Corrigés de la série 5 - Centrale-Supélec

Planche n° 31

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possédant p valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, avec $2 \leq p \leq n$. On suppose que pour tout $i \in [\![2, p]\!]$, $|\lambda_i| < |\lambda_1|$ (*).

1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $Tr(A^k) \neq 0$, on note $t_k = \dfrac{Tr(A^{k+1})}{Tr(A^k)}$.

   Montrer que la suite (t_k) est définie à partir d'un certain rang, qu'elle converge et déterminer sa limite.

2) Justifier que si l'hypothèse (*) n'est pas vérifiée, le résultat précédent peut être faux.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a. Montrer que A et B sont semblables.

   b. Déterminer la limite de $\dfrac{1}{k}A^k$ quand $k \to +\infty$.

1) Notons, pour tout $i \in [\![2, p]\!]$, n_i la multiplicité de λ_i.

La matrice A est semblable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) à une matrice triangulaire supérieure T dont les coefficients diagonaux sont les λ_i, apparaissant n_i fois sur la diagonale. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k est semblable à T^k, qui est une matrice triangulaire supérieur dont les coefficients diagonaux sont les λ_i^k, apparaissant n_i fois sur la diagonale. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$Tr(A^k) = Tr(T^k) = \sum_{i=1}^{p} n_i \lambda_i^k .$$

Comme pour tout $i \in [\![2, p]\!]$, $|\lambda_i| < |\lambda_1|$, ceci implique que $\lambda_1 \neq 0$ et, pour tout $i \in [\![2, p]\!]$, $\left|\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1$, donc $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k = 0$. Alors, on peut écrire pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Tr(A^k) = \lambda_1^k \left[n_1 + \sum_{i=2}^{p} n_i \left(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \right]$ et :

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{Tr(A^k)}{\lambda_1^k} = n_1 .$$

Ainsi, $Tr(A^k) \underset{k \to +\infty}{\sim} n_1 \lambda_1^k$ et comme $n_1 \lambda_1^k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a bien à partir d'un certain rang , $Tr(A^k) \neq 0$ et ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (t_k) \text{ est bien définie à partir d'un certain rang.}}$$

De plus, comme $\lambda_1 \neq 0$, on peut écrire $t_k = \dfrac{Tr(A^{k+1})}{Tr(A^k)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{n_1\lambda_1^{k+1}}{n_1\lambda_1^k} = \lambda_1$ et donc :

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} t_k = \lambda_1}$$

2) Si on prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, on a $Sp(A) = \{-1;1\}$, avec $|-1| = |1| = 1$, donc l'hypothèse (*) n'est pas vérifiée et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}$, donc $Tr(A^k) = 1 + (-1)^k = 0$ pour tout entier k impair. Ainsi :

$$\boxed{\text{Si l'hypothèse (*) n'est pas vérifiée, le résultat de la question 1 peut être faux.}}$$

3) a. On a $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ et $B - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors $rg(A - I_3) = 1$ (car les trois colonnes sont proportionnelles et non nulles) et en notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A - I_3$, on a $-u(e_1) = u(e_2) = 2u(e_3)$, donc $\ker(A - I_3) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2, e_2 - 2e_3)$ et $u(e_3) = e_2 - 2e_3$. La famille $(e_1 + e_2, e_2 - 2e_3, e_3)$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$ (car), donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$ et on a :

$$M_{(e_1+e_2, e_2-2e_3, e_3)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B - I_3\,.$$

Donc, $A - I_3$ et $B - I_3$ sont semblables, ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont semblables.}}$$

b. Posons $N = B - I_3$.
On a $N^2 = 0_3$ et comme N et I_3 commutent, on peut écrire pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$B^k = (I_3 + N)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} N^i = I_3 + kN\,.$$

Alors, comme $A = PBP^{-1}$ avec $P \in GL_3(\mathbb{R})$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{k}A^k &= \frac{1}{k}PB^kP^{-1} = \frac{1}{k}P(I_3 + kN)P^{-1} = \frac{1}{k}I_3 + PNP^{-1} \\ &= \frac{1}{k}I_3 + P(B - I_3)P^{-1} = \frac{1}{k}I_3 + PBP^{-1} - I_3 = \frac{1}{k}I_3 + A - I_3\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}A^k{}_k = A - I_3}$$

Planche n° 32

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci définie par $F_0=0$, $F_1=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$.

On note β la racine négative de X^2-X-1 et $f:\left]-1,1\right[\to\mathbb{R}\,;x\mapsto\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{1-x^k}$.

1) Montrer que *f* est bien définie et de classe C^1 sur $\left]-1,1\right[$.
2) Ecrire une fonction `f(n,x)` qui renvoie $\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{1-x^k}$ et une fonction `Tracef(n)` qui trace la fonction $x\mapsto f(n,x)$ sur $\left]-1,1\right[$.
3) Ecrire une fonction `SommeFibo(n)` qui renvoie $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{F_{2k}}$, puis conjecturer la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{F_{2k}}-\sqrt{5}\left(f(\beta^2)-f(\beta^4)\right)$.
4) Exprimer F_n en fonction de *n* et β, puis prouver la conjecture.
5) A l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que $f(e^{-y})\underset{y\to 0}{\sim}-\frac{\ln y}{y}$.

1) Posons, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $f_k:x\mapsto\frac{x^k}{1-x^k}$.

- Pour tout $x\in\left]-1,1\right[$, $|f_k(x)|\underset{k\to+\infty}{\sim}|x|^k$ et la série géométrique $\sum|x|^k$ converge car $|x|<1$, donc $\sum f_k$ converge simplement sur $\left]-1,1\right[$.
- Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, f_k est de classe C^2 sur $\left]-1,1\right[$ (car définie et rationnelle) avec :

$$f_k':x\mapsto\frac{kx^{k-1}}{(1-x^k)^2}.$$

- Soit $a\in\left]0,1\right[$ et $k\in\mathbb{N}^*$.

  Pour tout $x\in[-a,a]$, on a $x^k\le a^k\le a$, donc $1-x^k\ge 1-a^k\ge 1-a>0$ et :

$$0<\frac{1}{(1-x^k)^2}\le\frac{1}{(1-a)^2}.$$

  Alors, pour tout $x\in[-a,a]$:

$$|f_k'(x)|=\frac{k|x|^{k-1}}{(1-x^k)^2}\le\frac{1}{(1-a)^2}ka^{k-1}.$$

  Or, la série entière $\sum kx^{k-1}$ a le même rayon de convergence que $\sum x^k$, c'est-à-dire 1, donc la série $\sum ka^{k-1}$ converge. Ainsi, la série de fonctions $\sum f_k'$ vérifie donc l'hypothèse de domination sur $[-a,a]$, donc converge uniformément sur $[-a,a]$.

  On peut alors conclure que $f=\sum_{k=1}^{+\infty}f_k$ est définie et de classe C^1 sur $[-a,a]$.

Ceci est vrai pour tout $a \in \left]0,1\right[$, donc avec $\left]-1,1\right[= \bigcup_{a\in]0,1[}\left[-a,a\right]$:

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est bien définie et de classe } C^1 \text{ sur } \left]-1,1\right[.}$$

2) et 3) Python

4) La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire double.

L'équation caractéristique associée est $r^2 - r - 1 = 0$, de racines $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \beta$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1-\beta$. Il existe alors $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \lambda\beta^n + \mu(1-\beta)^n$.

Comme $F_0 = \lambda + \mu = 0$ et $F_1 = \lambda\beta + \mu(1-\beta) = 1$, on a $\mu = -\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-\beta)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\beta^n}$$

On a $\beta \approx -0,6$ et $1-\beta \approx 1,6$, donc $\dfrac{1}{F_{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{5}}{(1-\beta)^{2n}}$ et comme $0 < \dfrac{1}{(1-\beta)^2} < 1$, la série géométrique $\sum \dfrac{\sqrt{5}}{(1-\beta)^{2n}}$ converge et donc $\sum \dfrac{1}{F_{2n}}$ converge.

Remarquons au passage que $\beta^2 \in \left]-1,1\right[$ et $\beta^4 \in \left]-1,1\right[$, donc $f(\beta^2)$ et $f(\beta^4)$ sont bien définis.

On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{F_{2k}} - \sqrt{5}\left(f(\beta^2) - f(\beta^4)\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{5}}{(1-\beta)^{2k} - \beta^{2k}} - \sqrt{5}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\beta^{2k}}{1-\beta^{2k}} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\beta^{4k}}{1-\beta^{4k}}\right) \\ &= \sqrt{5}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(1-\beta)^{2k} - \beta^{2k}} - \frac{\beta^{2k}}{1-\beta^{2k}} + \frac{\beta^{4k}}{1-\beta^{4k}}\right)\end{aligned}$$

Et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-\beta)^{2k} - \beta^{2k}} - \frac{\beta^{2k}}{1-\beta^{2k}} + \frac{\beta^{4k}}{1-\beta^{4k}} &= \frac{1}{(1-\beta)^{2k} - \beta^{2k}} - \frac{\beta^{2k}(1+\beta^{2k}) - \beta^{4k}}{1-\beta^{4k}} = \frac{1}{(1-\beta)^{2k} - \beta^{2k}} - \frac{\beta^{2k}}{1-\beta^{4k}} \\ &= \frac{1-\beta^{4k} - \beta^{2k}\left[(1-\beta)^{2k} - \beta^{2k}\right]}{\left[(1-\beta)^{2k} - \beta^{2k}\right](1-\beta^{4k})} = \frac{1-(\beta-\beta^2)^{2k}}{\left[(1-\beta)^{2k} - \beta^{2k}\right](1-\beta^{4k})}\end{aligned}$$

Enfin, comme β est racine de $X^2 - X - 1$, on a $\beta - \beta^2 = -1$, donc $1-(\beta-\beta^2)^{2k} = 0$, ce qui prouve la conjecture, autrement dit que :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{F_{2k}} - \sqrt{5}\left(f(\beta^2) - f(\beta^4)\right) = 0}$$

5) Pour tout $y\in\mathbb{R}_+^*$, on a $e^{-y}\in\left]0,1\right[$, donc $f(e^{-y})$ existe et vaut :

$$f(e^{-y})=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{e^{-ky}}{1-e^{-ky}}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{e^{ky}-1}.$$

Pour $y\in\mathbb{R}_+^*$ fixé, posons $g:t\mapsto\dfrac{1}{e^{ty}-1}$. La fonction g est définie, continue, positive et décroissante sur $\left[1,+\infty\right[$. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on a alors $g(k+1)\le g(t)\le g(k)$ pour tout $t\in[k,k+1]$ et par croissance de l'intégrale et sommation de $k=1$ à $k=N\in\mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{N}g(k+1)\le\sum_{k=1}^{N}\int_k^{k+1}g(t)dt\le\sum_{k=1}^{N}g(k)\quad\Leftrightarrow\quad\sum_{k=2}^{N+1}g(k)=\sum_{k=1}^{N+1}g(k)-g(1)\le\int_1^{N+1}g(t)dt\le\sum_{k=1}^{N}g(k).$$

Or, $\sum g(k)$ converge, de somme $\sum_{k=1}^{+\infty}g(k)=f(e^{-y})$, et, comme g est positive, la fonction $X\mapsto\int_1^X g(t)dt$ est croissante et majorée par $\sum_{k=1}^{+\infty}g(k)$, donc $\int_1^{+\infty}g(t)dt$ converge. On peut alors passer à la limite quand $N\to+\infty$ dans la double inégalité ci-dessus, ce qui donne :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}g(k)-g(1)\le\int_1^{+\infty}g(t)dt\le\sum_{k=1}^{+\infty}g(k)\quad\Leftrightarrow\quad f(e^{-y})-\frac{1}{e^{y}-1}\le\int_1^{+\infty}\frac{dt}{e^{ty}-1}\le f(e^{-y}).$$

Soit :

$$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{e^{ty}-1}\le f(e^{-y})\le\frac{1}{e^{y}-1}+\int_1^{+\infty}\frac{dt}{e^{ty}-1}.$$

Et :

$$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{e^{ty}-1}=\frac{1}{y}\int_1^{+\infty}\frac{ye^{-ty}}{1-e^{-ty}}dt=\frac{1}{y}\Big[\ln(1-e^{-ty})\Big]_1^{+\infty}=-\frac{1}{y}\ln(1-e^{-y}).$$

Ainsi :

$$-\frac{1}{y}\ln(1-e^{-y})\le f(e^{-y})\le\frac{1}{e^{y}-1}-\frac{1}{y}\ln(1-e^{-y}).$$

Avec $y\in\left]0,1\right[$, on a $-\dfrac{\ln y}{y}>0$ et :

$$\frac{1}{\ln y}\ln(1-e^{-y})\le-\frac{y}{\ln y}f(e^{-y})\le\frac{1}{\ln y}\ln(1-e^{-y})-\frac{1}{\ln y}\frac{y}{e^{y}-1}.$$

Enfin :

$$\lim_{y\to0^+}\frac{\ln(1-e^{-y})}{\ln y}=\lim_{y\to0^+}\frac{1}{\ln y}\ln\left(y\frac{1-e^{-y}}{y}\right)=\lim_{y\to0^+}\left[1+\frac{1}{\ln y}\ln\left(\frac{1-e^{-y}}{y}\right)\right]=1$$

$$\lim_{y\to0^+}\frac{1}{\ln y}\frac{y}{e^{y}-1}=0$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, on obtient $\lim\limits_{y\to0^+}\left[-\dfrac{y}{\ln y}f(e^{-y})\right]=1$ et ainsi, on a bien :

$$\boxed{f(e^{-y})\underset{y\to0^+}{\sim}-\frac{\ln y}{y}}$$

Planche n° 33

On note $diag(a,b)=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ pour $a,b\in\mathbb{R}$.

1. Soit $S=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$. Montrer que S est semblable à une matrice diagonale que l'on précisera.

   Montrer que S est semblable à une matrice de diagonale nulle.

2. Soient $D=diag(1,2)$ et $\varphi : M\mapsto DM-MD$.

   Montrer qu'il existe des matrices A et B telles que $S=AB-BA$.

1. La matrice S est symétrique réelle, donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$ d'après le théorème spectral.

On a $\chi_S=X^2-34$, donc $Sp(S)=\left\{-\sqrt{34},\sqrt{34}\right\}$ et :

$$\boxed{S \text{ est semblable à } diag\left(-\sqrt{34},\sqrt{34}\right).}$$

Comme S est semblable à $diag\left(-\sqrt{34},\sqrt{34}\right)$, S^2 est semblable à $diag\left(34,34\right)=34I_2$, donc :

$$S^2=34I_2.$$

Soit $\mathcal{B}_c=(e_1,e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à S.

On a alors $f(e_1)=5e_1-3e_2$ et $f(5e_1-3e_2)=f^2(e_1)=34e_1$.

Comme e_1 et $5e_1-3e_2$ ne sont pas colinéaires, la famille $\left(e_1,5e_1-3e_2\right)$ est une base $\mathbb{R}^2$ et :

$$M_{(e_1,5e_1-3e_2)}(f)=\begin{pmatrix} 0 & 34 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Et ainsi :

$$\boxed{S \text{ est semblable à une matrice de diagonale nulle.}}$$

2. Pour toute matrice $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a $\varphi(M)=DM-MD=\begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$.

En posant $N=\begin{pmatrix} 0 & -34 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a donc $\varphi(N)=\begin{pmatrix} 0 & 34 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Or, d'après la question précédente, il existe $P\in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} 0 & 34 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=P^{-1}SP$, donc :

$$\varphi(N)=DN-ND=P^{-1}SP.$$

Ceci donne :

$$S=P\left(DN-ND\right)P^{-1}=PDNP^{-1}-PNDP^{-1}=(PDP^{-1})(PNP^{-1})-(PNP^{-1})(PDP^{-1}).$$

Finalement, en posant $A=PDP^{-1}$ et $B=PNP^{-1}$:

$$\boxed{\text{Il existe bien des matrices } A \text{ et } B \text{ de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ telles que } S=AB-BA.}$$

Planche n° 34

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^\alpha (\operatorname{sh} t)^n \, dt$ où le réel α est défini ci-dessous.

1) Justifier que l'équation $\operatorname{sh} x = 1$ d'inconnue réelle x admet un unique solution, appelée α.
2) Donner un encadrement de longueur 10^{-5} de cette solution.
3) Écrire une fonction `Suite(n)` donnant une valeur approchée de chacun des réels $I_1, \dots, I_n$.
4) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$.
5) Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
6) En déduire un équivalent de I_n en $+\infty$.

1) La fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc 1 admet un unique antécédent par sh, autrement dit :

$$\boxed{\text{L'équation } \operatorname{sh} x = 1 \text{ admet une unique solution dans } \mathbb{R}.}$$

On appelle cette solution α.

Remarquons que $\operatorname{sh} 0 = 0$ et sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $\alpha > 0$.

2) On a :

$$\operatorname{sh} \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (e^\alpha)^2 - 2e^\alpha = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (e^\alpha)^2 - 2e^\alpha + 1 = (e^\alpha - 1)^2 = 2.$$

Comme $\alpha > 0$, on a $e^\alpha - 1 > 0$ et donc $e^\alpha - 1 = \sqrt{2}$, soit :

$$\alpha = \ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0{,}881\,376.$$

Ainsi :

$$\boxed{0{,}881\,37 < \alpha < 0{,}881\,38}$$

3) Python

4) Pour tout entier $n \geq 2$:

$$I_n = \int_0^\alpha (\operatorname{sh} t)^n \, dt = \int_0^\alpha \operatorname{sh} t (\operatorname{sh} t)^{n-1} \, dt.$$

Les fonctions $t \mapsto \operatorname{ch} t$ et $t \mapsto (\operatorname{sh} t)^{n-1}$ sont de classe C^1 sur $[0, \alpha]$ et par intégration par parties, on peut écrire :

$$I_n = \left[\operatorname{ch} t (\operatorname{sh} t)^{n-1} \right]_0^\alpha - \int_0^\alpha \operatorname{ch} t \left[(n-1) \operatorname{ch} t (\operatorname{sh} t)^{n-2} \right] dt = \operatorname{ch} \alpha (\operatorname{sh} \alpha)^{n-1} - (n-1) \int_0^\alpha \operatorname{ch}^2 t (\operatorname{sh} t)^{n-2} \, dt.$$

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}^2 t = 1 + \operatorname{sh}^2 t$ et $\operatorname{ch} t > 0$, donc $\operatorname{ch} \alpha = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \alpha} = \sqrt{2}$ (car $\operatorname{sh} \alpha = 1$) et ainsi :

$$\begin{aligned} I_n &= \sqrt{2} - (n-1) \int_0^\alpha (1 + \operatorname{sh}^2 t)(\operatorname{sh} t)^{n-2} \, dt \\ &= \sqrt{2} - (n-1) \int_0^\alpha (\operatorname{sh} t)^{n-2} \, dt - (n-1) \int_0^\alpha (\operatorname{sh} t)^n \, dt = \sqrt{2} - (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \end{aligned}$$

Soit pour tout entier $n \geq 2$:

$$\boxed{nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}}$$

5) Comme sh est croissante sur $\mathbb{R}$ et $\operatorname{sh}\alpha = 1$, on a pour t tout $t \in [0, \alpha]$, $0 \leq \operatorname{sh} t \leq \operatorname{sh}\alpha = 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, \alpha]$, $0 \leq (\operatorname{sh} t)^{n+1} \leq (\operatorname{sh} t)^n$. Alors, par croissance de l'intégrale, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \int_0^\alpha (\operatorname{sh} t)^{n+1} dt \leq \int_0^\alpha (\operatorname{sh} t)^n dt \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq I_{n+1} \leq I_n .$$

Ainsi, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, donc convergente vers une limite $\ell \geq 0$.

Si $\ell > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[nI_n + (n-1)I_{n-2}\right] = +\infty$, ce qui contredit la relation de la question précédente, donc :

$$\boxed{(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers 0.}}$$

Remarque : En majorant $t \mapsto (\operatorname{sh} t)^n$ par $(\operatorname{sh}\alpha)^n = 1$ sur $[0, \alpha]$, on aurait aussi pu utiliser le théorème de convergence dominée.

6) D'après la question 4, on a pour tout entier $n \geq 2$, $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$. Comme $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a $I_n \leq I_{n-2}$ et donc :

$$nI_n + (n-1)I_n \leq nI_n + (n-1)I_{n-2} \leq nI_{n-2} + (n-1)I_{n-2} .$$

Soit :

$$(2n-1)I_n \leq \sqrt{2} \leq (2n-1)I_{n-2} \quad \Leftrightarrow \quad I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2n-1} \leq I_{n-2} .$$

En remplaçant $n-2$ par n dans la deuxième inégalité, on obtient $\dfrac{\sqrt{2}}{2n+3} \leq I_n$ et donc pour tout entier $n \geq 2$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2n+3} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2n-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2n}{2n+3} \leq \frac{2n}{\sqrt{2}} I_n \leq \frac{2n}{2n-1} .$$

Enfin, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n}{2n+3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n}{2n-1} = 1$, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n}{\sqrt{2}} I_n = 1$, et donc que :

$$\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\sqrt{2}}}$$

Planche n° 35 (avec Python)

On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices symétriques à coefficients strictement positifs.

Dans la suite, $\mathbb{R}^n$ est assimilé à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et muni du produit scalaire et de la norme canoniques.

1. a) Faire un programme qui prend en argument un entier n et renvoie une matrice de $\mathcal{E}_n$ avec des coefficients tirés aléatoirement.

   b) Déterminer à l'aide de Python les valeurs propres de différentes matrices de $\mathcal{E}_n$.
   Une matrice de $\mathcal{E}_n$ peut-elle avoir une valeur propre strictement négative ? toutes les valeurs propres strictement négatives ?

2. On note $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de $A \in \mathcal{E}_n$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres, où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, X_i est associé à λ_i.

   a) Que peut-on conjecturer sur les coefficients de X_n ?

   b) Montrer que pour tout $Y \in \mathbb{R}^n$, ${}^tYAY \leq \lambda_n \|Y\|^2$.

   c) Démontrer la conjecture (on pourra considérer le vecteur Z_n dont les composantes sont les valeurs absolues des composantes de X_n).

3. On note $A_a = \begin{pmatrix} A & aX_3 \\ a\,{}^tX_3 & 0 \end{pmatrix}$ pour tout réel a.

   a) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

   Donner les valeurs propres de A. En déduire celles de A_a pour certaines valeurs de a.

   b) Donner les valeurs propres de A_a dans le cas général.

   c) *Question non notée.*

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :

Question 2.c) : Montrer que ${}^tZ_nAZ_n \geq \lambda_n \|Z_n\|^2$.

Question 3.a) : S'intéresser à $A_a \begin{pmatrix} X_i \\ 0 \end{pmatrix}$ où X_i est un vecteur propre de associé à λ_i.

1. a) et début de b) Python

   b) Si on prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}_n$, on a $\det A = -3 < 0$, donc le produit des deux valeurs propres est strictement négatif, ce qui implique que l'une des deux valeurs propres est négative.

   Par contre, comme tous les coefficients d'une matrice de $\mathcal{E}_n$ sont strictement positifs, sa trace, qui est la somme des valeurs propres, est strictement positive et donc les valeurs propres ne peuvent pas êtres toutes négative.
   Remarquons même que ceci implique au la plus grande valeur propre est strictement positive.
   Finalement :

   $\boxed{\text{Une matrice de } \mathcal{E}_n \text{ peut avoir une valeur propre strictement négative mais pas toutes.}}$

2. a) Python

b) Soit $Y \in \mathbb{R}^n$, tel que $Y = y_1 X_1 + ... + y_n X_n$ avec $(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$. On a alors :

$$AY = y_1 AX_1 + ... + y_n AX_n = y_1 \lambda_1 X_1 + ... + y_n \lambda_n X_n .$$

Comme $(X_1, ..., X_n)$ est une base orthonormée, on obtient ${}^tYAY = y_1^2 \lambda_1 + ... + y_n^2 \lambda_n$ et, comme pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $y_i^2 \geq 0$ et $\lambda_i \leq \lambda_n$, on obtient ${}^tYAY \leq y_1^2 \lambda_n + ... + y_n^2 \lambda_n = \lambda_n (y_1^2 + ... + y_n^2)$, soit :

$$\boxed{{}^tYAY \leq \lambda_n \|Y\|^2}$$

c) Notons $A = (a_{i,j})$, $X_n = (x_1, ..., x_n)$ et posons $Z_n = (|x_1|, ..., |x_n|)$.

On a alors $\|Z_n\|^2 = \|X_n\|^2 = x_1^2 + ... + x_n^2$ et, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,j} x_i x_j \leq a_{i,j} |x_i x_j|$ car $a_{i,j} > 0$, donc :

$${}^tX_n AX_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} x_i x_j \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} |x_i x_j| = {}^tZ_n AZ_n .$$

De plus, si l'un des $x_i x_j$ est strictement négatif, alors ${}^tX_n AX_n < {}^tZ_n AZ_n$. Or :

$${}^tX_n AX_n = {}^tX_n (\lambda_n X_n) = \lambda_n {}^tX_n X_n = \lambda_n \|X_n\|^2 = \lambda_n \|Z_n\|^2 .$$

Ainsi, si l'un des $x_i x_j$ est strictement négatif, on a $\lambda_n \|Z_n\|^2 < {}^tZ_n AZ_n$, ce qui contredit le résultat de la question précédente. Donc, tous les $x_i x_j$ sont positifs, ce qui veut dire que :

$$\boxed{\text{Les composantes de } X_n \text{ sont toutes de même signe.}}$$

3. a) On a :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -2 & -3 \\ -2 & X-1 & -3 \\ -3 & -3 & X \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} X-6 & -2 & -3 \\ X-6 & X-1 & -3 \\ X-6 & -3 & X \end{vmatrix} = (X-6) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & X-1 & -3 \\ 1 & -3 & X \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} (X-6) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & X+1 & 0 \\ 0 & -1 & X+3 \end{vmatrix} \underset{\text{dév. par rapport à } C_1}{=} (X-6) \begin{vmatrix} X+1 & 0 \\ -1 & X+3 \end{vmatrix} = (X-6)(X+1)(X+3)$$

Donc :

$$\boxed{Sp(A) = \{-3, -1, 6\}}$$

Avec les notations de la question précédente, on a $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = 6$. On trouve $\ker(A - \lambda_2 I_3) = \text{Vect}((1, -1, 0))$, $\ker(A - \lambda_1 I_3) = \text{Vect}((1, 1, -2))$ et $X_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

En posant $\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, on a $A_a = \begin{pmatrix} & & & \alpha \\ & A & & \alpha \\ & & & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $X_i = (z_1, z_2, z_3)$ un vecteur propre de associé à $\lambda_i \in Sp(A)$. On a :

$$A_a \begin{pmatrix} X_i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & \alpha \\ & A & & \alpha \\ & & & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX_i \\ \alpha(z_1+z_2+z_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i X_i \\ \alpha(z_1+z_2+z_3) \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$A_a \begin{pmatrix} X_i \\ 0 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} X_i \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \mu = \lambda_i \\ \alpha(z_1+z_2+z_3) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = \lambda_i \\ \alpha = 0 \text{ ou } z_1+z_2+z_3 = 0 \end{cases}$$

Or, pour X_1 et X_2, on a $z_1, z_1+z_2+z_3 = 0$, donc $A_a \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A_a \begin{pmatrix} X_2 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} X_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ (donc pour tout $a \in \mathbb{R}$). Ainsi :

$$\boxed{-3 \text{ et } -1 \text{ sont valeurs propres de } A_a \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}.}$$

De plus pour $\alpha = 0$, soit $a = 0$, on a $A_0 \begin{pmatrix} X_3 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} X_3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A_0 \begin{pmatrix} 0_{3,1} \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, donc :

$$\boxed{Sp(A_0) = \{-3, -1, 0, 6\}}$$

b) On a :

$$\chi_{A_a} = \begin{vmatrix} X-1 & -2 & -3 & -\alpha \\ -2 & X-1 & -3 & -\alpha \\ -3 & -3 & X & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & -\alpha & X \end{vmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \textit{puis} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3}}{=} \begin{vmatrix} X+1 & -(X+1) & 0 & 0 \\ 1 & X+2 & -3-X & 0 \\ -3 & -3 & X & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & -\alpha & X \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 + C_1}{=} \begin{vmatrix} X+1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & X+3 & -3-X & 0 \\ -3 & -6 & X & -\alpha \\ -\alpha & -2\alpha & -\alpha & X \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{dév. par rapport à } L_1}{=} (X+1) \begin{vmatrix} X+3 & -(X+3) & 0 \\ -6 & X & -\alpha \\ -2\alpha & -\alpha & X \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 + C_1}{=} (X+1) \begin{vmatrix} X+3 & 0 & 0 \\ -6 & X-6 & -\alpha \\ -2\alpha & -3\alpha & X \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{dév. par rapport à } L_1}{=} (X+1)(X+3) \begin{vmatrix} X-6 & -\alpha \\ -3\alpha & X \end{vmatrix} = (X+1)(X+3)(X^2 - 6X - 3\alpha^2)$$

Soit :

$$\begin{aligned} \chi_{A_a} &= (X+1)(X+3)\left[(X-3)^2 - (3\alpha^2+9)\right] = (X+1)(X+3)\left[(X-3)^2 - (a^2+9)\right] \\ &= (X+1)(X+3)(X-3-\sqrt{a^2+9})(X-3+\sqrt{a^2+9}) \end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\boxed{Sp(A_a) = \left\{-3, -1, 3-\sqrt{a^2+9}, 3+\sqrt{a^2+9}\right\}}$$

Planche n° 36 (PC)

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme :

$$A \mapsto |||A||| = \sup\left\{\|AX\|_2 , X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|X\|_2 = 1\right\}.$$

1) Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \,; A \mapsto Tr(A)$. Déterminer $f\left(O_n(\mathbb{R})\right)$.

1) Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|X\|_2 = 1$, on a $\|AX\|_2 = \|X\|_2 = 1$, donc $\left\{\|AX\|_2 , X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|X\|_2 = 1\right\} = \{1\}$ et ainsi, pour toute $A \in O_n(\mathbb{R})$, $|||A||| = 1$.

Ceci permet de conclure que :

$$\boxed{O_n(\mathbb{R}) \text{ est une partie bornée de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Soit maintenant $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $O_n(\mathbb{R})$ convergeant vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $\|A_n X\|_2 = \|X\|_2$. Or, l'application $M \mapsto MX$ est continue (car linéaire en dimension finie), donc $M \mapsto \|MX\|_2$ l'est aussi.

Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|A_n X\|_2 = \|AX\|_2$, donc $\|AX\|_2 = \|X\|_2$. Ceci étant vrai pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, A est une matrice d'isométrie, donc $A \in O_n(\mathbb{R})$. Ceci prouve que :

$$\boxed{O_n(\mathbb{R}) \text{ est une partie fermée de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

2) On cherche $f\left(O_n(\mathbb{R})\right) = \left\{Tr(A),\ A \in O_n(\mathbb{R})\right\}$ qui est une partie de $\mathbb{R}$.

Soit $A = (a_{i,j}) \in O_n(\mathbb{R})$.

On a $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, donc $a_{i,j}^2 \leq 1$, soit $-1 \leq a_{i,j} \leq 1$ pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$ et :

$$-n \leq Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \leq n.$$

Ainsi :

$$f\left(O_n(\mathbb{R})\right) \subset [-n, n].$$

Nous allons prouver par récurrence double sur *n* que pour tout entier $n \geq 2$, $[-n,n] \subset f\left(O_n(\mathbb{R})\right)$.

Initialisation

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$ et $Tr(A) = 2\cos\alpha$ décrit $[-2,2]$ quand α décrit $\mathbb{R}$. Ainsi :

$$[-2,2] \subset f\left(O_2(\mathbb{R})\right).$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R})$ et $Tr(A) = 1 + 2\cos\alpha$ décrit $[-1,3]$ quand α décrit $\mathbb{R}$. Mais $-A \in O_3(\mathbb{R})$ aussi, et $Tr(-A) = -Tr(A)$ décrit $[-3,1]$ quand α décrit $\mathbb{R}$. Ainsi :

$$[-3,1] \cup [-1,3] = [-3,3] \subset f\left(O_3(\mathbb{R})\right).$$

La propriété est donc vraie aux rangs 2 et 3.

Hérédité

Pour un entier $n \geq 2$, supposons la propriété vraie aux rangs n et $n+1$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $A_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$ et $A_2 \in O_n(\mathbb{R})$. Posons $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{2,n} \\ 0_{n,2} & A_2 \end{pmatrix}$.

On a $A \in O_{n+2}(\mathbb{R})$ et :

$$Tr(A) = Tr(A_1) + Tr(A_2).$$

Or, par hypothèse de récurrence, $Tr(A_2)$ peut valoir n'importe quelle réel entre $-n$ et n, on a vu plus haut que $Tr(A_1)$ peut valoir n'importe quelle réel entre -2 et 2. Ainsi, $Tr(A)$ peut valoir n'importe quelle réel entre $-n-2 = -(n+2)$ et $n+2$, donc :

$$[-(n+2), n+2] \subset f\left(O_{n+2}(\mathbb{R})\right).$$

La propriété est donc vraie au rang $n+2$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout entier $n \geq 2$.

On a donc $f\left(O_n(\mathbb{R})\right) \subset [-n,n]$ et $[-n,n] \subset f\left(O_n(\mathbb{R})\right)$, pour tout entier $n \geq 2$, soit :

$$\boxed{f\left(O_n(\mathbb{R})\right) = [-n,n]}$$

Planche n° 37 (PC)

On définit pour tout réel $\alpha > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$ et $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ où $x \in \mathbb{R}$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, étudier la convergence de $I_n(\alpha)$ en fonction de α.
2) Montrer que $\Gamma(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
3) Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha n^{\frac{1}{\alpha}} I_n(\alpha) = \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.
4) Une question non notée.

1) Pour tout réel $\alpha > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ (car $\alpha > 0$, donc $t \mapsto t^\alpha$ se prolonge en sur fonction continue en 0, donc sur $\mathbb{R}_+$).

De plus, $\dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha n}}$ et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha n}}$ converge si et seulement si $\alpha n > 1$, soit $\alpha > \dfrac{1}{n}$. Ainsi :

$$\boxed{I_n(\alpha) \text{ converge si et seulement si } \alpha > \frac{1}{n}.}$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit de telles fonctions. De plus :

- $e^{-t}t^{x-1} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$ et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0 t^{x-1}dt$ converge car $x-1>-1$, donc $\displaystyle\int_0 e^{-t}t^{x-1}dt$ converge ;
- $e^{-t}t^{x-1} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ (par croissances comparées) et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ converge, donc $\displaystyle\int^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ converge.

Finalement :

$$\boxed{\Gamma(x) \text{ converge pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*.}$$

3) Soit un réel $\alpha > 0$. Pour tout $n > \dfrac{1}{\alpha}$, $\alpha n^{\frac{1}{\alpha}} I_n(\alpha)$ existe et vaut :

$$\alpha n^{\frac{1}{\alpha}} I_n(\alpha) = \alpha n^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}.$$

Comme $\alpha > 0$, la fonction $t \mapsto t^\alpha$ réalise une bijection de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}_+^*$. En effectuant le changement de variable $u = t^\alpha$, on obtient :

$$\alpha n^{\frac{1}{\alpha}} I_n(\alpha) = \alpha n^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+u)^n}\frac{1}{\alpha}u^{\frac{1}{\alpha}-1}du = \int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+u)^n}(nu)^{\frac{1}{\alpha}-1} n\,du.$$

La fonction $u \mapsto nu$ réalise une bijection de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}_+^*$. En effectuant le changement de variable $t = nu$, on obtient :

$$\alpha n^{\frac{1}{\alpha}} I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n} t^{\frac{1}{\alpha}-1}dt.$$

Pour tout $n > \dfrac{1}{\alpha}$, la fonction $t \mapsto \left(1+\dfrac{t}{n}\right)^{-n} t^{\frac{1}{\alpha}-1}$ est continue, donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit de telles fonction.

Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n} t^{\frac{1}{\alpha}-1} = e^{-n\ln\left(1+\frac{t}{n}\right)} t^{\frac{1}{\alpha}-1} = e^{-n\left[\frac{t}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]} t^{\frac{1}{\alpha}-1} = e^{-t+o(1)}t^{\frac{1}{\alpha}-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-t}t^{\frac{1}{\alpha}-1}.$$

Ainsi, la suite de fonctions $\left(t \mapsto \left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n} t^{\frac{1}{\alpha}-1}\right)_{n>\frac{1}{\alpha}}$ converge simplement vers $t \mapsto e^{-t} t^{\frac{1}{\alpha}-1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et cette fonction est continue, donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ (question précédente).

Toujours à $t \in \mathbb{R}_+^*$, introduisons la fonction $x \mapsto \left(1+\frac{t}{x}\right)^{-x} t^{\frac{1}{\alpha}-1} = e^{-x\ln\left(1+\frac{t}{x}\right)} t^{\frac{1}{\alpha}-1}$ sur $[1,+\infty[$.

Cette fonction est dérivable sur $[1,+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables, de dérivée $x \mapsto g\left(\frac{t}{x}\right) e^{-x\ln\left(1+\frac{t}{x}\right)} t^{\frac{1}{\alpha}-1}$ avec $g(u) = \frac{u}{1+u} - \ln(1+u)$.

La fonction g est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que différence de telles fonctions, avec pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $g'(u) = -\frac{u}{(1+u)^2} \leq 0$. Ainsi, g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $g(u) \leq g(0) = 0$. La fonction g est donc négative sur $\mathbb{R}_+$.

Comme $x \mapsto g\left(\frac{t}{x}\right) e^{-x\ln\left(1+\frac{t}{x}\right)} t^{\frac{1}{\alpha}-1}$ est du signe de $g\left(\frac{t}{x}\right)$, cette fonction est négative sur $[1,+\infty[$ et donc $x \mapsto \left(1+\frac{t}{x}\right)^{-x} t^{\frac{1}{\alpha}-1}$ est décroissante sur $[1,+\infty[$.

On peut alors écrire que pour tout entier $n \geq \frac{1}{\alpha}+1$, on a :

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n} t^{\frac{1}{\alpha}-1} \leq \varphi(t) = \left(1+\frac{t}{\frac{1}{\alpha}+1}\right)^{-\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)} t^{\frac{1}{\alpha}-1} = \frac{t^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\left(1+\frac{\alpha}{\alpha+1}t\right)^{\frac{1}{\alpha}+1}}.$$

La fonction φ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

- $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{\frac{1}{\alpha}-1}$ et l'intégrale de Riemann $\int_0 t^{\frac{1}{\alpha}-1} dt$ converge car $\frac{1}{\alpha}-1 > -1$, donc $\int_0 \varphi(t)dt$ converge ;
- $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}+1} \frac{1}{t^2}$ et l'intégrale de Riemann $\int^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, donc $\int^{+\infty} \varphi(t)dt$ converge.

Finalement, φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le théorème de convergence dominée permet alors de conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha n^{\frac{1}{\alpha}} I_n(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n} t^{\frac{1}{\alpha}-1} dt = \int_0^{+\infty} \left[\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n} t^{\frac{1}{\alpha}-1}\right] dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{\alpha}-1} dt.$$

Soit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \alpha n^{\frac{1}{\alpha}} I_n(\alpha) = \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$$

Planche n° 38 (PC)

L'espace $\mathbb{R}^n$, est identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, est muni du produit scalaire et de la norme canoniques.

Soit $H_n = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (matrice de Hilbert) et pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $q_n(x) = \langle H_n x \mid x\rangle$.

1) Énoncer le théorème spectral. Peut-on l'appliquer à H_n ?

2) Exprimer $q_n(x)$ en fonction des x_i. La fonction est-elle continue sur $\mathbb{R}^n$?

3) Soit $S_n = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$. Montrez que q_n est bornée et atteint ses bornes sur S_n.

4) Ecrire un programme Python qui calcule H_n et $q_n(x)$. Calculez les valeurs propres de H_n pour n compris entre 2 et 5 inclus. Faire une conjecture sur le signe des valeurs propres de H_n.

5) Montrer que $q_n(x) = \displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1}\right)^2 dt$ et conclure sur la conjecture.

6) 7) 8) Trois questions non notées.

1) Pour le théorème spectral, voir le cours. On peut l'appliquer à la matrice H_n, car elle est symétrique réelle.

2) Pour tout $x = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$, on a $H_n x = {}^t\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n h_{1,j}x_j & \cdots & \sum_{j=1}^n h_{n,j}x_j \end{pmatrix}$, avec $h_{i,j} = \dfrac{1}{i+j-1}$ et :

$$q_n(x) = \langle H_n x \mid x\rangle = \sum_{i=1}^n \left(x_i \sum_{j=1}^n h_{i,j} x_j \right).$$

Soit :

$$\boxed{q_n(x) = \sum_{1\le i,j\le n} \frac{x_i x_j}{i+j-1}}$$

3) L'application $x \mapsto q_n(x)$, définie sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, est polynomiale en les coordonnées de x, donc continue sur $\mathbb{R}^n$. Or, la sphère unité $S_n = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$ est fermée et bornée dans $\mathbb{R}^n$, donc son image par q_n l'est aussi, autrement dit :

$$\boxed{\text{L'application } q_n \text{ est bornée et atteint ses bornes sur } S_n.}$$

4) Soit $x = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$. On a :

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1}\right)^2 dt = \int_0^1 \left(\sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j t^{i+j-2}\right) dt = \sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j \int_0^1 t^{i+j-2} dt = \sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j \left[\frac{t^{i+j-1}}{i+j-1}\right]_0^1 = \sum_{1\le i,j\le n} \frac{x_i x_j}{i+j-1}.$$

Et donc :

$$\boxed{q_n(x)=\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{n}x_k t^{k-1}\right)^2 dt}$$

Pour tout $x={}^t\left(x_1 \ \cdots \ x_n\right)$ non nul, on a $\left(\sum_{k=1}^{n}x_k t^{k-1}\right)^2 \geq 0$ pour tout $t\in\left[0,1\right]$ et cette expression, polynomiale en *t*, s'annule au plus un nombre fini de fois sur $\left[0,1\right]$, donc, par stricte positivité de l'intégrale, on a :

$$q_n(x)=\left\langle H_n x \mid x\right\rangle=\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{n}x_k t^{k-1}\right)^2 dt>0\,.$$

Soit alors λ une valeur propre de H_n et $x={}^t\left(x_1 \ \cdots \ x_n\right)$ un vecteur propre (non nul) associé. On a :

$$\left\langle H_n x \mid x\right\rangle=\left\langle \lambda x \mid x\right\rangle=\lambda\left\|x\right\|^2>0\,.$$

Comme $x\neq 0$, on a $\left\|x\right\|^2>0$ et donc $\lambda>0$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Toutes les valeurs propres de } H_n \text{ sont strictement positives.}}$$