Corrigés de la série 2 - Mines-Ponts

Planche n° 5

I) Justifier l'existence de $\int_0^1 e^{-t}\ln t\,dt$, puis en donner une valeur approchée sous forme de nombre rationnel à 10^{-3} près (on pourra faire apparaître un développement en série entière usuel).

II) Soit $n\in\mathbb{N}$ et $(a_k)_{0\le k\le n}\in\mathbb{K}^{n+1}$. Montrer que :

$$(a_0\neq 0)\quad\Leftrightarrow\quad\left(\forall\, Q\in\mathbb{K}[X],\exists!\,P\in\mathbb{K}[X],\sum_{k=0}^{n}a_kP^{(k)}=Q\right).$$

I) $\int_0^1 e^{-t}\ln t\,dt$ est impropre en 0, mais $\left|e^{-t}\ln t\right|\underset{0}{\sim}|\ln t|$ et $\int_0|\ln t|\,dt$ converge donc $\int_0^1 e^{-t}\ln t\,dt$ converge. On a $\int_0^1 e^{-t}\ln t\,dt=\int_0^1\left(\sum_{n\ge 0}\frac{(-t)^n}{n!}\ln t\right)dt$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $t\mapsto\frac{(-t)^n}{n!}\ln t$ est définie, continue et intégrable sur $I=]0,1]$, avec :

$$\int_0^1\left|\frac{(-t)^n}{n!}\ln t\right|dt=-\int_0^1\frac{t^n}{n!}\ln t\,dt=\frac{1}{(n+1)^2n!}.$$

On a $\frac{1}{(n+1)^2n!}=o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $\sum\int_0^1\left|\frac{(-t)^n}{n!}\ln t\right|dt$ converge. Alors :

$$\int_0^1 e^{-t}\ln t\,dt=\sum_{n\ge 0}\int_0^1\frac{(-t)^n}{n!}\ln t\,dt=\sum_{n\ge 0}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2n!}.$$

Si $u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2n!}$, la série $\sum u_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\left|\int_0^1 e^{-t}\ln t\,dt-\sum_{k=0}^{n}u_k\right|\le|u_{n+1}|.$$

Et $|u_5|=\frac{1}{4320}<10^{-3}$, donc à 10^{-3} près :

$$\int_0^1 e^{-t}\ln t\,dt\approx\sum_{k=0}^{4}u_k=-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{18}+\frac{1}{96}-\frac{1}{600}=-\frac{5737}{7200}.$$

****

II) On a $n\in\mathbb{N}$ et $(a_k)_{0\le k\le n}\in\mathbb{K}^{n+1}$. On veut :

$$(a_0\neq 0)\quad\Leftrightarrow\quad\left(\forall\, Q\in\mathbb{K}[X],\exists!\,P\in\mathbb{K}[X],\sum_{k=0}^{n}a_kP^{(k)}=Q\right)$$

($\Rightarrow$) On suppose que $a_0 \neq 0$. Soit $Q = \sum_{k=0}^{p} b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ avec $b_p \neq 0$ (donc $\deg Q = p$).

Analyse : Si *P* existe, on a $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k P^{(k)} = a_0 P + \sum_{k=1}^{n} a_k P^{(k)}$ avec $\deg\left(\sum_{k=1}^{n} a_k P^{(k)}\right) \leq \deg P - 1$.

Comme $a_0 \neq 0$, $\deg\left(\sum_{k=0}^{n} a_k P^{(k)}\right) = \deg P = \deg Q = p$. Posons alors $P = \sum_{i=0}^{p} c_i X^i$ avec $c_p \neq 0$.

Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $P^{(k)} = \sum_{i=k}^{p} c_i \dfrac{i!}{(i-k)!} X^{i-k}$, donc :

$$Q = \sum_{k=0}^{n} a_k P^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k}^{p} a_k c_i \frac{i!}{(i-k)!} X^{i-k} = \sum_{j=0}^{p} b_j X^j .$$

En identifiant les coefficients, on obtient un système échelonné en les c_i dont tous les pivots (coefficients diagonaux de la matrice triangulaire associée au système) valent $a_0 \neq 0$. Le système admet donc une unique solution, ce qui donne un unique polynôme *P*.

Ainsi, si *P* existe, il est unique.

Synthèse : Réciproquement, le polynôme *P* dont les coefficients sont les composantes du système mentionné ci-dessus, est vérifie $\sum_{k=0}^{n} a_k P^{(k)} = Q$ (il est construit de cette façon).

($\Leftarrow$) On suppose : $\forall\, Q \in \mathbb{K}[X], \exists!\, P \in \mathbb{K}[X], \sum_{k=0}^{n} a_k P^{(k)} = Q$.

Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\sum_{k=0}^{n} a_k P^{(k)} = Q$. Si $a_0 = 0$, alors $\sum_{k=1}^{n} a_k P^{(k)} = Q$ et pour tout $c \in \mathbb{K}$, $\sum_{k=1}^{n} a_k P_c^{(k)} = Q$ avec $P_c = P + c$. Donc le polynôme *P* n'est pas unique, ce qui est absurde.

Ainsi, $a_0 \neq 0$.

Planche n° 6

I) Existence et valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\text{th}(3x) - \text{th}\, x}{x}\, dx$.

II) Montrer que si $z_0, z_1, \dots, z_n$ sont des complexes deux à deux distincts, la famille des $(X - z_k)^n$ est libre dans $\mathbb{C}[X]$.

I) On a $\text{th}(3x) - \text{th}\, x = 3x - x + \underset{0}{o}(x) = 2x + \underset{0}{o}(x)$, donc $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\text{th}(3x) - \text{th}\, x}{x} = 2$ et $x \mapsto \dfrac{\text{th}(3x) - \text{th}\, x}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 : $\displaystyle\int_0 \frac{\text{th}(3x) - \text{th}\, x}{x}\, dx$ converge.

Par ailleurs :

$$\text{th}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = (1 - e^{-2x})\left[1 - e^{-2x} + \underset{+\infty}{o}(e^{-2x})\right] = 1 - 2e^{-2x} + \underset{+\infty}{o}(e^{-2x}) .$$

Donc :

$$\frac{\operatorname{th}(3x)-\operatorname{th}x}{x}=\frac{1}{x}\left(\left[1-2e^{-6x}+\underset{+\infty}{o}(e^{-6x})\right]-\left[1-2e^{-2x}+\underset{+\infty}{o}(e^{-2x})\right]\right)=\frac{2e^{-2x}+\underset{+\infty}{o}(e^{-2x})}{x}=\underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Ainsi, $\int^{+\infty}\frac{\operatorname{th}(3x)-\operatorname{th}x}{x}\,dx$ converge.

Donc, $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{th}(3x)-\operatorname{th}x}{x}\,dx$ existe.

On montre comme plus haut que pour tout $\varepsilon>0$, $\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\operatorname{th}x-1}{x}\,dx$ converge et avec $x=3u$, on a :

$$\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\operatorname{th}x-1}{x}\,dx=\int_{\varepsilon/3}^{+\infty}\frac{\operatorname{th}(3u)-1}{u}\,du.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{th}(3x)-\operatorname{th}x}{x}\,dx&=\int_0^{\varepsilon/3}\frac{\operatorname{th}(3x)-\operatorname{th}x}{x}\,dx+\int_{\varepsilon/3}^{+\infty}\frac{\operatorname{th}(3x)-1}{x}\,dx-\int_{\varepsilon/3}^{+\infty}\frac{\operatorname{th}x-1}{x}\,dx\\&=\int_0^{\varepsilon/3}\frac{\operatorname{th}(3x)-\operatorname{th}x}{x}\,dx+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\operatorname{th}x-1}{x}\,dx-\int_{\varepsilon/3}^{+\infty}\frac{\operatorname{th}x-1}{x}\,dx\\&=\int_0^{\varepsilon/3}\frac{\operatorname{th}(3x)-\operatorname{th}x}{x}\,dx-\int_{\varepsilon/3}^{\varepsilon}\frac{\operatorname{th}x-1}{x}\,dx\\&=\int_0^{\varepsilon/3}\frac{\operatorname{th}(3x)-\operatorname{th}x}{x}\,dx-\int_{\varepsilon/3}^{\varepsilon}\frac{\operatorname{th}x}{x}\,dx+\int_{\varepsilon/3}^{\varepsilon}\frac{dx}{x}\\&=\int_0^{\varepsilon/3}\frac{\operatorname{th}(3x)-\operatorname{th}x}{x}\,dx-\int_{\varepsilon/3}^{\varepsilon}\frac{\operatorname{th}x}{x}\,dx+\ln 3\end{aligned}$$

Comme $\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{th}x}{x}=1$ et $x\mapsto\frac{\operatorname{th}x}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 et $\int_0\frac{\operatorname{th}x}{x}\,dx$ converge.

Alors :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{th}(3x)-\operatorname{th}x}{x}\,dx=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\int_0^{\varepsilon/3}\frac{\operatorname{th}(3x)-\operatorname{th}x}{x}\,dx-\int_{\varepsilon/3}^{\varepsilon}\frac{\operatorname{th}x}{x}\,dx+\ln 3\right]=\ln 3.$$

****

II) Soit $(a_0,a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\sum_{k=0}^{n}a_k(X-z_k)^n=0$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n}a_k(X-z_k)^n=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}a_k\binom{n}{i}(-z_k)^iX^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k(-z_k)^i\right)\binom{n}{i}X^{n-i}.$$

Donc $\sum_{k=0}^{n}a_k(X-z_k)^n=0$ équivaut à $\sum_{k=0}^{n}a_k(-z_k)^i=0$ pour tout $i\in[\![0,n]\!]$, soit :

$$V\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\text{ avec }V=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\-z_0&-z_1&\cdots&-z_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\(-z_0)^n&(-z_1)^n&\cdots&(-z_n)^n\end{pmatrix}.$$

Les z_k étant distincts deux à deux, le déterminant de Vandermonde $\det V$ n'est pas nul, donc V est inversible, ce qui veut dire que la seule solution du système est le vecteur nul, soit $a_0 = \ldots = a_n = 0$ et ainsi, la famille des $(X - z_k)^n$ est libre dans $\mathbb{C}[X]$.

Planche n° 7 (cf planches 1 et 11)

I) On note D_n le nombre de permutations sans point fixe de $[\![1,n]\!]$ avec par convention $D_0 = 1$.

Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k = n!$.

Montrer que $\sum_{n\geq 0} \frac{D_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1.

On note S sa somme sur $]-1,1[$. Calculer $T(x) = e^x S(x)$ et en déduire une expression de D_n.

II) On donne $n \geq 2$ variables aléatoires réelles discrètes et indépendantes $X_1, \ldots, X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ avec $p \in]0,1[$. On pose $U = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et $M = U\,{}^tU \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$.

Donner les lois de $rg(M)$ et $Tr(M)$. Quelle est la probabilité que M soit une matrice de projection ?

I) Remarquons déjà que le nombre de permutations sans point fixe de n'importe quel ensemble de cardinal n est D_n.

Le nombre total de permutations de $[\![1,n]\!]$ est $n!$, mais c'est aussi $\sum_{k=0}^{n} d_k$ où d_k est le nombre de permutions de $[\![1,n]\!]$ laissant $n-k$ points fixes. Pour construire une telle permutation, il y a $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ possibilités pour choisir $n-k$ points fixes, et D_k permutations faisant bouger les k éléments restants, donc $d_k = \binom{n}{k} D_k$ et ainsi, $\sum_{k=0}^{n} d_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k = n!$.

****

On montre par récurrence (comme dans la planche 1) que $\frac{D_n}{n!} \leq 1$, donc que $\sum_{n\geq 0} \frac{D_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1.

****

Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $S(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{D_n}{n!} x^n$ et $e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$, et les deux séries convergent absolument, donc le produit de Cauchy $\sum \left[\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{D_k}{k!} x^k \right) \left(\frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \right) \right]$ converge vers $T(x) = e^x S(x)$, soit :

$$T(x) = e^x S(x) = \sum_{n\geq 0} \left[\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{D_k}{k!} x^k \right) \left(\frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \right) \right] = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k x^n = \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

On a donc pour tout $x \in]-1,1[$, $S(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$ et à nouveau avec un produit de Cauchy :

$$S(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}=\sum_{n\geq 0}\left[\sum_{k=0}^{n} x^k\,\frac{(-x)^{n-k}}{(n-k)!}\right]=\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\right)x^n .$$

Comme $\sum_{n\geq 0}\dfrac{D_n}{n!}x^n$, on obtient par unicité du développement en série entière, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$D_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}n!}{(n-k)!}.$$

****

II) On a $M=\left(X_iX_j\right)_{1\leq i,j\leq n}$. Remarquons que la $j^{\text{ième}}$ colonne de M est X_jU, donc le rang de M est au plus 1 et :

$$rg(M)=0 \quad\Leftrightarrow\quad M=0_n \quad\Leftrightarrow\quad \forall\, j\in[\![1,n]\!],\, X_j=0.$$

Or, $P\left(X_j=0\right)=1-p$ et les X_j sont indépendantes, donc $P\left(X_1=...=X_n=0\right)=(1-p)^n$ et ainsi, si $R=rg(M)$, on a $R(\Omega)=\{0,1\}$, avec $P\left(R=0\right)=(1-p)^n$, donc :

$$rg(M)\hookrightarrow \mathscr{B}\left(1-(1-p)^n\right).$$

****

On a $Tr(M)=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ et comme pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $X_i(\Omega)=\{0,1\}$, on a $X_i^2=X_i$, donc :

$$Tr(M)=\sum_{i=1}^{n}X_i .$$

Alors :

$$Tr(M)\hookrightarrow \mathscr{B}\left(n,p\right).$$

****

Si M est une matrice de projection, on a $Tr(M)=rg(M)$, donc $Tr(M)=0$ ou 1, ce qui veut dire que soit tous les X_i sont nuls, soit tous les X_i sont nuls sauf un.

Réciproquement, si $X_i=1$ et $X_j=0$ pour tout $j\neq i$, on a $M=E_{i,i}$ et $M^2=E_{i,i}^2=E_{i,i}=M$, donc M est une matrice de projection.

Ainsi, M est une matrice de projection si et seulement si $Tr(M)\leq 1$, donc la probabilité que M soit la matrice d'une projection est :

$$P\left(Tr(M)\leq 1\right)=P\left(Tr(M)=0\right)+P\left(Tr(M)=1\right)=(1-p)^n+np(1-p)^{n-1}=\left(1+(n-1)p\right)(1-p)^{n-1}.$$

Planche n° 8

I) Montrer que $f:x\mapsto\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$ peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

Montrer qu'elle est alors de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, mais pas sur $\mathbb{R}_+$.

II) Montrer que si deux matrices A et B, carrées, complexes de taille 2 commutent, alors A est un polynôme en B ou B est un polynôme en A. Cela reste-t-il vrai pour des matrices de taille 3 ? Pour des matrices à coefficients réels ?

I) $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ est si x appartient à $]0,1[$, x^2 aussi, si x appartient à $]1,+\infty[$, x^2 aussi. Ainsi, f est définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. Pour $0<x<1$:

$$x^2 \le t \le x \quad \Rightarrow \quad \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln x^2} \le f(x) \le \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln x} \quad \Rightarrow \quad \frac{x(x-1)}{2\ln x} \le f(x) \le \frac{x(x-1)}{\ln x}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

$$x^2 \le t \le x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x}\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \le \int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln t} \le \frac{1}{x^2}\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \quad \Rightarrow \quad x^2 \ln 2 \le f(x) \le x \ln 2$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \ln 2$$

Pour $x>1$:

$$1 < x \le t \le x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2}\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \le \int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln t} \le \frac{1}{x}\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \quad \Rightarrow \quad x \ln 2 \le f(x) \le x^2 \ln 2$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \ln 2$$

Donc $f(0)=0$ et $f(1)=\ln 2$.

f est dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$.

f est de classe C^∞ sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to 1} f'(x) = 1$, donc f est C^1 en 1.

De plus, au voisinage de 1, $\dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{\ln x}{x-1} = \displaystyle\sum_{n\ge 0} \frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^n$ donc C^∞ en 1 et f' aussi.

On a $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$ donc f est C^1 en 0, et $f''(x) = \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{(\ln x)^2} + \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f''(x) = +\infty$ et f n'est pas C^2 en 0.

****

II) A est trigonalisable, donc il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A' = P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure. Alors, A' et $B' = P^{-1}BP$ commutent et si A' est un polynôme en B' ou vice-versa, il en va de même pour A et B. On peut donc supposer A triangulaire supérieure, soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

Remarquons que si $\chi_A = X^2 - pX - q$, on a $A^2 = pA + qI_2$ d'après le théorème de Cayley Hamilton.

Alors, si $B = P(A)$ avec $P \in \mathbb{C}[X]$, il existe $(k,k') \in \mathbb{C}^2$ tel que $B = kA + k'I_2$.

Si $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, on a :

$$BA = AB \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a\alpha & b\alpha + c\beta \\ a\gamma & b\gamma + c\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\gamma & c\delta \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b\delta = b\alpha + (c-a)\beta \\ (c-a)\gamma = 0 \\ b\gamma = 0 \end{cases}$$

- Si $a=c$ et $b=0$, alors $A=aI_2=aB^0$ est un polynôme en *B*.
- Si $a=c$ et $b\neq 0$, alors $\frac{1}{b}(A-aI_2)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ et $\begin{cases}\delta=\alpha\\\gamma=0\end{cases}$, donc $B=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\0&\alpha\end{pmatrix}=\frac{b\alpha-a\beta}{b}I_2+\frac{\beta}{b}A$ est un polynôme en *A*.
- Si $a\neq c$, alors $\begin{cases}\gamma=0\\\beta=b\dfrac{\delta-\alpha}{c-a}\end{cases}$, donc $B=\frac{\alpha c-\delta a}{c-a}I_2+\frac{\delta-\alpha}{c-a}A$.

Ainsi, soit *A* est un polynôme en *B*, soit *B* est un polynôme en *A*.

****

Soit $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. On a $AB=BA=B$.

Comme *A* est diagonale, $P(A)$ est diagonale pour tout $P\in\mathbb{C}[X]$, donc ne peut être égal à *B*.

On a $B^2=0_3$, donc pour tout $P\in\mathbb{C}[X]$, $P(B)=aI_2+bB=\begin{pmatrix}a&0&b\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix}$, qui ne peut en aucun cas être égal à *A*.

Ainsi, *A* n'est pas un polynôme en *B*, et *B* n'est pas un polynôme en *A*. La propriété ne reste pas vraie pour des matrices de taille 3.

****

Soient *A* et *B* deux matrices carrées, réelles, de taille 2 et qui commutent.

Quitte à intervertir *A* et *B*, et d'après ce qui précède, il existe deux complexes *a* et *b* tels que $B=aI_2+bA$. On a alors :

$$B=\overline{B}=\overline{aI_2+bA}=\overline{a}I_2+\overline{b}A.$$

Donc :

$$B=\frac{1}{2}\left(aI_2+bA+\overline{a}I_2+\overline{b}A\right)=\frac{a+\overline{a}}{2}I_2+\frac{b+\overline{b}}{2}A=P(A).$$

Comme $\frac{a+\overline{a}}{2}$ et $\frac{b+\overline{b}}{2}$ sont réels, on a $B=P(A)$ avec $P\in\mathbb{R}[X]$ et ainsi, la propriété reste vraie pour des matrices à coefficients réels.