Corrigés de la série 3 - Mines-Ponts

Planche n° 9

I) Déterminer la nature puis la valeur de l'intégrale $\int_a^b (b-t)^\alpha (t-a)^n\,dt$ où a, b et α sont des réels (avec $a<b$) et n un entier naturel non nul.

II) On note $S_n(I)$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n dont les valeurs propres sont dans l'intervalle non vide I.

Montrer que pour tout $S\in S_n(\mathbb{R})$ et tout $X\in\mathbb{R}^n$, $(\min\limits_{\lambda\in Sp(S)}\lambda)\,{}^tXX \le {}^tXSX$.

Montrer que $S_n(I)$ est une partie convexe de $S_n(\mathbb{R})$.

I) Posons $c=b-a>0$. Avec $t=b-u$, on a :

$$I_{n,\alpha}=\int_a^b (b-t)^\alpha (t-a)^n\,dt=\int_0^c u^\alpha (c-u)^n\,du.$$

L'intégrale est impropre en 0 et comme $c>0$, on a $u^\alpha (c-u)^n \underset{0}{\sim} c^n u^\alpha$, donc $I_{n,\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha>-1$. Alors, pour tout $\varepsilon>0$, on a :

$$\int_\varepsilon^c u^\alpha (c-u)^n\,du=\left[\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}(c-u)^n\right]_\varepsilon^c-\frac{n}{\alpha+1}\int_\varepsilon^c u^{\alpha+1}(c-u)^{n-1}\,du.$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient $I_{n,\alpha}=-\dfrac{n}{\alpha+1}I_{n-1,\alpha+1}$. Alors :

$$I_{n,\alpha}=-\frac{n}{\alpha+1}I_{n-1,\alpha+1}=(-1)^2\frac{n(n-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)}I_{n-2,\alpha+2}=\ldots=(-1)^k\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+k)}I_{n-k,\alpha+k}.$$

Et enfin :

$$I_{n,\alpha}=(-1)^n\frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}I_{0,\alpha+n}=(-1)^n\frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}\int_a^b (b-t)^{n+\alpha}\,dt.$$

Soit :

$$I_{n,\alpha}=(-1)^n\frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)(\alpha+n+1)}(b-a)^{\alpha+n+1}.$$

****

II) Soit $S\in S_n(\mathbb{R})$. S est diagonalisable dans une base orthonormée (pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, donc il existe $P\in O_n(\mathbb{R})$ telle que $S={}^tP\Delta P$ avec $\Delta=diag(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ où les λ_i sont les valeurs propres de S. On a donc $\lambda_m=\min\limits_{\lambda\in Sp(S)}\lambda=\min(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$.

Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, si on pose $Y = PX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on a :

$$ {}^tXSX = {}^tX\,{}^tP\Delta PX = {}^t(PX)\Delta PX = {}^tY\Delta Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_m y_i^2 = \lambda_m \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \lambda_m {}^tYY . $$

Or, ${}^tYY = {}^t(PX)PX = {}^tX\,{}^tPPX = {}^tXX$, donc :

$$ (\min_{\lambda \in Sp(S)} \lambda)\,{}^tXX \leq {}^tXSX . $$

On prouve de la même façon que ${}^tXSX \leq (\max_{\lambda \in Sp(S)} \lambda)\,{}^tXX$ et ainsi, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$:

$$ (\min_{\lambda \in Sp(S)} \lambda)\,{}^tXX \leq {}^tXSX \leq (\max_{\lambda \in Sp(S)} \lambda)\,{}^tXX . $$

****

Soient $A, B \in S_n(I)$ et $t \in [0,1]$. On veut prouver que $C = tA + (1-t)B \in S_n(I)$.

On a déjà $C \in S_n(\mathbb{R})$.

Notons $\lambda_a = \min_{\lambda \in Sp(A)} \lambda$, $\lambda_A = \max_{\lambda \in Sp(A)} \lambda$, $\lambda_b = \min_{\lambda \in Sp(B)} \lambda$ et $\lambda_B = \max_{\lambda \in Sp(B)} \lambda$.

Comme $\lambda_a \in Sp(A)$ et $A \in S_n(I)$ donc $Sp(A) \subset I$, on a $\lambda_a \in I$. De même, $\lambda_A, \lambda_b, \lambda_B \in I$.

Et comme *I* est un intervalle non vide, *I* est convexe donc $t\lambda_a + (1-t)\lambda_b \in I$ et $t\lambda_A + (1-t)\lambda_B \in I$.

On a alors pour tout $X \in \mathbb{R}^n$:

$$ \left.\begin{array}{l} \lambda_a {}^tXX \leq {}^tXAX \leq \lambda_A {}^tXX \\ \lambda_b {}^tXX \leq {}^tXBX \leq \lambda_B {}^tXX \end{array}\right\} \Rightarrow \left(t\lambda_a + (1-t)\lambda_b\right){}^tXX \leq {}^tXCX \leq \left(t\lambda_A + (1-t)\lambda_B\right){}^tXX . $$

Soit $\lambda \in Sp(C)$ et $X \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé tel que $\|X\|^2 = {}^tXX = 1$. On a alors :

$$ {}^tXCX = {}^tX(\lambda X) = \lambda\,{}^tXX = \lambda \Rightarrow t\lambda_a + (1-t)\lambda_b \leq \lambda \leq t\lambda_A + (1-t)\lambda_B . $$

Comme *I* est convexe, on a $[t\lambda_a + (1-t)\lambda_b , t\lambda_A + (1-t)\lambda_B] \subset I$ et donc $\lambda \in I$.

Ainsi, $Sp(C) \subset I$ et $C \in S_n(\mathbb{R})$, donc $C \in S_n(I)$, ce qui prouve que $S_n(I)$ est une partie convexe de $S_n(\mathbb{R})$.

Planche n° 10

I) Montrer que *D* défini par $D(f)(x) = xf'(x)$ est un endomorphisme de l'espace des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Trouver $\ker D$, puis les éléments propres de *D*.

II) Ensemble de définition et calcul de $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt)\, dt$ avec $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

I) Notons $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Si $f \in E$, alors $f' \in E$ et donc $D(f) \in E$. De plus, *D* est linéaire du fait de la linéarité de la dérivation. Donc, $D \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $f \in E$. On a :

$$D(f)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, x f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x)=0.$$

Ainsi, $\ker D$ est l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On note $E_\lambda = \ker\left(D-\lambda id_E\right)$ et $E_0 = \ker D$.

Pour $f \in E$, on a :

$$f \in E_\lambda \quad \Leftrightarrow \quad D(f)=\lambda f \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ x f'(x)=\lambda f(x).$$

Donc, E_λ est l'ensemble des solutions dans E de $x y' - \lambda y = 0$.

Les solutions de cette équation sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$ sont de la forme $x \mapsto k|x|^\lambda$ avec $k \in \mathbb{R}$. La seule possibilité d'obtenir que solution de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ entier est d'avoir $\lambda \in \mathbb{N}^*$.

Finalement, les valeurs propres de D sont les entiers naturels (y compris 0) et le sous-espace propre associé à $n \in \mathbb{N}$ est $\operatorname{Vect}\left(x \mapsto x^n\right)$.

****

II) Quitte à intervertir a et b (en changeant le signe de $F(x)$), supposons $0 < a < b$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $t \mapsto \dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\cos(xt)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

- $\dfrac{e^{-at}-1}{t}\cos(xt) \underset{0}{\sim} -a$ donc $\displaystyle\int_0 \frac{e^{-at}-1}{t}\cos(xt)\,dt$ converge. De même pour $\displaystyle\int_0 \frac{e^{-bt}-1}{t}\cos(xt)\,dt$, donc $\displaystyle\int_0 \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\cos(xt)\,dt$ converge.
- $\left|\dfrac{e^{-at}}{t}\cos(xt)\right| = \underset{+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t}\cos(xt)\,dt$ converge. De même pour $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{e^{-bt}}{t}\cos(xt)\,dt$, donc $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\cos(xt)\,dt$ converge.

Finalement, $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\cos(xt)\,dt$ converge pour tout réel x, donc F est définie sur $\mathbb{R}$.

****

Soit $f(x,t)=\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\cos(xt)$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ et :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$;
- pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\,(e^{-at}-e^{-bt})\sin(xt)$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$;

- pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, on a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leq e^{-at}$ et $t\mapsto e^{-at}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Alors, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec :

$$F'(x)=-\int_0^{+\infty}(e^{-at}-e^{-bt})\sin(xt)\,dt=\mathrm{Im}\left[\int_0^{+\infty}(e^{-(b-ix)t}-e^{-(a-ix)t})\,dt\right]$$

$$=\mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{-(b-ix)t}}{-(b-ix)}-\frac{e^{-(a-ix)t}}{-(a-ix)}\right]_0^{+\infty}\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{1}{b-ix}-\frac{1}{a-ix}\right)=\frac{x}{x^2+b^2}-\frac{x}{x^2+a^2}$$

Donc :

$$F(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+b^2}{x^2+a^2}\right)+K$$

avec $K\in\mathbb{R}$. On a $F(0)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt=\ln\left(\frac{b}{a}\right)+K$.

Pour tout réel $\varepsilon>0$, $\displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-ct}}{t}dt\underset{u=ct}{=}\int_{c\varepsilon}^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}du$ pour tout $c>0$ et :

$$\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt=\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-at}}{t}dt-\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-bt}}{t}dt=\int_{a\varepsilon}^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}du-\int_{b\varepsilon}^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}du=\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{e^{-u}}{u}du\,.$$

Or, pour tout $u\in\mathbb{R}_+^*$, on a $1-u\leq e^{-u}\leq 1$, donc :

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{du}{u}-\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}du\varepsilon(b-a)\leq\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{e^{-u}}{u}du\leq\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{du}{u}\,.$$

Avec $\displaystyle\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{du}{u}=[\ln u]_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}=\ln\left(\frac{b}{a}\right)$, on obtient :

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right)-\varepsilon(b-a)\leq\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt\leq\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient $F(0)=\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$, donc $K=0$ et ainsi :

$$F(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+b^2}{x^2+a^2}\right).$$

Planche n° 11

I) Soit $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes, suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p\in[0,1]$. On note U le vecteur de coordonnées $X_1,\dots,X_n$ et $M=U\,{}^tU$.

Donner les lois de probabilité de $rg(M)$ et $Tr(M)$.

Donner la probabilité que M soit une matrice de projecteur.

On note V le vecteur dont toutes les coordonnées valent 1 et $S={}^tVMV$. Donner l'espérance et la variance de S.

II) Soient E un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe p endomorphismes non nuls $v_1, \dots, v_p$ et p réels distincts $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^n = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^n v_i$.

Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(u) = \sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i) v_i$ et que u est diagonalisable.

Montrer qu'il existe une base $\left(L_1, \dots, L_p\right)$ de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ telle que pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$:

$$L_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}.$$

Montrer que $Sp(u) = \left\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\right\}$.

I) Pour tout sauf la dernière question, voir la planche 7.

On a $M = \left(X_i X_j\right)_{1 \le i, j \le n}$, donc $S = {}^t VMV = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i \sum_{j=1}^{n} X_j \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \right)^2 = \left(Tr(M)\right)^2$.

On a vu (planche 7) que $Tr(M)$ suit la loi binomiale de paramètres n et p, donc :

$$E(S) = E\left(\left[Tr(M)\right]^2\right) = V\left(Tr(M)\right) + E\left(Tr(M)\right)^2 = np(1-p) + (np)^2 = np\left(1 + (n-1)p\right).$$

Et, avec le théorème du transfert :

$$\begin{aligned}
E(S^2) &= E\left(\left[Tr(M)\right]^4\right) = \sum_{k=0}^{n} k^4 P\left(Tr(M) = k\right) = \sum_{k=1}^{n} k^4 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} k^3 (k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \sum_{k=2}^{n} k^2 (k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= n(n-1) \left[\sum_{k=2}^{n} k^2 \binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k} + \sum_{k=2}^{n} k \binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k} \right] + E(S) \\
&= n(n-1) p^2 \sum_{k=0}^{n-2} \left[(k+2)^2 + (k+2) \right] \binom{n-2}{k} p^k (1-p)^{n-k} + E(S) \\
&= n(n-1) p^2 \sum_{k=0}^{n-2} (k^2 + 5k + 6) \binom{n-2}{k} p^k (1-p)^{n-k} + E(S) \\
&= n(n-1) p^2 \left[(n-2) p \left(1 + (n-3)p\right) + 5(n-2)p + 6 \right] + np\left(1 + (n-1)p\right) \\
&= np \left[(n-1)(n-2)(n-3)p^3 + 6(n-1)(n-2)p^2 + 7(n-1)p + 1 \right]
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
V(S) &= E(S^2) - E(S)^2 \\
&= np \left[(n-1)(n-2)(n-3)p^3 + 6(n-1)(n-2)p^2 + 7(n-1)p + 1 \right] - \left[np\left(1 + (n-1)p\right) \right]^2 \\
&= np \left[-2(n-1)(2n-3)p^3 + 4(n-1)(n-3)p^2 + (6n-7)p + 1 \right]
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$E(S) = np\left(1 + (n-1)p\right) \quad \text{et} \quad V(S) = np\left[-2(n-1)(2n-3)p^3 + 4(n-1)(n-3)p^2 + (6n-7)p + 1 \right].$$

****

II) Soit $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. On a :

$$P(u)=\sum_{k=0}^{n} a_k u^k=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{p} a_k \lambda_i^k v_i=\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_i^k\right) v_i=\sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i) v_i .$$

****

Si pose $P=\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$, on a $P(\lambda_i)=0$ pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, donc $P(u)=0$.

Ainsi, *P* est annulateur de *u* et est scindé à racines simples (car les λ_i sont distincts), donc *u* est diagonalisable.

****

Les L_i sont les polynômes de Lagrange : $L_i=\prod_{j=1, j\neq i}^{p}\frac{X-\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j}$.

****

Comme $P(u)=0$ avec $P=\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$, on a $Sp(u)\subset\{\lambda_1,\ldots,\lambda_p\}$.

Supposons qu'il existe $k\in[\![1,p]\!]$ tel que $\lambda_k\notin Sp(u)$.

Alors, $Q=\prod_{i=1,i\neq k}^{n}(X-\lambda_i)$ est annulateur de *u*, soit $Q(u)=0$. Or, on a $Q(u)=\sum_{i=1}^{p} Q(\lambda_i)v_i=Q(\lambda_k)v_k$, donc $Q(\lambda_k)v_k=0$ et comme $v_k\neq 0$, on a $Q(\lambda_k)=0$, qui est absurde.

Ainsi, $\lambda_k\in Sp(u)$ pour tout $k\in[\![1,p]\!]$ et donc, $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_p\}\subset Sp(u)$.

Finalement, on a bien :

$$Sp(u)=\{\lambda_1,\ldots,\lambda_p\}.$$

Planche n° 12

I) Domaine de définition, continuité et dérivabilité de $f: x\mapsto \sum_{n\geq 1}\frac{x}{n(1+nx^2)}$.

Donner un équivalent de *f* en + ∞.

II) Deux variables aléatoires indépendantes *X* et *Y* suivent une loi géométrique de paramètres respectifs *p* et *q*.

Montrer que $Z=\min(X,Y)$ et $T=\max(X,Y)$ sont deux variables aléatoires.

Donner leur fonction génératrice et, si elle existe, leur espérance.

I) On a $f(0)=0$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $\frac{x}{n(1+nx^2)}\sim\frac{1}{n^2x}$ donc la série $\sum\frac{x}{n(1+nx^2)}$ converge.

Ainsi, *f* est définie sur $\mathbb{R}$. Remarquons que *f* est impaire.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n: x\mapsto\frac{x}{n(1+nx^2)}$ est impaire et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, avec $f_n'(x)=\frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}$.

Avec $f_n(0)=\lim\limits_{+\infty} f_n=0$, on en déduit que sur $\mathbb{R}_+$, f_n est positive et admet $f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)=\dfrac{1}{2n\sqrt{n}}$ pour maximum. Par imparité, on obtient $|f_n(x)|\leq\dfrac{1}{2n\sqrt{n}}$ sur $\mathbb{R}$, et comme $\sum\dfrac{1}{2n\sqrt{n}}$ converge, $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc *f* est continue sur $\mathbb{R}$.

Soient $a\in\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x\in[a,+\infty[$, on a $|f_n'(x)|\leq\dfrac{1+nx^2}{n(nx^2)^2}=\dfrac{1}{n^3x^4}+\dfrac{1}{n^2x^2}\leq\dfrac{1}{n^3a^4}+\dfrac{1}{n^2a^2}$ et la série $\sum\left(\dfrac{1}{n^3a^4}+\dfrac{1}{n^2a^2}\right)$ converge, donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$ et ainsi, *f* est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$, *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et comme *f* est impaire, elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

On a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(1+nx^2)}\geq\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(1+nx^2)}$ pour tout $N\in\mathbb{N}^*$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ tel que $|x|\leq 1$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $1\leq n\leq N(x)$ avec $N(x)=E\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, on a :

$$\frac{1}{n(1+nx^2)}\geq\frac{1}{2n}\quad\Rightarrow\quad\frac{f(x)-f(0)}{x}\geq\sum_{n=1}^{N(x)}\frac{1}{n(1+nx^2)}\geq\sum_{n=1}^{N(x)}\frac{1}{2n}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to 0}N(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\displaystyle\sum_{n=1}^{N(x)}\frac{1}{2n}=+\infty$, et par comparaison, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=+\infty$.

Ainsi, *f* est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et non dérivable en 0.

****

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{n(1+nx^2)}=\dfrac{1}{n^2}$.

Pour tous $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}_+^*$, $0<\dfrac{x^2}{n(1+nx^2)}\leq\dfrac{x^2}{n(nx^2)}=\dfrac{1}{n^2}$ et $\sum\dfrac{1}{n^2}$ converge, donc $\sum\dfrac{x^2}{n(1+nx^2)}$ vérifie l'hypothèse de domination sur $\mathbb{R}_+^*$, donc converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^2}{n(1+nx^2)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{n(1+nx^2)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, et donc :

$$f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\pi^2}{6x}.$$

****

II) *X* est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega,\mathcal{A})$ et à valeurs dans $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$, c'est-à-dire une application de Ω dans $\mathbb{N}^*$ telle que l'image réciproque de tout élément de $\mathbb{N}^*$ appartient à $\mathcal{A}$.

Il en va de même pour *Y*.

Alors, $Z=\min(X,Y)$ est une application de Ω dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$Z(\omega)=\min\big(X(\omega),Y(\omega)\big)=X(\omega)\text{ ou }Y(\omega).$$

Donc :

$$\begin{aligned}Z^{-1}(\{n\}) &= \{\omega\in\Omega \setminus Z(\omega)=\min(X(\omega),Y(\omega))=n\}\\ &= \{\omega\in\Omega\setminus X(\omega)=n, Y(\omega)\geq n\}\cup\{\omega\in\Omega\setminus X(\omega)\geq n, Y(\omega)=n\}\\ &= \left(\bigcup_{k\geq n}\left[\{\omega\in\Omega\setminus X(\omega)=n\}\cap\{\omega\in\Omega\setminus Y(\omega)=k\}\right]\right)\\ &\qquad\cup\left(\bigcup_{k\geq n}\left[\{\omega\in\Omega\setminus X(\omega)=k\}\cap\{\omega\in\Omega\setminus Y(\omega)=n\}\right]\right)\\ &= \left(\bigcup_{k\geq n}\left[X^{-1}(\{n\})\cap Y^{-1}(\{k\})\right]\right)\cup\left(\bigcup_{k\geq n}\left[X^{-1}(\{k\})\cap Y^{-1}(\{n\})\right]\right)\end{aligned}.$$

Comme $X^{-1}(\{p\})\in\mathcal{A}$, $Y^{-1}(\{p\})\in\mathcal{A}$ pour tout $p\in\mathbb{N}^*$ et toute intersection ou union finie ou dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$ est encore dans $\mathcal{A}$, on a $Z^{-1}(\{n\})\in\mathcal{A}$ et ainsi, Z est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega,\mathcal{A})$.

Il en va de même pour T.

****

Pour $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}P(Z=n) &= P(\min(X,Y)=n)\\ &= P(X=n, Y>n)+P(X>n, Y=n)+P(X=Y=n)\\ &= P(X=n)P(Y>n)+P(X>n)P(Y=n)+P(X=n)P(Y=n)\\ &= (1-p)^{n-1}p\sum_{k=n+1}^{+\infty}(1-q)^{k-1}q+(1-q)^{n-1}q\sum_{k=n+1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}p+(1-p)^{n-1}p(1-q)^{n-1}q\\ &= (1-p)^{n-1}p(1-q)^n+(1-q)^{n-1}q(1-p)^n+(1-p)^{n-1}(1-q)^{n-1}pq\\ &= (1-p)^{n-1}(1-q)^{n-1}(p+q-pq)\\ &= [(1-p)(1-q)]^{n-1}[1-(1-p)(1-q)]\end{aligned}$$

Donc, Z suit une loi géométrique de paramètre $r=1-(1-p)(1-q)$. On a donc :

$$G_Z(t)=\frac{rt}{1-(1-r)t}\quad\text{et}\quad E(Z)=\frac{1}{r}.$$

On montre de même que :

$$\begin{aligned}P(T=n) &= P(X=n)P(Y<n)+P(X<n)P(Y=n)+P(X=n)P(Y=n)\\ &= P(X=n)[1-P(Y=n)-P(Y>n)]+[1-P(X=n)-P(X>n)]P(Y=n)+P(X=n)P(Y=n)\\ &= P(X=n)+P(Y=n)-P(Z=n)=(1-p)^{n-1}p+(1-q)^{n-1}q-(1-r)^{n-1}r\end{aligned}$$

Donc :

$$G_T(t)=\frac{pt}{1-(1-p)t}+\frac{qt}{1-(1-q)t}-\frac{rt}{1-(1-r)t}$$

Et $Z+T=X+Y$, donc $E(T)=E(X)+E(Y)-E(Z)$, soit :

$$E(T)=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{r}.$$