc la propriété est vraie.

On suppose la propriété vraie à un rang $k \in [\![2,n]\!]$, autrement dit que $f^{(n-k)}$ s'annule au moins *k* fois en $a_1, \dots, a_k$ avec $a_1 < \dots < a_k$.

Comme $k \in [\![2,n]\!]$, on a $n-(k-1) \in [\![1,n-1]\!]$, donc $f^{(n-(k-1))}$ existe et est continue sur *I*. On veut alors prouver $f^{(n-(k-1))}$ s'annule au moins $k-1$ fois.

Pour tout $i \in [\![1,k-1]\!]$, $f^{(n-k)}$ est dérivable sur $[a_i, a_{i+1}]$ et $f^{(n-k)}(a_i) = f^{(n-k)}(a_{i+1}) = 0$, donc d'après le théorème de Rolle, $f^{(n-(k-1))} = f^{(n-k+1)} = (f^{(n-k)})'$ s'annule au moins 1 fois sur $]a_i, a_{i+1}[$.

Ceci étant vrai pour tout $i \in [\![1,k-1]\!]$, $f^{(n-(k-1))}$ s'annule au moins $k-1$ fois et ainsi, la propriété est vraie au rang $k-1$.

Finalement, , la propriété est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

****

Si on pose $f(x) = e^x - P(x)$, la fonction *f* est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et si *P* est de degré *n*, on a $f^{(n+1)}(x) = e^x$, donc $f^{(n+1)}$ ne s'annule pas. Avec la propriété précédente, ceci implique que f s'annule au plus *n* fois et ainsi, $P(x) = e^x$ au plus $n = \deg P$ fois sur $\mathbb{R}$.

****

II) On a $s \in \mathcal{L}(E)$, symétrique et on veut :

$$(s \text{ est } \rho\text{-lipchitzien}) \iff \left(\forall \lambda \in Sp(s), |\lambda| \leq \rho\right).$$

($\Rightarrow$) On suppose que *s* est ρ-lipchitzien. Soit $\lambda \in Sp(s)$ est *x* un vecteur propre associé à λ (donc *x* est non nul). On a $\|s(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\| \leq \rho\|x\|$ et comme $x \neq 0$, on a $\|x\| > 0$ et donc $|\lambda| \leq \rho$.

($\Leftarrow$) On suppose que pour tout $\lambda \in Sp(s)$, on a $|\lambda| \leq \rho$.

Comme s est symétrique, il existe une base orthonormée de E, $(e_1, \ldots, e_n)$, de vecteurs propres de s, avec $s(e_i) = \lambda_i e_i$ (λ_i valeur propre associée à e_i). Alors, pour tout $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \in E$, on a :

$\|s(x)\|^2 = \|x_1 s(e_1) + \ldots + x_n s(e_n)\|^2 = \|x_1\lambda_1 e_1 + \ldots + x_n\lambda_n e_n\|^2 = x_1^2\lambda_1^2 + \ldots + x_n^2\lambda_n^2 \leq x_1^2\rho^2 + \ldots + x_n^2\rho^2 = \rho^2\|x\|^2$.

Donc $\|s(x)\| \leq \rho\|x\|$ et s est ρ-lipchitzien.

****

Remarquons dans la preuve ci-dessus, on n'utilise pas explicitement la symétrie de s pour le sens direct, donc pour un endomorphisme ρ-lipchitzien quelconque de E, on a $|\lambda| \leq \rho$ pour toute valeur propre λ *réelle* de s.

Soit $\lambda = a + ib$ (avec a et b réels) une valeur propre complexe de s. Si A est la matrice de s dans une base orthonormée de E et $X + iY$ une vecteur propre associé à λ, avec $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$A(X+iY) = AX + iAY = \lambda(X+iY) = (a+ib)(X+iY) = aX - bY + i(bX + aY).$$

Donc, $AX = aX - bY$ et $AY = bX + aY$:

$$\|AX\|^2 = \|aX - bY\|^2 = a^2\|X\|^2 - 2ab(X\,|\,Y) + b^2\|Y\|^2 \leq \rho^2\|X\|^2$$
$$\|AY\|^2 = \|bX + aY\|^2 = b^2\|X\|^2 - 2ab(X\,|\,Y) + a^2\|Y\|^2 \leq \rho^2\|Y\|^2$$

Soit, en additionnant :

$$(a^2+b^2)\left(\|X\|^2 + \|Y\|^2\right) \leq \rho^2\left(\|X\|^2 + \|Y\|^2\right) \quad \Rightarrow \quad a^2 + b^2 = |\lambda|^2 \leq \rho^2$$

car $X + iY \neq 0$ donc $\|X\|^2 + \|Y\|^2 > 0$. Ainsi, on a à nouveau $|\lambda| \leq \rho$, même pour λ complexe.

Par contre, un endomorphisme quelconque de E dont toutes les valeurs propres sont en module inférieures à ρ n'est pas forcément ρ-lipchitzien. Par exemple, un endomorphisme nilpotent non nul : sa seule valeur propre est 0, mais il n'est pas 0-lipchitzien.

Planche n° 18

I) Par une comparaison série-intégrale, trouver un équivalent de $u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k}$ défini pour $n \geq 2$.

Etudier la monotonie et la convergence de la suite de terme général $v_n = u_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2$.

On admet que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$. Montrer que $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k \ln k}{k} = \ln 2\left(\gamma - \frac{\ln 2}{2}\right)$.

II) Déterminer les classes de similitude de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

I) Une étude rapide de la fonction continue $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ montre qu'elle est décroissante sur $[e,+\infty[$.

On peut donc utiliser la comparaison série-intégrale qui donne pour tout $n \geq 3$:

$$\frac{\ln 2}{2}+\int_3^{n+1}\frac{\ln x}{x}dx \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\int_3^{n}\frac{\ln x}{x}dx.$$

Soit, avec $\displaystyle\int_3^{n}\frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}(\ln n)^2-\frac{1}{2}(\ln 3)^2$:

$$\frac{1}{2}(\ln(n+1))^2+\frac{\ln 2-(\ln 3)^2}{2} \leq u_n \leq \frac{1}{2}(\ln n)^2+\frac{\ln 2-(\ln 3)^2}{2}+\frac{\ln 3}{3}.$$

Et comme $\ln(n+1)=\ln n+\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \sim \ln n$, on obtient :

$$u_n \sim \frac{1}{2}(\ln n)^2.$$

****

On a pour tout $n \geq 2$:

$$v_{n+1}-v_n=u_{n+1}-u_n-\frac{1}{2}(\ln(n+1))^2+\frac{1}{2}(\ln n)^2=\frac{\ln(n+1)}{n+1}-\frac{1}{2}\left(\ln(n+1)+\ln n\right)\left(\ln(n+1)-\ln n\right)$$

$$=\frac{\ln(n+1)}{n+1}+\frac{1}{2}\left(2\ln(n+1)+\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right)\left(\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right)=f\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

avec $f(x)=-x\ln x-\ln x\ln(1-x)+\dfrac{1}{2}\left(\ln(1-x)\right)^2$.

On a $f(x)\underset{0}{\sim}\dfrac{x^2\ln x}{2}$, donc $f(x)<0$ au voisinage de 0, ce qui implique que $v_{n+1}-v_n<0$ quand n devient grand et ainsi, $(v_n)_{n\geq 2}$ est décroissante à partir d'un certain rang.

De plus, on a vu que pour tout $n \geq 3$:

$$\frac{1}{2}\left[(\ln(n+1))^2-(\ln n)^2\right]+\frac{\ln 2-(\ln 3)^2}{2} \leq v_n=u_n-\frac{1}{2}(\ln n)^2.$$

Et :

$$\frac{1}{2}\left[(\ln(n+1))^2-(\ln n)^2\right]=\frac{1}{2}\left(\ln(n+1)+\ln n\right)\left(\ln(n+1)-\ln n\right)=\left(\ln n+\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{\ln n}{n}$$

Donc, $\dfrac{1}{2}\left[(\ln(n+1))^2-(\ln n)^2\right]\to 0$ et la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ étant minorée par une suite convergente, elle est minorée. Comme elle est décroissante à partir d'un certain rang, la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ converge vers un réel α et donc $u_n=\dfrac{1}{2}(\ln n)^2+v_n=\dfrac{1}{2}(\ln n)^2+\alpha+o(1)$.

****

On a vu que $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ décroit sur $[e, +\infty[$, donc la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)_{n\geq 1}$ décroit à partir du rang 3 et, comme elle converge vers 0, la série $\sum (-1)^k \dfrac{\ln k}{k}$ vérifie le critère spécial des séries alternées, donc converge.

On a pour tout $n \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k \ln k}{k} = \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{(-1)^k \ln k}{k} = \sum_{\substack{k=2\\ k \text{ pair}}}^{2n+1} \frac{\ln k}{k} - \sum_{\substack{k=2\\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \frac{\ln k}{k}$$

$$= 2\sum_{\substack{k=2\\ k \text{ pair}}}^{2n+1} \frac{\ln k}{k} - \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{\ln k}{k} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln (2k)}{2k} - \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{\ln k}{k}$$

$$= (\ln 2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k} - \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{\ln k}{k} = (\ln 2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + u_n - u_{2n+1}$$

Or, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ et $u_n = \dfrac{1}{2}(\ln n)^2 + \alpha + o(1)$, donc :

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k \ln k}{k} = (\ln 2)\left[\ln n + \gamma + o(1)\right] + \left[\frac{1}{2}(\ln n)^2 + \alpha + o(1)\right] - \left[\frac{1}{2}(\ln (2n+1))^2 + \alpha + o(1)\right]$$

$$= (\ln 2)\ln n + (\ln 2)\gamma - \frac{1}{2}\left(\ln (2n+1) - \ln n\right)\left(\ln n + \ln (2n+1)\right) + o(1)$$

$$= (\ln 2)\ln n + (\ln 2)\gamma - \frac{1}{2}\left(\ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)\right)\left(2\ln n + \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)\right) + o(1)$$

$$= (\ln 2)\left(\gamma - \frac{\ln 2}{2}\right) + o(1)$$

Et ainsi, $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k \ln k}{k} = \ln 2\left(\gamma - \frac{\ln 2}{2}\right)$.

****

II) Soit M une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à M. Comme dans $\mathbb{C}$, tout polynôme est scindé, entre le polynôme caractéristique χ_M de M, la matrice M admet entre 1 et 3 valeurs propres distinctes.

- Si M admet 3 valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable, donc semblable à une matrice diagonale. Remarquons que deux matrice diagonales ayant les mêmes coefficients diagonaux, mais pas à la même place sont semblable (il suffit de changer l'ordre des vecteur de la base).
- Si M admet 2 valeurs propres distinctes a et b (où b est racine double de χ_M), elle est trigonalisable, et semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & \alpha \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, matrice de u dans une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{C}^3$. En posant $e_3' = \dfrac{\alpha}{b-a}e_1 + e_3$, on a $u(e_3') = ce_2 + be_3'$ et (e_1, e_2, e_3') est une

base de $\mathbb{C}^3$. La matrice de u dans cette base est alors $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, donc M est semblable à une matrice de cette forme.

Remarquons que si c est nul, M est diagonalisable et si c n'est pas nul, on peut poser $e_2' = ce_2$.

La famille (e_1, e_2', e_3') est une base de $\mathbb{C}^3$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

- Si M admet une seule valeur propre a, notons $E_a = \ker(M - aI_3)$.
  - Si $\dim E_a = 3$, alors $M = aI_3$.
  - Si $\dim E_a = 2$, alors, M est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ avec $(b,c) \neq (0,0)$.

    Si $c \neq 0$, on peut poser $e_2' = be_1 + ce_2$. La famille (e_1, e_2', e_3) est une base de $\mathbb{C}^3$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

    Si $c = 0$ (donc $b \neq 0$), on peut poser $e_1' = e_2$ et $e_2' = be_1$. La famille (e_1', e_2', e_3) est une base de $\mathbb{C}^3$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.
  - Si $\dim E_a = 1$, alors, M est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$ et $(c,d) \neq (0,0)$. Si $d = 0$, M est semblable à $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, donc $rg\,(M - aI_3) = rg\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$ et par le théorème sur rang, on obtient $\dim E_a = 2$, ce qui est absurde. Ainsi, $d \neq 0$.

    En posant alors $e_1' = dbe_1$ et $e_2' = ce_1 + de_2$, la famille (e_1', e_2', e_3) est une base de $\mathbb{C}^3$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

Finalement, toute matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ est soit diagonalisable, soit semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, avec $a, b \in \mathbb{C}$ distincts ou pas, soit semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{C}$.

Planche n° 19

I) Domaine de définition de *f*, définie par $f(x)=\int_0^x \frac{\ln|1-t|}{t}dt$.

La fonction *f* est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ? Quel est alors son rayon de convergence ?

Calculer $f(1)$.

Etudier la dérivabilité de *f*.

II) **(*PC*)** Soient *A* et *B* deux matrices symétriques réelles d'ordre *n*.

On suppose qu'il existe $P\in\mathbb{R}[X]$ bijectif, tel que $P(A)=P(B)$. Montrer que $A=B$.

I) La fonction $t\mapsto\frac{\ln|1-t|}{t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*\setminus\{1\}$ et :

- $\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln|1-t|}{t}=\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(1-t)}{t}=-1$, donc $t\mapsto\frac{\ln|1-t|}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 ;
- $\frac{\ln|1-t|}{t}\underset{t\to1}{\sim}\ln|1-t|$ et $t\mapsto\ln|1-t|$ est intégrable au en 1.

Ainsi, en prolongeant $g:t\mapsto\frac{\ln|1-t|}{t}$, par continuité en 0 et en écrivant, pour tout réel $x>1$, $f(x)=\int_0^1\frac{\ln|1-t|}{t}dt+\int_1^x\frac{\ln|1-t|}{t}dt$, on définit *f* sur $\mathbb{R}$ tout entier.

****

Pour tout $t\in\,]-1,1[$, $\frac{\ln|1-t|}{t}=\frac{\ln(1-t)}{t}=-\sum_{n\geq0}\frac{t^n}{n+1}$. Donc, $t\mapsto\frac{\ln|1-t|}{t}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$. On peut intégrer terme à terme :

$$f(x)=-\sum_{n\geq0}\int_0^x\frac{t^n}{n+1}dt=-\sum_{n\geq0}\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}=-\sum_{n\geq1}\frac{x^n}{n^2}.$$

Remarquons que le rayon de convergence de cette série entière est bien 1 et ainsi, *f* est développable en série entière au voisinage de 0 et son rayon de convergence est 1.

****

Remarquons que $\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^2}$ converge, donc $\sum_{n\geq1}\frac{x^n}{n^2}$ converge normalement sur $[0,1]$, et ainsi, *f* est continue en 1, donc : $f(1)=-\sum_{n\geq1}\frac{x^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{6}$.

****

On a vu que $g:t\mapsto\frac{\ln|1-t|}{t}$ peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Alors, si *G* est une primitive de *g* sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, on a $f(x)=G(x)-G(0)$ pour $x<1$ et $f(x)=G(x)-G(2)+f(2)$ pour $x>1$. Ceci permet de conclure que *f* est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{1}{x-1}\int_1^x \frac{\ln|1-t|}{t}\,dt\,.$$

Prenons $x > 1$. On a alors en posant $u = t-1$:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{1}{x-1}\int_1^x \frac{\ln(t-1)}{t}\,dt = \frac{1}{x-1}\int_0^{x-1} \frac{\ln u}{1+u}\,du\,.$$

Or, pour tout $u > 0$, $1-u \leq \dfrac{1}{1+u}$, donc, pour $0 < x-1 < 1$ (soit $1 < x < 2$), on a (avec $\ln u < 0$ quand $0 < u < x-1 < 1$) :

$$\int_0^{x-1} \frac{\ln u}{1+u}\,du \leq \int_0^{x-1} (1-u)\ln u\,du = (x-1)\ln(x-1) - (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2\ln(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2\,.$$

D'où :

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \leq \ln(x-1) - 1 - \frac{1}{2}(x-1)\ln(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)\,.$$

Et $\lim\limits_{x \to 1^-}\left[\ln(x-1) - 1 - \dfrac{1}{2}(x-1)\ln(x-1) + \dfrac{1}{4}(x-1)\right] = -\infty$, donc par théorème de comparaison :

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty\,.$$

Ainsi, *f* n'est pas dérivable en 1.

****

II) Notons *u* et *v* les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés à *A* et *B* respectivement. On a donc $P(u) = P(v)$.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de *u* et $E_1, \dots, E_p$ les sous-espaces propres associés.

La matrice *A* étant symétrique réelle, *u* est diagonalisable, donc $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$ et dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à cette décomposition, la matrice de *u* est $diag\,(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \dots, \lambda_p)$ où λ_i apparait $n_i = \dim E_i$ fois.

La matrice de $P(u)$ dans $\mathcal{B}$ est alors $diag\big(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_1), P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_p), \dots, P(\lambda_p)\big)$ et comme *P* est bijective donc injective, les $P(\lambda_i)$ sont deux à deux distincts car les λ_i le sont. Ceci prouve que les valeurs propres de $P(u)$ sont les $P(\lambda_i)$ est que le sous-espace propre associé à $P(\lambda_i)$ est E_i. Il en découle aussi que toute base qui diagonalise $P(u)$, diagonalise *u* (et vice-versa, mais c'est toujours le cas). Les matrices *A* et *B* jouant le même rôle, il en va de même pour *v*.

Or, $P(u) = P(v)$, donc les $P(\lambda_i)$ sont les valeurs propres de $P(v)$, de sous-espace propre associé E_i. Alors, d'après ce qui précède, les $P^{-1}\big(P(\lambda_i)\big) = \lambda_i$, sont les valeurs propres de *v*, de sous-espace propre associé E_i aussi. Ainsi, *u* et *v* ont pour matrice $diag\,(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \dots, \lambda_p)$ dans la base $\mathcal{B}$, donc $u = v$, soit $A = B$.

Planche n° 20

I) Convergence et calcul de $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n}{(1+2i)^n}$.

II) A, B et C étant données dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que si A et B n'ont aucune valeur propre commune, l'équation $AX-XB=C$ admet une unique solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Qu'en est-il de la réciproque ? Le montrer.

III) On pioche une poignée de jetons dans une urne en contenant n, numérotés de 1 à n. On admet que chaque poignée (y compris la poignée vide) a la même probabilité d'être tirée.

Donner l'espérance de la variable aléatoire S donnant la somme des numéros tirés.

I) La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} nz^n$ converge pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$ et sa somme vaut $\displaystyle\sum_{n\geq 1} nz^n=\frac{z}{(1-z)^2}$ (obtenue en dérivant $\displaystyle\sum_{n\geq 0} z^n=\frac{1}{1-z}$). Comme $\left|\dfrac{1}{1+2i}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{5}}<1$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n}{(1+2i)^n}=\sum_{n\geq 1} n\left(\frac{1}{1+2i}\right)^n$ converge et :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{n}{(1+2i)^n}=\sum_{n\geq 1} n\left(\frac{1}{1+2i}\right)^n=\frac{\dfrac{1}{1+2i}}{\left(1-\dfrac{1}{1+2i}\right)^2}=-\frac{1+2i}{4}.$$

****

II) Soit $\Phi : M\mapsto AM-MB$. Cette application est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (car $M\mapsto AM$ et $M\mapsto MB$ sont linéaires), donc $AX-XB=C$ admet une unique solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si Φ est bijective, ce qui revient ici à Φ injective ou encore $\ker\Phi=\{0_n\}$.

On suppose que A et B n'ont aucune valeur propre commune. Soit $M\in\ker\Phi$ et $r=rg(M)$.

Supposons que $r\geq 1$.

Il existe alors $(P,Q)\in GL_n(\mathbb{C})^2$ tel que $M=PJQ$ avec $J=\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,n-r}\\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r}\end{array}\right)$ et :

$$M\in\ker\Phi \iff \Phi(M)=0_n \iff AM=MB \iff APJQ=PJQB \iff A'J=JB'$$

avec $A'=P^{-1}AP$ et $B'=QBQ^{-1}$.

Si on pose $A'=\left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2\\ \hline A_3 & A_4\end{array}\right)$ et $B'=\left(\begin{array}{c|c} B_1 & B_2\\ \hline B_3 & B_4\end{array}\right)$ avec $A_1, B_1\in\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$, on a :

$$A'J=JB' \iff \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0_{r,n-r}\\ \hline A_3 & 0_{n-r}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} B_1 & B_2\\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r}\end{array}\right) \iff \begin{cases} A_1=B_1\\ A_3=0_{n-r,r}\\ B_2=0_{r,n-r}\end{cases}$$

Soit $A'=\left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline 0_{n-r,r} & A_4 \end{array}\right)$ et $B'=\left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0_{r,n-r} \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right)$.

Mais alors, $\chi_{A'}=\chi_{A_1}\chi_{A_4}$ et $\chi_{B'}=\chi_{A_1}\chi_{B_4}$, et comme $r\geq 1$ et $A_1\in\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$, χ_{A_1} admet au moins une racine complexe, qui sera un valeur propre commune à A' et B', donc à *A* et *B*, car *A* et A' sont semblables donc $Sp(A')=Sp(A)$ et de même, *B* et B' sont semblables donc $Sp(B')=Sp(B)$.

Ceci est absurde, donc on n'a pas $r\geq 1$ et ainsi, $M=0_n$, donc Φ est bijective et $AX-XB=C$ admet une unique solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

****

La réciproque s'énonce : « si l'équation $AX-XB=C$ admet une unique solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors *A* et *B* n'ont aucune valeur propre commune »

que l'on peut reformuler comme plus haut :

« si Φ est injective, alors *A* et *B* n'ont aucune valeur propre commune »

ou encore par contraposée :

« si *A* et *B* ont une valeur propre commune, alors Φ n'est pas injective »

soit finalement :

« si *A* et *B* ont une valeur propre commune, il existe $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AM=MB$ »

Supposons donc que *A* et *B* ont une valeur propre commune λ.

Pour toute $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a : $(A-\lambda I_n)M=M(B-\lambda I_n)\Leftrightarrow AM=MB$, donc quitte à remplacer A par $A-\lambda I_n$ et B par $B-\lambda I_n$, on peut supposer $\lambda=0$.

Ainsi, $r=rg(B)\leq n-1$ et $\dim\ker A\geq 1$. Soit $(e_1,\dots,e_r)$ une base de $\operatorname{Im}B$ que l'on complète en $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_r,e_{r+1},\dots,e_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$ et $e\in\ker A\setminus\{0\}$. Soit $u\in\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ tel que $u(e_k)=0$ pour tout entier *k* compris entre 1 et $n-1$ et $u(e_n)=e$ (donc *u* n'est pas nul).

Si M la matrice (non nulle) de *u* dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on a :

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Im}M=\operatorname{Im}u=\operatorname{Vect}(e)\subset\ker A \quad\Rightarrow\quad AM=0_n \\ \operatorname{Im}B=\operatorname{Vect}(e_1,\dots,e_r)\subset\ker u=\ker M \quad\Rightarrow\quad MB=0_n \end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad AM=MB.$$

On vient donc de trouver $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AM=MB$, ce que l'on voulait.

Ainsi, la réciproque est vraie.

****

III) Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, notons X_k la variable aléatoire qui vaut 1 quand le jeton numéroté *k* appartient à la poignée piochée et 0 sinon. On a alors $S=\sum_{k=1}^{n}kX_k$.

Une poignée correspond à une partie de $[\![1,n]\!]$, donc il y en a 2^n (y compris la poignée vide), dont 2^{n-1} contenant le jeton numéroté *k* (pour construire une partie de $[\![1,n]\!]$ contenant *k*, il suffit de choisir une partie de $[\![1,n]\!]\backslash\{k\}$ et d'y ajouter *k*). Comme les poignées sont équiprobables, la probabilité d'avoir *k* dans la poignée piochée est $P(X_k=1)=\dfrac{2^{n-1}}{2^n}=\dfrac{1}{2}$, et ceci quel que soit *k*.

Alors, $E(X_k)=P(X_k=1)=\dfrac{2^{n-1}}{2^n}=\dfrac{1}{2}$ quel que soit $k\in[\![1,n]\!]$ et, par linéarité de l'espérance :

$$E(S)=E\left(\sum_{k=1}^{n}kX_k\right)=\sum_{k=1}^{n}kE(X_k)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{4}.$$