Corrigés de la série 4 - Centrale-Supélec

Planche n° 25 (ENSAM)

I) Que peut-on dire de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commute avec une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients diagonaux sont distincts deux à deux ?

Trouver $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $X^2 - 2X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

II) Représenter la courbe d'équation $\dfrac{x^2}{n^2} + y^2 = 1$ pour $n = 1$ et $n = 2$.

Calculer l'aire de la surface S_n délimitée par la courbe dans le cas général.

On note L_n la longueur de la courbe. Etudier les rayons de convergence de $\sum_{n \geq 1} S_n x^n$ et $\sum_{n \geq 1} L_n x^n$.

☺ *On rappelle que pour tout* $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$, *on a* $\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b$.

I) En prenant des coefficients, on prouve facilement que si *A* commute avec une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont distincts deux à deux, alors *A* est elle-même diagonale.

Soit $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On a :

$$X^2 - 2X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \iff (X - I_2)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \iff N^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $N = P^{-1}(X - I_2)P$.

Or, N commute avec $N^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est diagonale à coefficients diagonaux distincts deux à deux, donc N est diagonale. Ainsi, $N = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 0 \end{cases} \iff N = \pm \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Avec $N = P^{-1}(X - I_2)P$, soit $X = I_2 + PNP^{-1}$, on obtient :

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ou } X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

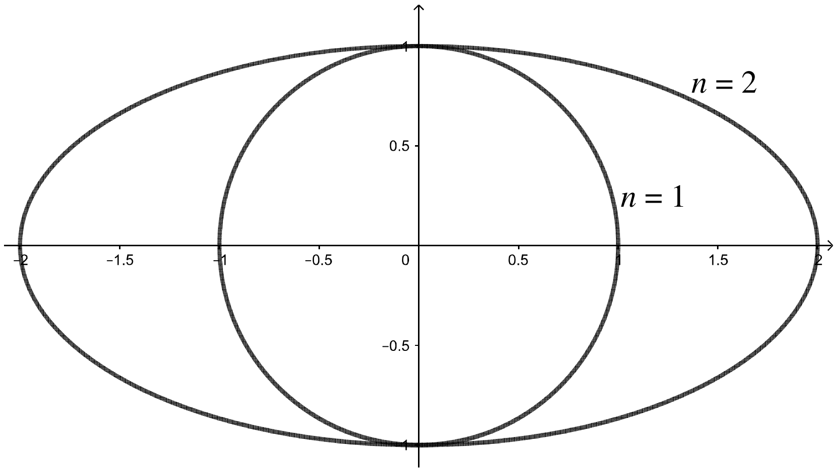
****

II) Pour $n = 1$, courbe a pour équation $x^2 + y^2 = 1$: c'est le cercle trigonométrique.

Pour $n = 2$, la courbe est la réunion des courbes représentatives de $x \mapsto \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4}}$ et $x \mapsto -\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4}}$

(c'est une ellipse). On peut la paramétrer par $\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$.

Les courbes sont représentées sur le schéma suivant.



Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la courbe est la réunion des courbes représentatives de $x \mapsto \sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}$ et $x \mapsto -\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}$ qui sont symétriques par rapport à l'axe de abscisses, donc S_n est égale à deux fois l'aire entre l'axe (Ox) et la courbe de $x \mapsto \sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}$, fonction définie sur $[-n,n]$ et positive. Ainsi :

$$\begin{aligned} S_n &= 2\int_{-n}^{n} \sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}\,dx = 4n\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt \\ &= 4n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 u}\cos u\,du = 4n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,du = 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\cos 2u\right)du = n\pi \end{aligned}$$

On a vu que l'on peut paramétrer la courbe par $\begin{cases} x(t) = n\cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$. Alors :

$$L_n = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{n^2\sin^2 t + \cos^2 t}\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{n^2\sin^2 t + \cos^2 t}\,dt .$$

On a $\cos t \geq 0$ et $\sin t \geq 0$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, donc d'après l'indication, pour tout $t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$:

$$n\sin t \leq \sqrt{n^2\sin^2 t + \cos^2 t} \leq n\sin t + \cos t .$$

Donc :

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} n\sin t\,dt \leq L_n \leq 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(n\sin t + \cos t\right)dt \quad \Leftrightarrow \quad 4n \leq L_n \leq 4(n+1)$$

Le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} n\,x^n$ est 1, donc avec $S_n = n\pi$ et l'encadrement ci-dessus :

Le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} S_n x^n$ et $\sum_{n\geq 1} L_n x^n$ est 1.

Planche n° 26 (ENSAM)

I) Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^2 = -I_n$, alors n est pair.

Montrer que si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $B^2 - B + I_n = 0_n$, alors n est pair.

Montrer que si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $C^3 + C^2 + C = 0_n$, alors C est de rang pair.

II) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre ½. On note T la variable aléatoire égale au plus petit entier n tel qu'on ait deux 1 consécutifs aux $n^{\text{ième}}$ et $(n+1)^{\text{ième}}$ tirages.

On note A_n : « pas deux 1 consécutifs lors des n premiers tirages et $X_n = 0$ » et B_n : « pas deux 1 consécutifs lors des n premiers tirages et $X_n = 1$ ». On pose $p_n = P(A_n)$ et $q_n = P(B_n)$.

Calculer $P(T=1)$ et $P(T=2)$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.

Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(T=n) = \dfrac{F_n}{2^{n+1}}$ où $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite de Fibonacci.

I) On a $\det(A^2) = (\det A)^2 = \det(-I_n) = (-1)^n$, donc $(-1)^n \geq 0$ et n est pair.

Si $B^2 - B + I_n = 0_n$, alors $\left(B - \frac{1}{2}I_n\right)^2 = -\frac{3}{4}I_n$, donc $\left[\det\left(B - \frac{1}{2}I_n\right)\right]^2 = \left(-\frac{3}{4}I_n\right)^n \geq 0$ et n est pair.

Si $C^3 + C^2 + C = 0_n$, montrons que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} C \oplus \ker C$.

Soit $X \in \operatorname{Im} C \cap \ker C$. On a alors $X = CZ$ avec $Z \in \mathbb{R}^n$ et $CX = 0$, donc $C^2 Z = 0 = C^3 Z$:

$$C^3 Z + C^2 Z + CZ = 0 \quad \Rightarrow \quad X = CZ = 0.$$

Ainsi, $\operatorname{Im} C \cap \ker C = \{0\}$ et comme $\dim(\operatorname{Im} C) + \dim(\ker C) = n$, d'après le théorème du rang, on obtient bien : $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} C \oplus \ker C$.

Appelons u, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associée à C.

On a $u(\operatorname{Im} C) = \operatorname{Im} C^2 \subset \operatorname{Im} C$, donc $\operatorname{Im} C$ est stable par u, et ainsi, la matrice de u dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} C \oplus \ker C$ s'écrit $C' = \begin{pmatrix} F & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ avec $F \in GL_r(\mathbb{R})$ où $r = rg(C)$.

On a alors $C = PC'P^{-1}$ où P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à $\mathcal{B}$ et :

$$C^3 + C^2 + C = PC'^3 P^{-1} + PC'^2 P^{-1} + PC' P^{-1} = 0_n \quad \Leftrightarrow \quad C'^3 + C'^2 + C' = 0_n$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} F^3 + F^2 + F & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} = 0_n$$

Et donc :

$$F^3 + F^2 + F = F(F^2 + F + I_r) = 0_r.$$

Comme F est inversible, ceci donne :

$$F^2+F+I_r=0_r \quad \Leftrightarrow \quad \left(F+\frac{1}{2}I_r\right)^2=-\frac{3}{4}I_r.$$

En passant aux déterminants, on obtient comme plus que r, le rang de C, est pair.

****

II) On a $T=\min\left\{n\in\mathbb{N}^*, X_n=X_{n+1}=1\right\}$, donc :

$$P(T=1)=P(X_1=X_2=1)=P(X_1=1)P(X_2=1)=\frac{1}{4}$$

$$P(T=2)=P(X_1=0,X_2=X_3=1)=P(X_1=0)P(X_2=1)P(X_3=1)=\frac{1}{8}$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a :

A_{n+1} = « pas deux 1 consécutifs lors des $n+1$ premiers tirages ($X_1, X_2, \dots, X_{n+1}$) et $X_{n+1}=0$ ».

Or, $A_n\cup B_n$ = « pas deux 1 consécutifs lors des n premiers tirages », donc :

$$A_{n+1}=(A_n\cup B_n)\cap(X_{n+1}=0)=\big(A_n\cap(X_{n+1}=0)\big)\cup\big(B_n\cap(X_{n+1}=0)\big)$$

et l'union est disjointe car $A_n\cap B_n=\varnothing$. Alors :

$$\begin{aligned}p_{n+1}=P(A_{n+1})&=P\big(A_n\cap(X_{n+1}=0)\big)+P\big(B_n\cap(X_{n+1}=0)\big)\\&=P(A_n)P(X_{n+1}=0)+P(B_n)P(X_{n+1}=0)=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}q_n\end{aligned}$$

B_{n+1} = « pas deux 1 consécutifs lors des $n+1$ premiers tirages ($X_1, X_2, \dots, X_{n+1}$) et $X_{n+1}=1$ ».

Pour réaliser B_{n+1}, il faut ne pas avoir deux 1 consécutifs lors des n premiers tirages et $X_n=0$, et $X_{n+1}=1$, donc $B_{n+1}=A_n\cap(X_{n+1}=1)$, d'où :

$$q_{n+1}=P(B_{n+1})=P\big(A_n\cap(X_{n+1}=1)\big)=P(A_n)P(X_{n+1}=1)=\frac{1}{2}p_n.$$

Ainsi, on a bien pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix}p_{n+1}\\q_{n+1}\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_n\\q_n\end{pmatrix}$.

Remarquons qu'alors :

$$q_{n+2}=\frac{1}{2}p_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}q_n\right)=\frac{1}{2}\left(q_{n+1}+\frac{1}{2}q_n\right) \quad\Rightarrow\quad q_{n+2}=\frac{1}{2}q_{n+1}+\frac{1}{4}q_n.$$

Pour réaliser $(T=n)$, il ne faut pas avoir obtenu deux 1 consécutifs lors des n premiers tirages ($X_1, X_2, \dots, X_n$) et $X_n=X_{n+1}=1$, soit $(T=n)=B_n\cap(X_{n+1}=1)$.

Alors :

$$P(T=n)=P\big(B_n\cap(X_{n+1}=1)\big)=P(B_n)P(X_{n+1}=1)=\frac{1}{2}q_n.$$

Si on pose $F_n = 2^{n+1}P(T=n) = 2^n q_n$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$F_{n+2} = 2^{n+2} q_{n+2} = 2^{n+2}\left(\frac{1}{2}q_{n+1} + \frac{1}{4}q_n\right) = 2^{n+1}q_{n+1} + 2^n q_n = F_{n+1} + F_n .$$

Et :

$$F_1 = 2^2 P(T=1) = 1$$
$$F_2 = 2^3 P(T=2) = 1$$

Ainsi, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien la suite de Fibonacci.

Planche n° 27

I) Montrer que $f : x \mapsto \int_0^1 \operatorname{ch}\left(x \operatorname{sh} t\right) dt$ est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Trouver une équation différentielle vérifiée par *f* et une solution développable en série entière de cette équation.

II) *Cours* : Définir une fonction continue par morceaux ; *f* définie par $f(0)=0$ et $f(x)=\frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ est-elle continue par morceaux sur $[0,1]$? sur $]0,1[$?

Dessiner les courbes de *ch* et *sh*. Comment se comportent-elles en $+\infty$? Quelle est la valeur de $ch 1$? Donner une relation entre ch^2 et sh^2.

Si $f' = g'$, à quelle condition $f = g + cste$? Que vaut $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$?

Topologiquement, qu'est-ce que le produit cartésien de deux segments ?

Donner le théorème de Cauchy. Est-il applicable dans l'exercice précédent ?

Quelle est la forme de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle obtenue ?

Donner un exemple de série entière de rayon de convergence infini, puis de rayon de convergence nul. Définir le rayon de convergence. Quels sont les modes de convergence d'une série entière ?

I) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \operatorname{ch}\left(x \operatorname{sh} t\right)$ est continue sur $[0,1]$, donc *f* est définie sur $\mathbb{R}$.

Remarquons que *f* est paire (car la fonction ch l'est).

De plus, pour tout $t \in [0,1]$, $h : t \mapsto \operatorname{ch}\left(x \operatorname{sh} t\right)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h^{(n)} : t \mapsto (\operatorname{sh} t)^n \varphi_n\left(x \operatorname{sh} t\right)$ avec $\varphi_n = \operatorname{ch}$ quand *n* est pair et $\varphi_n = \operatorname{sh}$ quand *n* est impair.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto (\operatorname{sh} t)^n \varphi_n\left(x \operatorname{sh} t\right)$ est continue, donc intégrable sur $[0,1]$.

Enfin, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, tout $x \in [-a,a]$ et tout $t \in [0,1]$, on a $\left|h^{(n)}(t)\right| \leq (\operatorname{sh} t)^n \varphi_n\left(|a| \operatorname{sh} t\right)$ et $t \mapsto (\operatorname{sh} t)^n \varphi_n\left(|a| \operatorname{sh} t\right)$ est continue, donc intégrable sur $[0,1]$.

Ainsi, *f* est de classe C^∞ sur $[-a,a]$, et ce pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, donc *f* est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

****

D'après ce qui précède, on a aussi pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \int_0^1 \operatorname{sh} t \operatorname{sh}(x \operatorname{sh} t)\,dt \quad \text{et} \quad f''(x) = \int_0^1 \operatorname{sh}^2 t \operatorname{ch}(x \operatorname{sh} t)\,dt .$$

En intégrant par parties, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\operatorname{ch} t \operatorname{sh}(x \operatorname{sh} t)\right]_0^1 - \int_0^1 \operatorname{ch} t \left[x \operatorname{ch} t \operatorname{ch}(x \operatorname{sh} t)\right] dt \\ &= (\operatorname{ch} 1)\operatorname{sh}(x \operatorname{sh} 1) - x\int_0^1 \operatorname{ch}^2 t \operatorname{ch}(x \operatorname{sh} t)\,dt \\ &= (\operatorname{ch} 1)\operatorname{sh}(x \operatorname{sh} 1) - x\int_0^1 \left(1+\operatorname{sh}^2 t\right) \operatorname{ch}(x \operatorname{sh} t)\,dt \\ &= (\operatorname{ch} 1)\operatorname{sh}(x \operatorname{sh} 1) - x\int_0^1 \operatorname{ch}(x \operatorname{sh} t)\,dt - x\int_0^1 \operatorname{sh}^2 t \operatorname{ch}(x \operatorname{sh} t)\,dt \\ &= (\operatorname{ch} 1)\operatorname{sh}(x \operatorname{sh} 1) - x f(x) - x f''(x) \end{aligned}$$

Ainsi, *f* est solution de :

$$(E) : \; x y'' + y' + x y = (\operatorname{ch} 1)\operatorname{sh}(x \operatorname{sh} 1).$$

****

Comme $x \mapsto (\operatorname{ch} 1)\operatorname{sh}(x \operatorname{sh} 1)$ est impaire, on peut chercher une solution développable en série entière paire, soit de la forme $g : x \mapsto \sum_{n\geq 0} a_n x^{2n}$. On a alors sur le disque ouvert de convergence :

$$g'(x) = \sum_{n\geq 1} 2n a_n x^{2n-1} \quad \text{et} \quad g''(x) = \sum_{n\geq 1} 2n(2n-1)\, a_n x^{2n-2} .$$

En remplaçant dans l'équation :

$$\sum_{n\geq 1} 2n(2n-1)\, a_n x^{2n-1} + \sum_{n\geq 1} 2n a_n x^{2n-1} + \sum_{n\geq 0} a_n x^{2n+1} = (\operatorname{ch} 1)\sum_{n\geq 0} \frac{(x \operatorname{sh} 1)^{2n+1}}{(2n+1)!} .$$

Soit :

$$\sum_{n\geq 0} \left[4(n+1)^2 a_{n+1} + a_n\right] x^{2n+1} = (\operatorname{ch} 1)\sum_{n\geq 0} \frac{(x \operatorname{sh} 1)^{2n+1}}{(2n+1)!} .$$

Et par unicité des coefficients, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$4(n+1)^2 a_{n+1} + a_n = (\operatorname{ch} 1)\frac{\operatorname{sh}^{2n+1} 1}{(2n+1)!} .$$

En posant $u_n = (-1)^n 4^n (n!)^2 a_n$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = (\operatorname{ch} 1)(-1)^{n+1} 4^n (n!)^2 \frac{\operatorname{sh}^{2n+1} 1}{(2n+1)!} .$$

Et, par télescopage, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2}\left[u_0 + (\operatorname{ch} 1)\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{4^k (k!)^2}{(2k+1)!} \operatorname{sh}^{2k+1} 1\right].$$

Et $g : x \mapsto \sum_{n\geq 0} a_n x^{2n}$ est solution de l'équation (E).

Autre proposition. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $t \in [0,1]$, on a $\operatorname{ch}(x \operatorname{sh} t) = \sum_{n \geq 0} \frac{(x \operatorname{sh} t)^{2n}}{(2n)!}$ et :

$$\left| \frac{(x \operatorname{sh} t)^{2n}}{(2n)!} \right| \leq |x|^{2n} \frac{(\operatorname{sh} 1)^{2n}}{(2n)!}.$$

Comme la série $\sum |x|^{2n} \frac{(\operatorname{sh} 1)^{2n}}{(2n)!}$ converge, la série $t \mapsto \sum_{n \geq 0} \frac{(x \operatorname{sh} t)^{2n}}{(2n)!}$ converge normalement sur $[0,1]$, donc :

$$f(x) = \int_0^1 \operatorname{ch}(x \operatorname{sh} t)\, dt = \int_0^1 \left(\sum_{n \geq 0} \frac{(x \operatorname{sh} t)^{2n}}{(2n)!} \right) dt = \sum_{n \geq 0} \int_0^1 \frac{(x \operatorname{sh} t)^{2n}}{(2n)!}\, dt = \sum_{n \geq 0} \left(\int_0^1 \frac{\operatorname{sh}^{2n} t}{(2n)!}\, dt \right) x^{2n}.$$

Donc, f est une solution de (E) développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

****

II) Voir le cours.

Planche n° 28

On donne $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$, où a et b sont deux réels strictement positifs, et on pose $v_n = \ln\left(n^{b-a} u_n\right)$.

Montrer la convergence de $\sum (v_{n+1} - v_n)$ et en déduire une condition sur a et b pour que $\sum u_n$ converge.

Cette condition étant vérifiée, on note $f(x) = \sum_{n \geq 0} u_n x^n$. Donner le domaine de définition de f et calculer $f(1)$.

Remarquons déjà que $u_0 = 1 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $u_n > 0$, alors $u_{n+1} = \frac{n+a}{n+b} u_n > 0$. Ceci prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et donc que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien définie.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \ln\left((n+1)^{b-a} u_{n+1}\right) - \ln\left(n^{b-a} u_n\right) = (b-a) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &= (b-a) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right) = (b-a) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{b}{n}\right) \\ &= (b-a)\left[\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] + \left[\frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] - \left[\frac{b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \end{aligned}$$

D'où $v_{n+1}-v_n=O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et ainsi, $\sum(v_{n+1}-v_n)$ converge.

****

Si on pose $\sum_{n\geq 1}(v_{n+1}-v_n)=S$, on a $\sum_{k=1}^{n-1}(v_{k+1}-v_k)=v_n-v_1\to S$, donc $v_n\to S+v_1$, et :

$$n^{b-a}u_n\to e^{S+v_1}=\alpha>0$$

Comme $\alpha\neq 0$, on peut écrire $u_n\sim\dfrac{\alpha}{n^{b-a}}$ et ainsi :

$$\sum u_n \text{ converge si et seulement si } b-a>1.$$

****

Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, on a $\left|\dfrac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_nx^n}\right|=\dfrac{n+a}{n+b}|x|\xrightarrow[n\to+\infty]{}|x|$, donc le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0}u_nx^n$ est 1. Or, $\sum u_n$ converge, donc $\sum(-1)^nu_n$ aussi (elle converge absolument car $|(-1)^nu_n|=u_n$), donc f est définie en – 1 et 1 et finalement, f est définie sur $[-1,1]$.

****

On a $f(1)=\sum_{n\geq 0}u_n$. Et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(n+a)u_n=(n+b)u_{n+1}$, soit :

$$(n+1)\,u_{n+1}-nu_n=au_n-(b-1)\,u_{n+1}$$

Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+1)\,u_{k+1}-ku_k\right]=\sum_{k=0}^{n-1}\left[au_k-(b-1)\,u_{k+1}\right] &\Leftrightarrow\quad nu_n=a\sum_{k=0}^{n-1}u_k-(b-1)\sum_{k=0}^{n-1}u_{k+1}\\ &\Leftrightarrow\quad nu_n=a\sum_{k=0}^{n-1}u_k-(b-1)\sum_{k=1}^{n}u_k\\ &\Leftrightarrow\quad nu_n=(a-b+1)\sum_{k=0}^{n}u_k-au_n+b-1\end{aligned}$$

Et comme $b-a>1$, soit $b-a-1>0$, on peut écrire :

$$\sum_{k=0}^{n}u_k=\frac{b-1-nu_n-au_n}{b-a-1}.$$

Enfin, $u_n\sim\dfrac{\alpha}{n^{b-a}}$ donc $nu_n\sim\dfrac{\alpha}{n^{b-a-1}}$ et (avec toujours $b-a-1>0$), on a $u_n\to 0$ et $nu_n\to 0$.

Et donc :

$$f(1)=\sum_{n\geq 0}u_n=\frac{b-1}{b-a-1}.$$

Planche n° 29

Soit $f_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]\,;\, P \mapsto \sum_{k=0}^{n}\left(\int_0^1 P(t)\,t^k dt\right) X^k$.

a. Montrer que f_n est un automorphisme.

b. Montrer que M_n, la matrice de f_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, est diagonalisable.

c. Soit $Y = {}^t\left(y_0\ y_1\ ...\ y_n\right) \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^tYM_nY = \int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n} y_k t^k\right)^2 dt$.

d. Montrer que $Sp(f_n) \subset \mathbb{R}_+^*$.

e. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \min Sp(f_n)$. Montrer que la suite (u_n) tend vers 0.

a. L'énoncé dit que f_n est à images dans $\mathbb{R}_n[X]$ et f_n est linéaire par linéarité de l'intégrale et du sigma. Ainsi, f_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \ker f_n$.

On a alors $\sum_{k=0}^{n}\left(\int_0^1 P(t)\,t^k dt\right) X^k = 0$, soit $\int_0^1 P(t)\,t^k dt = 0$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$. Alors :

$$\int_0^1 P(t)^2 dt = \int_0^1 P(t)\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, t^k\right) dt = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^1 P(t)\,t^k dt = 0 .$$

Comme $t \mapsto P(t)^2$ est continue et positive sur $[0\,,1]$, $t \mapsto P(t)$ est nulle sur $[0\,,1]$, et P admet une infinité de racines, donc est nul.

Ceci prouve que $\ker f_n = \{0\}$, donc f_n est bijective (on est en dimension finie) et ainsi, f_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, $f_n(X^j) = \sum_{i=0}^{n}\left(\int_0^1 t^{i+j} dt\right) X^i = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+j+1} X^i$, donc $M_n = \left(\frac{1}{i+j+1}\right)_{0 \le i,j \le n}$.

Comme pour tous $i, j \in [\![0,n]\!]$, $\frac{1}{i+j+1} = \frac{1}{j+i+1}$, la matrice M_n est symétrique réelle, donc diagonalisable.

c. Posons $M_nY = {}^t\left(z_0\ z_1\ ...\ z_n\right)$. On a alors ${}^tYM_nY = \sum_{k=0}^{n} y_k z_k$ avec $z_k = \sum_{j=0}^{n}\left(\int_0^1 t^{k+j} dt\right) y_j$.

Alors : ${}^tYM_nY = \sum_{k=0}^{n} y_k \left(\sum_{j=0}^{n}\left(\int_0^1 t^{k+j} dt\right) y_j\right) = \sum_{0 \le k,j \le n}\left(\int_0^1 t^{k+j} dt\right) y_k y_j$.

Et : $\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n} y_k t^k\right)^2 dt = \int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n} y_k t^k\right)\left(\sum_{j=0}^{n} y_j t^j\right) dt = \int_0^1\left(\sum_{0 \le k,j \le n} t^{k+j} y_k y_j\right) dt = \sum_{0 \le k,j \le n}\left(\int_0^1 t^{k+j} dt\right) y_k y_j$.

Ainsi, on a bien : ${}^tYM_nY = \int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n} y_k t^k\right)^2 dt$.

d. Soit $\lambda \in Sp(f_n)$ et $Y = {}^t\left(y_0\ y_1\ \ldots\ y_n\right) \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre (non nul) associé.

On a ${}^tYM_nY = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} y_k t^k\right)^2 dt \geq 0$, mais ${}^tYM_nY = {}^tY(\lambda Y) = \lambda\, {}^tYY$ avec ${}^tYY = \sum_{k=0}^{n} y_k^2 > 0$ (non nul car Y n'est pas nul). Ainsi, $\lambda = \dfrac{{}^tYM_nY}{{}^tYY} \geq 0$.

Enfin, on a vu que f_n est bijective, donc $\lambda \neq 0$ et ainsi, $\lambda > 0$. D'où : $Sp(f_n) \subset \mathbb{R}_+^*$.

e. Soit $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les racines de χ_{f_n}, donc les valeurs propres de f_n (distinctes ou pas). On a :

$$Tr(f_n) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+k+1}.$$

Alors, avec $u_n = \min\left(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\right)$, on a $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \geq (n+1)u_n$ et avec $u_n > 0$ (d'après d.), on a :

$$0 \leq (n+1)u_n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} \leq H_{2n+2} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq u_n \leq 2\frac{H_{2(n+1)}}{2n+2}.$$

avec $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Comme $H_n \sim \ln n$, on a $\dfrac{H_n}{n} \to 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.$$

Planche n° 30

Une urne contient initialement deux boules vertes et une boule noire. A chaque étape, on tire une boule au hasard dans l'urne avec remise et l'on ajoute une boule supplémentaire de la même couleur que la boule tirée.

La variable aléatoire X (*resp.* Y) désigne le rang de la première boule verte (*resp.* noire) tirée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire Z_n désigne le nombre de boules vertes dans l'urne après n étapes. Enfin U_n, est la variable aléatoire valant 1 si la boule tirée à la $n^{\text{ième}}$ étape est verte et sinon.

a. Déterminer les lois de X et Y.

b. Exprimer Z_n en fonction de certains des U_k et déterminer $Z_n(\Omega)$.

c. Calculer $P\left(U_{n+1} = 1 \mid Z_n = k\right)$.

d. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, U_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{2}{3}$.

e. Déterminer la loi de Z_n.

a. On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$(X = k) = (U_1 = 0) \cap (U_2 = 0) \cap \ldots \cap (U_{k-1} = 0) \cap (U_k = 1).$$

Donc :

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= P\big((U_1=0)\cap(U_2=0)\cap\ldots\cap(U_{k-1}=0)\cap(U_k=1)\big)\\
&= P\big((U_1=0)\cap(U_2=0)\cap\ldots\cap(U_{k-1}=0)\big)\,P_{(U_1=0)\cap(U_2=0)\cap\ldots\cap(U_{k-1}=0)}(U_k=1)\\
&\ \vdots\\
&= P(U_1=0)\,P_{(U_1=0)}(U_2=0)\,P_{(U_1=0)\cap(U_2=0)}(U_3=0)\ldots\\
&\qquad P_{(U_1=0)\cap(U_2=0)\cap\ldots\cap(U_{k-2}=0)}(U_{k-1}=0)\,P_{(U_1=0)\cap(U_2=0)\cap\ldots\cap(U_{k-1}=0)}(U_k=1)\\
&= \frac{1}{3}\frac{2}{4}\frac{3}{5}\ldots\frac{k-1}{k+1}\frac{2}{k+2}
\end{aligned}$$

Soit :

$$P(X=k)=\frac{4}{k(k+1)(k+2)}.$$

De même :

$$P(Y=k)=\frac{2}{(k+1)(k+2)}.$$

b. Initialement, il y a 2 boules vertes et à chaque étape *k*, on rajoute une boule verte si $U_k=1$.
On a alors :

$$Z_n=2+\sum_{k=1}^{n}U_k\ .$$

Après *n* étapes, on peut avoir entre 2 boules vertes (les deux initiales et on n'a tiré que des boules noires) et $n+2$ (les deux initiales et on n'a tiré que des boules vertes), donc :

$$Z_n(\Omega)=[\![2,n+2]\!].$$

c. On veut $P_{(Z_n=k)}(U_{n+1}=1)$, autrement dit la probabilité de tirer une boule verte à la $(n+1)^{\text{ième}}$ étape sachant que l'on a *k* boules vertes dans l'urne après la $n^{\text{ième}}$ étape.

A l'issue de l'étape *n*, il y a $n+3$ boules dans l'urne (les 3 boules initiales plus une boule ajoutée à la fin de chacune de *n* étapes). A chaque étape, les boules sont équiprobables, donc :

$$P_{(Z_n=k)}(U_{n+1}=1)=\frac{k}{n+3}.$$

d. Remarquons déjà que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $U_n(\Omega)=\{0,1\}$, donc les U_n suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre $P(U_n=1)$.

On a initialement trois boules dont deux vertes, donc $P(U_1=1)=\frac{2}{3}$, et ainsi, U_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{2}{3}$.

Supposons que pour $n\in\mathbb{N}^*$, les variables $U_1,U_2,\ldots,U_n$ suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{2}{3}$.

On a alors $E(U_1)=E(U_2)=...=E(U_n)=\dfrac{2}{3}$ et, comme $Z_n=2+\sum_{k=1}^{n}U_k$, on obtient, par linéarité de l'espérance :

$$E(Z_n)=2+\sum_{k=1}^{n}E(U_k)=2+\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3}=\frac{2}{3}(n+3).$$

D'après la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned}P\left(U_{n+1}=1\right)&=\sum_{k=2}^{n+2}P_{(Z_n=k)}\left(U_{n+1}=1\right)P\left(Z_n=k\right)\\&=\sum_{k=2}^{n+2}\frac{k}{n+3}P\left(Z_n=k\right)=\frac{1}{n+3}\sum_{k=2}^{n+2}kP\left(Z_n=k\right)=\frac{E(Z_n)}{n+3}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Donc, U_{n+1} suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{2}{3}$.

Ceci prouve par récurrence forte que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, U_n suit bien une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{2}{3}$.

e. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. D'après la loi des probabilités totales, on a pour tout $k\in Z_{n+1}(\Omega)=[\![2,n+3]\!]$:

$$P\left(Z_{n+1}=k\right)=P_{(Z_n=k-1)}\left(Z_{n+1}=k\right)P\left(Z_n=k-1\right)+P_{(Z_n=k)}\left(Z_{n+1}=k\right)P\left(Z_n=k\right)$$

car pour pouvoir avoir *k* boules vertes dans l'urne après $n+1$ étapes $\left(Z_{n+1}=k\right)$, il faut qu'il y en ait soit $k-1$, soit *k* après *n* étapes.

Or, après *n* étapes, il y a $n+3$ boules dans l'urne, dont *p* vertes si $\left(Z_n=p\right)$ est réalisé pour $p=k-1$ ou k. Alors, $P_{(Z_n=k-1)}\left(Z_{n+1}=k\right)=\dfrac{k-1}{n+3}$ (il faut piocher une verte à la $(n+1)^{\text{ième}}$ étape) et $P_{(Z_n=k)}\left(Z_{n+1}=k\right)=\dfrac{n+3-k}{n+3}$ (il faut piocher une noire à la $(n+1)^{\text{ième}}$ étape) et donc :

$$P\left(Z_{n+1}=k\right)=\frac{k-1}{n+3}P\left(Z_n=k-1\right)+\frac{n+3-k}{n+3}P\left(Z_n=k\right).$$

On a :

$$\begin{cases}P\left(Z_1=2\right)=\dfrac{1}{3}\\[2mm]P\left(Z_1=3\right)=\dfrac{2}{3}\end{cases}\qquad\begin{cases}P\left(Z_2=2\right)=\dfrac{2}{4}P\left(Z_1=2\right)=\dfrac{1}{6}\\[2mm]P\left(Z_2=3\right)=\dfrac{2}{4}P\left(Z_1=2\right)+\dfrac{1}{4}P\left(Z_1=3\right)=\dfrac{2}{6}\\[2mm]P\left(Z_2=4\right)=\dfrac{3}{4}P\left(Z_1=3\right)=\dfrac{3}{6}\end{cases}$$

En poursuivant, on conjecture que $P\left(Z_n=k\right)=\dfrac{k-1}{N_n}$ et comme $\sum_{k=2}^{n+2}P\left(Z_n=k\right)=1$, on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n+2}\frac{k-1}{N_n}=\frac{1}{N_n}\sum_{k=1}^{n+1}k=\frac{1}{N_n}\frac{(n+1)(n+2)}{2}=1\quad\Rightarrow\quad N_n=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Ainsi, on conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![2, n+2]\!]$, on a $P(Z_n = k) = \dfrac{2(k-1)}{(n+1)(n+2)}$.

Prouvons-le par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n = 1$, on a $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2} = 3$ et $\begin{cases} P(Z_1 = 2) = \dfrac{1}{3} \\ P(Z_1 = 3) = \dfrac{2}{3} \end{cases}$ donc la formule est vraie.

Supposons la formule vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $k \in [\![2, n+2]\!]$

$$\begin{aligned} P(Z_{n+1} = k) &= \frac{k-1}{n+3} P(Z_n = k-1) + \frac{n+3-k}{n+3} P(Z_n = k) \\ &= \frac{k-1}{n+3} \frac{2(k-2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{n+3-k}{n+3} \frac{2(k-1)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{2(k-1)(k-2+n+3-k)}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{2(k-1)}{(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$

Et :

$$P(Z_{n+1} = n+3) = \frac{n+2}{n+3} P(Z_n = n+2) = \frac{n+2}{n+3} \frac{2(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2(n+2)}{(n+2)(n+3)}.$$

Ainsi, la formule reste vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![2, n+2]\!]$:

$$P(Z_n = k) = \frac{2(k-1)}{(n+1)(n+2)}.$$