

Corrigés de la série 4 - Mines-Ponts

Planche n° 13

I) Nature et calcul de $\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right) dx$.

II) Réduire ϕ , définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $\phi(M) = M + \text{tr}(AM)A$ où A est fixée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

D) Soient $x, A \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\int_x^A \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{1 - \cos t}{t} \right]_x^A + \int_x^A \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \frac{1 - \cos A}{A} - \frac{1 - \cos x}{x} + \int_x^A \frac{1 - \cos t}{t^2} dt.$$

On a $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos A}{A} = 0$ et $\frac{1 - \cos t}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $\int_x^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$ converge.

Ainsi, $\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge avec :

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\cos x - 1}{x} + \int_x^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt.$$

La fonction f est alors de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* avec $f'(x) = -\frac{\sin x}{x}$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$, et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ donc $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$ converge.

Ainsi, f se prolonge par continuité en 0 (avec $f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$) et, comme $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -1$, f est de classe C^1 en 0, donc sur \mathbb{R}_+ .

Pour tous $X \in \mathbb{R}_+^*$, on peut alors intégrer par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^X f(x) dx &= [xf(x)]_0^X - \int_0^X xf'(x) dx = [xf(x)]_0^X + \int_0^X \sin x dx \\ &= \left[x \left(\frac{\cos x - 1}{x} + \int_x^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt \right) \right]_0^X + [-\cos x]_0^X = \left[-1 + x \int_x^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt \right]_0^X = X \int_X^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt \end{aligned}$$

Soient $X, A \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned} \int_X^A \frac{1 - \cos t}{t^2} dt &= \int_X^A \frac{1}{t^2} dt - \int_X^A \frac{\cos t}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_X^A - \left[\frac{\sin t}{t^2} \right]_X^A - 2 \int_X^A \frac{\sin t}{t^3} dt \\ &= \frac{1}{X} - \frac{1}{A} - \frac{\sin A}{A^2} + \frac{\sin X}{X^2} - 2 \int_X^A \frac{\sin t}{t^3} dt \end{aligned}$$

Et quand A tend vers $+\infty$ (tous les termes admettent une limite), on obtient :

$$\int_X^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \frac{1}{X} + \frac{\sin X}{X^2} - 2 \int_X^{+\infty} \frac{\sin t}{t^3} dt.$$

Alors :

$$\int_0^X f(x)dx = 1 + \frac{\sin X}{X} - 2X \int_X^{+\infty} \frac{\sin t}{t^3} dt .$$

Et, pour tout $X \in \mathbb{R}_+^*$, $\left| X \int_X^{+\infty} \frac{\sin t}{t^3} dt \right| \leq X \int_X^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt = \frac{1}{2X}$, donc quand X tend vers $+\infty$:

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_X^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right) dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx = 1 .$$

II) Remarquons que la question a du sens car ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (entre autres, car la trace est linéaire).

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $\phi(M) = \lambda M$. On a alors :

$$M + tr(AM)A = \lambda M \iff (\lambda - 1)M = tr(AM)A .$$

Si $\lambda = 1$, on a $tr(AM) = 0$ car $A \neq 0_n$. Or, l'application $M \mapsto tr(AM)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \phi(M) = M\} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid tr(AM) = 0\}$ est le noyau de cette forme linéaire, donc est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si $\lambda \neq 1$, on a $M = \frac{tr(AM)}{\lambda - 1} A \in \text{Vect}(A)$ et réciproquement, si $M = \alpha A$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$, on a :

$$\phi(M) = \phi(\alpha A) = \alpha \phi(A) = \alpha [A + tr(A^2)A] = \alpha (1 + tr(A^2))A = (1 + tr(A^2))M .$$

Ainsi, 1 est valeur propre de ϕ , de sous-espace propre associé $E_1 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid tr(AM) = 0\}$, et :

- si $tr(A^2) = 0$, la seule valeur propre de ϕ est 1 ;
- si $tr(A^2) \neq 0$, $1 + tr(A^2)$ est valeur propre de ϕ , de sous-espace propre associé $\text{Vect}(A)$.

Planche n° 14

D) Etablir la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $f_n(x) = e^{-nx} - (1-x)^n$.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle ?

II) Trouver les nombres complexes z tels que le triangle ABC avec A, B et C d'affixes respectives z, z^2 et z^3 ait l'origine pour orthocentre.

D) On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} +\infty & \text{quand } x < 0 \\ 0 & \text{quand } 0 \leq x < 2 \\ \text{pas de limite} & \text{quand } x \geq 2 \end{cases}$$

Ainsi, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 2[$ (et ne converge pas ailleurs).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable, de dérivée $f_n' : x \mapsto -n[e^{-nx} - (1-x)^{n-1}]$. On a :

$$f_n'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{-nx} \leq (1-x)^{n-1}.$$

Sur $[0,1[$, ceci équivaut à $-nx \leq (n-1)\ln(1-x)$, soit $h_n(x) = (n-1)\ln(1-x) + nx \geq 0$, donc f_n' est du signe de h_n sur $[0,1[$.

La fonction h_n est dérivable sur $[0,1[$, de dérivée $h_n' : x \mapsto \frac{1-nx}{1-x}$. On a donc pour $n \geq 2$:

- sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$, h_n est croissante de $h_n(0) = 0$ à $h_n\left(\frac{1}{n}\right) \geq 0$, donc positive ;
- sur $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$, h_n est décroissante de $h_n\left(\frac{1}{n}\right) \geq 0$ à $-\infty$, donc s'annule une fois en α_n d'après le théorème de la bijection continue, et h_n est positive sur $\left[\frac{1}{n}, \alpha_n\right]$ et négative sur $[\alpha_n, 1]$.

On obtient alors le tableau de signes :

x	0	$\frac{1}{n}$	α_n	$\frac{2}{n}$	1
$h_n(x)$		+	0	-	
$f_n'(x)$		+	0	-	

Alors :

- sur $[0, \alpha_n[$, f_n' est positive, donc f_n est décroissante de $f_n(0) = 0$ à $f_n(\alpha_n) \geq 0$;
- sur $[\alpha_n, 1]$, f_n' est négative, donc f_n est décroissante de $f_n(\alpha_n)$ à $f_n(1) = e^{-n} > 0$.

Ainsi, $\sup_{[0,1]} |f_n| = f_n(\alpha_n)$ et comme $h_n(\alpha_n) = 0$, on a $(1-\alpha_n)^n = e^{-n\alpha_n}(1-\alpha_n)$, d'où :

$$\sup_{[0,1]} |f_n| = e^{-n\alpha_n} - (1-\alpha_n)^n = e^{-n\alpha_n} - e^{-n\alpha_n}(1-\alpha_n) = e^{-n\alpha_n}\alpha_n.$$

On a $\alpha_n \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$, donc $n\alpha_n \geq 1$ et $\sup_{[0,1]} |f_n| \leq \frac{1}{e}\alpha_n$. Enfin :

$$h_n\left(\frac{2}{n}\right) = (n-1)\ln\left(1-\frac{2}{n}\right) + 2 = (n-1)\left(-\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} - \frac{8}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + 2 = -\frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc, $h_n\left(\frac{2}{n}\right) < 0$ aprcr et ainsi, $\frac{1}{n} \leq \alpha_n \leq \frac{2}{n}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$.

Avec $\sup_{[0,1]} |f_n| \leq \frac{1}{e}\alpha_n$, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{[0,1]} |f_n| = 0$ et donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Soit maintenant, $a \in]1, 2[$. Pour tout $x \in [1, a]$:

$$|f_n(x)| \leq e^{-n} + |1-a|^n.$$

Comme $|1-a| < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} [e^{-n} + |1-a|^n] = 0$ et par hypothèse de domination, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$

converge uniformément sur tout segment $[1, a]$ inclus dans $[1, 2[$, donc, avec la convergence uniforme sur $[0, 1[$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment $[0, a]$ inclus dans $[0, 2[$.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 2[$, $|f_n(x)| = |e^{-nx} - (1-x)^n| \leq e^{-nx} + |1-x|^n \leq 2$, donc $\sup_{x \in [0, 2[} |f_n(x)|$ existe. Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{2n+1}(2) = e^{-2(2n+1)} + 1 > 1$, donc $\sup_{x \in [0, 2[} |f_{2n+1}(x)| \geq 1$ et ainsi,

la suite $\left(\sup_{x \in [0, 2[} |f_n(x)| \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, donc la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0, 2[$. Finalement :

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout $[0, a]$ inclus dans $[0, 2[$, mais pas sur $[0, 2[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$, donc $\sum f_n(0)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(0) = 0$.

Pour tout $x \in]0, 2[$, on a $1-x \in]-1, 1[$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^N f_n(x) = \sum_{n=0}^N e^{-nx} - \sum_{n=0}^N (1-x)^n = \frac{1-e^{-(N+1)x}}{1-e^{-x}} - \frac{1-(1-x)^{N+1}}{1-(1-x)} = \frac{1-e^{-(N+1)x}}{1-e^{-x}} - \frac{1-(1-x)^{N+1}}{x}.$$

Donc, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N f_n(x) = \frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}$, donc $\sum f_n(x)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}$.

Ainsi, la série $\sum f_n(x)$ converge pour tout $x \in [0, 2[$ (et diverge grossièrement sinon).

II) L'origine O du repère est l'orthocentre de ABC si et seulement elle appartient à deux hauteurs du triangle, par exemple les hauteurs issues de A et de B , ce qui revient à :

$$\overline{OA} \cdot \overline{BC} = \overline{OB} \cdot \overline{AC} = 0.$$

Et :

$$\begin{aligned} \overline{OA} \cdot \overline{BC} = \overline{OB} \cdot \overline{AC} = 0 &\Leftrightarrow \operatorname{Re}[\overline{z_{OA}} \cdot z_{BC}] = \operatorname{Re}[\overline{z_{OB}} \cdot z_{AC}] = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Re}[\overline{z_A} (z_C - z_B)] = \operatorname{Re}[\overline{z_B} (z_C - z_A)] = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Re}[\overline{z} (z^3 - z^2)] = \operatorname{Re}[\overline{z}^2 (z^3 - z)] = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Re}[|z|^2 (z^2 - z)] = \operatorname{Re}[|z|^2 (z^2 \overline{z} - \overline{z})] = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Re}[z^2 - z] = \operatorname{Re}[z^2 \overline{z} - \overline{z}] = 0 \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[z^2 - z] &= \frac{1}{2}(z^2 - z + \overline{z}^2 - \overline{z}) = \frac{1}{2}(z^2 + \overline{z}^2 - (z + \overline{z})) \\ \operatorname{Re}[z^2 - z] &= \frac{1}{2}(z^2 \overline{z} - \overline{z} + \overline{z}^2 z - z) = \frac{1}{2}(|z|^2 - 1)(z + \overline{z}) \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} z^2 + \bar{z}^2 = z + \bar{z} \\ (|z|^2 - 1)(z + \bar{z}) = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} z^2 + \bar{z}^2 = z + \bar{z} \\ |z|^2 = 1 \text{ ou } z + \bar{z} = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} z^2 + \bar{z}^2 = z + \bar{z} \\ |z| = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} z^2 + \bar{z}^2 = 0 \\ z + \bar{z} = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} z = e^{i\theta} \\ \cos 2\theta = \cos \theta \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2z^2 = 0 \\ \bar{z} = -z \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} z = e^{i\theta} \\ 2\cos^2 \theta - \cos \theta - 1 = 0 \end{cases} \text{ ou } z = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} z = e^{i\theta} \\ (\cos \theta - 1)(2\cos \theta + 1) = 0 \end{cases} \text{ ou } z = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} z = e^{i\theta} \\ \cos \theta = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} z = e^{i\theta} \\ \cos \theta = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ ou } z = 0 \\
 &\Leftrightarrow z = 1 \text{ ou } z = j \text{ ou } z = \bar{j} \text{ ou } z = 0
 \end{aligned}$$

La solution $z = 1$ est exclue (car dans ce cas, on a $A = B = C \neq O$), donc :

Les solutions sont donc 0 , j et \bar{j} .

Dans les deux derniers cas, ABC est équilatéral de centre O .

Planche n° 15

I) Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{C} -espace vectoriel E de dimension finie.

On suppose u diagonalisable, de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

Montrer qu'il existe p endomorphismes u_1, \dots, u_p tels que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(u) = \sum_{i=1}^p P(\lambda_i)u_i$.

Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, il existe $P_i \in \mathbb{C}[X]$ tel que $u_i = P_i(u)$.

Réciproquement, montrer que si u est un endomorphisme tel qu'il existe p endomorphismes

u_1, \dots, u_p vérifiant pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(u) = \sum_{i=1}^p P(\lambda_i)u_i$, alors u est diagonalisable.

II) Convergence de la série de terme général $u_n = \int_0^1 \cos(nt^2) dt$.

D) Comme u est diagonalisable, on a $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$ où E_i est le sous-espace propre associé à λ_i .

Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, soit $u_i \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u_i|_{E_i} = id_{E_i}$ et pour tout $x \in E_j$ avec $j \neq i$, $u_i(x) = 0$.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et tout $x_i \in E_i$, on a $u(x_i) = \lambda_i x_i = \lambda_i u_i(x_i)$ et $P(u)(x_i) = P(\lambda_i) u_i(x_i)$.

Alors, pour tout $x = x_1 + \dots + x_p \in E$ avec $x_i \in E_i$, on a $u_i(x) = u_i(x_1) + \dots + u_i(x_p) = u_i(x_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, donc $P(u)(x_i) = P(\lambda_i) u_i(x_i)$ et :

$$P(u)(x) = \sum_{i=1}^p P(u)(x_i) = \sum_{i=1}^p P(\lambda_i) u_i(x) = \left[\sum_{i=1}^p P(\lambda_i) u_i \right](x)$$

Ceci étant vrai pour tout x de E , on a bien $P(u) = \sum_{i=1}^p P(\lambda_i) u_i$.

Posons pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $P_i = \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^p (X - \lambda_j)}{\prod_{j=1, j \neq i}^p (\lambda_i - \lambda_j)}$ (polynôme de Lagrange). On a pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$:

$$P_i(u) = \sum_{j=1}^p P_i(\lambda_j) u_j = P_i(\lambda_i) u_i = u_i.$$

La réciproque a été vue dans la planche 11 (il suffit de remarquer que $\prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$ est un polynôme annulateur de u , scindé à racines simples).

II) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a pour tout $t \in]0, 1]$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \cos(kt^2) &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n (e^{it^2})^k \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i(n+1)t^2} - 1}{e^{it^2} - 1} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{\frac{i(n+1)t^2}{2}} \sin\left(\frac{(n+1)t^2}{2}\right)}{e^{\frac{it^2}{2}} \sin\left(\frac{t^2}{2}\right)} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{\frac{in^2 t^2}{2}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)t^2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t^2}{2}\right)} \right) = \frac{\cos\left(\frac{nt^2}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)t^2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t^2}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t^2}{2}\right) + \sin\left(\frac{t^2}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t^2}{2}\right)} = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t^2}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t^2}{2}\right)} + 1 \end{aligned}$$

Comme $\frac{\sin\left((2n+1)\frac{t^2}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t^2}{2}\right)} \rightarrow \frac{2n+1}{2}$ quand $t \rightarrow 0$, $t \mapsto \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t^2}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t^2}{2}\right)}$ est intégrable sur $[0,1]$ et :

$$\sum_{k=0}^n u_k = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n \cos(kt^2) \right) dt = \int_0^1 \left(\frac{\sin\left((2n+1)\frac{t^2}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t^2}{2}\right)} + 1 \right) dt = 1 + \frac{1}{2} I_n \quad \text{avec} \quad I_n = \int_0^1 \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t^2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t^2}{2}\right)} dt.$$

Posons, pour $t \in]0,1[$:

$$g(t) = \frac{1}{t} \left(\frac{1}{\sin(t^2/2)} - \frac{1}{t^2/2} \right) = t \frac{\frac{t^2}{2} - \sin\left(\frac{t^2}{2}\right)}{\frac{t^2}{2} \sin\left(\frac{t^2}{2}\right)} = \frac{t^2 - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^{2k+1}}{t \frac{t^2}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^{2k+1}} = \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+3)!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^{2k+1}}{\left[1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^{2k} \right]}$$

La dernière formule montre que g se prolonge en 0 en une fonction de classe C^∞ sur $[0,1]$ (car quotient de deux séries entières et le dénominateur ne s'annule pas).

On peut alors écrire :

$$I_n = \int_0^1 \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t^2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t^2}{2}\right)} dt = \int_0^1 \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t^2}{2}\right)}{\frac{t^2}{2}} dt + \int_0^1 t \sin\left((2n+1)\frac{t^2}{2}\right) g(t) dt.$$

On pose $u = (2n+1)\frac{t^2}{2}$, soit $dt = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2n+1}} \frac{1}{\sqrt{u}} du$ dans la première intégrale et, comme les fonctions g et $t \mapsto \cos\left((2n+1)\frac{t^2}{2}\right)$ sont C^1 sur $[0,1]$, on peut intégrer par parties la seconde intégrale, ce qui donne :

$$I_n = (2n+1) \int_0^{\frac{2n+1}{2}} \frac{\sin u}{u} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2n+1}} \frac{1}{\sqrt{u}} du + \left[-\frac{1}{2n+1} \cos\left((2n+1)\frac{t^2}{2}\right) g(t) \right]_0^1 + \frac{1}{2n+1} \int_0^1 \cos\left((2n+1)\frac{t^2}{2}\right) g'(t) dt$$

Soit :

$$I_n = \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{2n+1}{2}} \frac{\sin u}{u\sqrt{u}} du + \frac{1}{2n+1} \left[-\cos\left(\frac{2n+1}{2}\right) g(1) + \int_0^1 \cos\left((2n+1)\frac{t^2}{2}\right) g'(t) dt \right].$$

On a :

- $\left| -\cos\left(\frac{2n+1}{2}\right) g(1) + \int_0^1 \cos\left((2n+1)\frac{t^2}{2}\right) g'(t) dt \right| \leq |g(1)| + \int_0^1 |g'(t)| dt$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2n+1} \left[-\cos\left(\frac{2n+1}{2}\right) g(1) + \int_0^1 \cos\left((2n+1)\frac{t^2}{2}\right) g'(t) dt \right] \right) = 0.$$

- $\left| \frac{\sin u}{u\sqrt{u}} \right| \leq \frac{1}{u\sqrt{u}}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{u}}$ converge, donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u\sqrt{u}} du$ converge et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{\frac{2n+1}{2}} \frac{\sin u}{u\sqrt{u}} du \right) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u\sqrt{u}} du .$$

De plus, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u\sqrt{u}} du = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin u}{u\sqrt{u}} du$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin u}{u\sqrt{u}} du &= \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\sin u}{u\sqrt{u}} du + \int_{2k\pi+\pi}^{2k\pi+2\pi} \frac{\sin u}{u\sqrt{u}} du = \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\sin u}{u\sqrt{u}} du + \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\sin(u+\pi)}{(u+\pi)\sqrt{u+\pi}} du \\ &= \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\sin u}{u\sqrt{u}} du - \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\sin u}{(u+\pi)\sqrt{u+\pi}} du = \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \left(\frac{1}{u\sqrt{u}} - \frac{1}{(u+\pi)\sqrt{u+\pi}} \right) \sin u du \end{aligned}$$

Et comme $\left(\frac{1}{u\sqrt{u}} - \frac{1}{(u+\pi)\sqrt{u+\pi}} \right) \sin u > 0$ sur $]0, \pi[$, on a $\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin u}{u\sqrt{u}} du > 0$ pour tout

$k \in \mathbb{N}$ et ainsi, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u\sqrt{u}} du > 0$. Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{2n+1}{2}} \frac{\sin u}{u\sqrt{u}} du \right) = +\infty .$$

Finalement, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$ et donc, la série de terme général $u_n = \int_0^1 \cos(nt^2) dt$ diverge.

Planche n° 16

I) Trouver les polynômes annulateurs de $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c \end{pmatrix}$.

II) Soit H , définie par $H(0,0) = 0$ et $H(x,y) = \frac{x^4 y}{(x^4 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.

La fonction H est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ?

D) On suppose a, b et c distincts deux à deux. On peut écrire :

$$M = \begin{pmatrix} a & (0) & (0) \\ (0) & M_1 & (0) \\ (0) & (0) & M_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_6(\mathbb{K})$$

avec $M_1 = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On a :

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(a) & (0) & (0) \\ (0) & P(M_1) & (0) \\ (0) & (0) & P(M_2) \end{pmatrix}.$$

Donc, $P(M) = 0_6$ si et seulement si $P(a) = 0$, $P(M_1) = 0_2$ et $P(M_2) = 0_3$.

On a $P(a) = 0$ si et seulement si $X - a$ divise P .

La seule valeur propre de M_1 est b et $(M_1 - bI_2)^2 = 0_2$, mais $M_1 - bI_2 \neq 0_2$. Donc, $P(M_1) = 0_2$ si et seulement si $(X - b)^2$ divise P .

De même, on a $(M_2 - bI_3)^2 \neq 0_2$ et $(M_2 - bI_3)^3 = 0_2$, donc $P(M_2) = 0_3$ si et seulement si $(X - c)^3$ divise P .

Ainsi, $P(M) = 0_6$ si et seulement si $X - a$, $(X - b)^2$ et $(X - c)^3$ divisent P , autrement dit, les polynômes annulateurs de M sont les polynômes de la forme $(X - a)(X - b)^2(X - c)^3Q$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$.

II) On a $(x^4 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 0$ si et seulement si $(x, y) = (0, 0)$.

Comme $(x, y) \mapsto x^4 y$ et $(x, y) \mapsto (x^4 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}$ sont continues sur \mathbb{R}^2 , H l'est aussi en tant que quotient de telles fonctions. On a pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:

$$|H(r \cos \theta, r \sin \theta)| = \frac{r^2 \cos^4 \theta |\sin \theta|}{r^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta}.$$

1^{ère} version :

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\varepsilon < 1$. Pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que $r \leq \varepsilon$, on a :

- si $|\sin \theta| \leq \varepsilon$, alors $\cos^2 \theta \geq 1 - \varepsilon^2 > 0$, donc $r^2 \cos^4 \theta \neq 0$ et :

$$|H(r \cos \theta, r \sin \theta)| \leq \frac{r^2 \cos^4 \theta |\sin \theta|}{r^2 \cos^4 \theta} = |\sin \theta| \leq \varepsilon.$$

- si $|\sin \theta| > \varepsilon$, alors $|\sin \theta| \neq 0$ et :

$$|H(r \cos \theta, r \sin \theta)| \leq \frac{r^2 \cos^4 \theta |\sin \theta|}{\sin^2 \theta} \leq \frac{r^2}{|\sin \theta|} \leq \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} = \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que $r \leq \varepsilon$, on a $|H(r \cos \theta, r \sin \theta)| \leq \varepsilon$. Ceci prouve que $\lim_{r \rightarrow 0} H(r \cos \theta, r \sin \theta) = 0$, donc que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} H(x, y) = 0 = H(0, 0)$, et donc que H est continue en 0 et finalement, H est continue sur \mathbb{R}^2 .

2^{ème} version :

Si $\cos \theta = 0$, alors $|H(r \cos \theta, r \sin \theta)| = 0$ et si $\cos \theta \neq 0$, on a $|H(r \cos \theta, r \sin \theta)| = f(|\sin \theta|)$ avec

$$f : t \mapsto \frac{at}{a+t^2} \text{ et } a = r^2 \cos^4 \theta > 0.$$

Une étude rapide de f sur \mathbb{R}_+ prouve que f est positive et admet pour maximum $\frac{1}{2}\sqrt{a}$ en \sqrt{a} .

On a donc, pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:

$$|H(r \cos \theta, r \sin \theta)| \leq \frac{1}{2} \sqrt{r^2 \cos^4 \theta} = \frac{1}{2} r \cos^2 \theta \leq \frac{1}{2} r.$$

Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que $\lim_{r \rightarrow 0} H(r \cos \theta, r \sin \theta) = 0$, donc que

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} H(x, y) = 0 = H(0, 0)$, et H est continue en 0.