

Corrigés de la série 2 - Centrale-Supélec

Planche n° 9

Soient P et Q deux polynômes non nuls de $\mathbb{C}_n[X]$.

On suppose que P et Q admettent une racine commune λ . Montrer qu'il existe deux polynômes U et V de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, non nuls, tels que $UP+VQ=0$.

On pose $n=2$, et on définit ϕ par $\phi(U,V)=UP+VQ$. Montrer que ϕ est linéaire de $\mathbb{C}_1[X]^2$ dans $\mathbb{C}_3[X]$ et exprimer sa matrice dans des bases à déterminer.

Donner une condition sur les coefficients de P et Q pour qu'ils n'aient aucune racine commune.

Si λ est racine commune de P et Q , alors il existe deux polynômes A et B tels que :

$$P = (X - \lambda)A \text{ et } Q = (X - \lambda)B.$$

Comme $\deg P \leq n$, on a $\deg A \leq n-1$ donc $A \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. De même, $B \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

En posant $U = B$ et $V = -A$, on a bien $U, V \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $UP+VQ=0$.

Pour tout $(U,V) \in \mathbb{C}_1[X]^2$, on a :

$$\deg \phi(U,V) \leq \max(\deg UP, \deg VQ) \leq 1+2=3 \Rightarrow \phi(U,V) \in \mathbb{C}_3[X].$$

Pour tous $(U_1, V_1), (U_2, V_2) \in \mathbb{C}_1[X]^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \phi(\lambda(U_1, V_1) + \mu(U_2, V_2)) &= \phi(\lambda U_1 + \mu U_2, \lambda V_1 + \mu V_2) = (\lambda U_1 + \mu U_2)P + (\lambda V_1 + \mu V_2)Q \\ &= \lambda(U_1 P + V_1 Q) + \mu(U_2 P + V_2 Q) = \lambda \phi(U_1, V_1) + \mu \phi(U_2, V_2) \end{aligned}$$

Donc, ϕ est bien linéaire de $\mathbb{C}_1[X]^2$ dans $\mathbb{C}_3[X]$.

Une base de $\mathbb{C}_1[X]^2$ est $\mathcal{B} = ((1,0), (X,0), (0,1), (0,X))$ et si $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2, X^3)$, la base canonique de $\mathbb{C}_3[X]$, on a, en posant $P = a + bX + cX^2$ et $Q = a' + b'X + c'X^2$:

$$A = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_c}(\phi) = \begin{pmatrix} a & 0 & a' & 0 \\ b & a & b' & a' \\ c & b & c' & b' \\ 0 & c & 0 & c' \end{pmatrix}.$$

On a vu que si P et Q admettent une racine commune, alors il existe $(U,V) \in \mathbb{C}_1[X]^2$, non nuls, tels que $\phi(U,V)=UP+VQ=0$, donc ϕ n'est pas injective, soit :

$$\det A = (ac' - a'c)^2 + (a'b - ab')(bc' - b'c) = 0.$$

Réciproquement, si $\det A = 0$, ϕ n'est pas injective, et donc alors il existe $(U,V) \in \mathbb{C}_1[X]^2$, non nuls, tels que $\phi(U,V)=UP+VQ=0$, ce qui implique que $P|VQ$. Si $\deg P = 2$, alors P admet deux

racines complexes (distinctes ou pas), et comme $\deg V \leq 1$, l'une de ces racines est racine de Q et ainsi, P et Q admettent une racine commune. De même si $\deg Q = 2$. La réciproque est donc vraie quand P ou Q est de degré 2.

Ainsi, quand $\deg P = 2$ ou $\deg Q = 2$, P et Q admettent une racine commune si et seulement si $(ac' - a'c)^2 + (a'b - ab')(bc' - b'c) = 0$.

Si P et Q sont de degrés inférieurs à 1, alors :

- si P ou Q est constant (non nul), P et Q n'admettent jamais de racine commune ;
- si $\deg P = \deg Q = 1$, on a $P = a + bX$ et $Q = a' + b'X$ avec $b \neq 0$ et $b' \neq 0$, et P et Q admettent une racine commune si et seulement s'ils sont proportionnels, soit $a'b - ab' = 0$.

Planche n° 10

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n .

Donner une relation entre l'ordre de multiplicité d'une valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé. Qu'est-ce qu'un polynôme caractéristique ? Donner le théorème de Cayley-Hamilton.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et P son polynôme caractéristique. Montrer que si $P'(0) \neq 0$, alors $\ker u = \ker u^2$.

[Pour $n = 3$, montrer que $\ker u = \ker u^2$ si et seulement si 0 est valeur propre de même ordre de multiplicité de u et u^2 .] Justifier que cette question est fautive !

Pour les premières questions voir le cours (la relation attendue entre l'ordre de multiplicité n_λ d'une valeur propre λ de $u \in \mathcal{L}(E)$ et la dimension de $\ker(u - \lambda id)$, le sous-espace propre associé est en fait une inégalité : $\dim(\ker(u - \lambda id)) \leq n_\lambda$).

Si $P(0) \neq 0$, alors 0 n'est pas valeur propre de u , donc u appartient à $GL(E)$, ainsi que u^2 , et donc $\ker u = \ker u^2 = \{0\}$.

Si $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$, alors 0 est racine simple de P ($n_0 = 1$). Alors, $1 \leq \dim(\ker u) \leq n_0 = 1$ et ainsi, $\dim(\ker u) = 1$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice de u dans une base \mathcal{B} quelconque de E , elle est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc semblable à une matrice triangulaire de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0$ où les λ_i sont réels ou complexes, mais non nuls, car 0 est racine simple de $P = X(X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_{n-1})$. Alors, A^2 , la matrice de u^2 dans la base \mathcal{B} , est semblable à une matrice triangulaire de coefficients diagonaux $\lambda_1^2, \dots, \lambda_{n-1}^2, 0$ et le polynôme caractéristique de u^2 est $P = X(X - \lambda_1^2) \dots (X - \lambda_{n-1}^2)$, qui admet 0 pour racine simple.

Comme plus haut, on obtient alors $\dim(\ker u^2) = \dim(\ker u) = 1$ et comme on a toujours $\ker u \subset \ker u^2$, on a finalement : $\ker u = \ker u^2$.

Quel que soit u , 0 est toujours valeur propre de même ordre de multiplicité de u et u^2 : il suffit, comme plus haut, de considérer une matrice de u et de la trigonaliser dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Planche n° 11

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant la relation (E): $A^2 = {}^t A$.

- Dans cette question seulement, on suppose que $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. A quelle condition sur a et b la matrice A vérifie-t-elle (E) ? Donner les couples (a, b) solutions.
- Trouver un polynôme de degré 4 annulateur de A .
- Montrer que A^3 est la matrice d'un projecteur et qu'elle est symétrique.
- Montrer que $\ker A^3 = \ker A$ et $\text{Im } A^3 = \text{Im } A$.
- Soit F un sous-espace de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On dit que F est stable par A si pour tout $X \in F$, $AX \in F$. Montrer que si F est stable par A , alors F^\perp aussi.
- Soit $Y \in \text{Im } A$. On note $F_Y = \text{Vect}(Y, AY, A^2Y)$. Montrer que l'application $X \mapsto AX$ induit une isométrie sur F_Y , puis reconnaître cette isométrie.

a) On a $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}$, donc A vérifie (E) si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} a^2 - b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = a \\ 2ab = -b \end{cases}.$$

Et :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = a \\ 2ab = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = a \\ b = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b^2 = a^2 - a \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Les couples (a, b) solutions sont donc : $(0, 0)$, $(1, 0)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

b) On a $A^2 = {}^t A$, donc $A = {}^t(A^2) = ({}^t A)^2 = (A^2)^2 = A^4$. Ainsi, $P = X^4 - X$ est annulateur de A .

c) On vient de voir que $A^4 = A$, donc, en multipliant par A^2 , on obtient $A^6 = (A^3)^2 = A^3$, donc A^3 est la matrice d'un projecteur et qu'elle est symétrique.

Alors, $A^3 = A^2 A = {}^t A A$, donc ${}^t(A^3) = ({}^t A)^3 = (A^2)^3 = A^6 = A^3$ et A^3 est symétrique.

d) On a toujours $\ker A \subset \ker A^3 \subset \ker A^4$ et $\text{Im } A^4 \subset \text{Im } A^3 \subset \text{Im } A$.

Comme $A^4 = A$, on a immédiatement : $\ker A^3 = \ker A$ et $\text{Im } A^3 = \text{Im } A$.

e) On suppose F stable par A .

Soit $X \in F^\perp$, donc pour tout $Y \in F$, $(X | Y) = 0$. On veut $AX \in F^\perp$, autrement dit, pour tout $Z \in F$, $(AX | Z) = 0$.

Soit donc $Z \in F$. On a : $(AX | Z) = {}^t X {}^t AZ = {}^t X A^2 Z = (X | A^2 Z)$. Or, F stable par A , donc par A^2 , et ainsi, $A^2 Z \in F$, donc $(X | A^2 Z) = 0$. Ainsi, $(AX | Z) = 0$, ce qui prouve que F^\perp est stable par A .

f) Remarquons que, comme $Y \in \text{Im } A = \text{Im } A^3$ et A^3 est une matrice de projecteur, on a $A^3 Y = Y$.

On a alors :

$$\left. \begin{aligned} (AY | Y) &= {}^t Y {}^t AY = {}^t Y A^2 Y = (Y | A^2 Y) \\ (AY | A^2 Y) &= {}^t Y {}^t A A^2 Y = {}^t Y A^4 Y = {}^t Y A Y = (Y | AY) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (Y | AY) = (Y | A^2 Y) = (AY | A^2 Y) = \alpha.$$

$$\left. \begin{aligned} (AY | AY) &= {}^t Y {}^t A A Y = {}^t Y A^3 Y = {}^t Y Y = (Y | Y) \\ (A^2 Y | A^2 Y) &= {}^t Y {}^t (A^2) A^2 Y = {}^t Y A^6 Y = {}^t Y A^3 Y = (Y | Y) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (Y | Y) = (AY | AY) = (A^2 Y | A^2 Y) = \beta.$$

$$A = {}^t (A^2) = ({}^t A)^2 = (A^2)^2 = A^4$$

Alors, pour tout $X = aY + bAY + cA^2 Y \in F_Y$, on a :

$$\begin{aligned} \|X\|^2 &= a^2 (Y | Y) + b^2 (AY | AY) + c^2 (A^2 Y | A^2 Y) + 2ab (Y | AY) + 2ac (Y | A^2 Y) + 2bc (AY | A^2 Y) \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)\beta + 2(ab + ac + bc)\alpha \\ \|AX\|^2 &= \|aAY + bA^2 Y + cA^3 Y\|^2 = \|aAY + bA^2 Y + cY\|^2 \\ &= c^2 (Y | Y) + a^2 (AY | AY) + b^2 (A^2 Y | A^2 Y) + 2ac (Y | AY) + 2bc (Y | A^2 Y) + 2ab (AY | A^2 Y) \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)\beta + 2(ab + ac + bc)\alpha \end{aligned}$$

Ainsi, $\|X\| = \|AX\|$ et donc, l'application $u_Y : F_Y \rightarrow F_Y ; X \mapsto AX$ est une isométrie.

- Si $Y = 0$, $F_Y = \{0\}$ et u_Y est l'identité.
- Si $Y \neq 0$ et $AY = \lambda Y$, alors on a $\lambda = 0$ ou 1 (car $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ et $X^4 - X$ est annulateur de A , donc $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{0, 1\}$). Mais, $\lambda \neq 0$, car sinon, on aurait $Y \in \text{Im } A \cap \ker A = \{0\}$, ce qui est absurde. Donc $AY = Y$, $F_Y = \text{Vect}(Y)$ et u_Y est l'identité.
- Si (Y, AY) est libre et $A^2 Y = aY + bAY$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors :

$$Y = A^3 Y = A(aY + bAY) = aAY + bA^2 Y = aAY + b(aY + bAY) = abY + (a + b^2)AY.$$

Donc :

$$\begin{cases} ab = 1 \\ a + b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^3 = -1 \\ a = -b^2 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = -1.$$

Ainsi, $A^2 Y = -Y - AY$. La famille (Y, AY) est alors une base de F_Y que l'on prend directe, dans laquelle la matrice de l'isométrie u_Y est :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\det B = 1$, u_Y est une rotation d'angle $\theta = \frac{2\pi}{3}$ (car $\text{Tr}(B) = 2 \cos \theta = -1$).

- Si (Y, AY, A^2Y) est libre, alors c'est une base de F_Y dans laquelle la matrice de u_Y est :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est orthogonale, de déterminant 1 (il suffit d'échanger la 1^{ère} colonne et la 3^{ème}, puis la 2^{ème} colonne et la 3^{ème} pour obtenir I_3) : c'est une matrice de rotation. On trouve un axe dirigé par $Y + AY + A^2Y$ et un angle $\theta = \pm \frac{2\pi}{3}$ (car $\text{Tr}(B) = 1 + 2\cos\theta = 0$, donc $\cos\theta = -\frac{1}{2}$).

Enfin, si $X = Y - AY$, on a $X \wedge BX = Y + AY + A^2Y$, donc $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Ainsi, u_Y est la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et d'axe $\text{Vect}(Y + AY + A^2Y)$.

Planche n° 12

Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, $P = X^n - nX + 1$ admet une unique racine $x_n \in]0, 1[$.

Trouver un équivalent simple a_n de x_n , puis de $x_n - a_n$.

Pour $n \geq 3$, soit $f_n : x \mapsto x^n - nx + 1$, dérivable sur $[0, 1]$ avec $f_n'(x) = n(x^{n-1} - 1) \leq 0$ (avec égalité en 1 uniquement), donc, sur $[0, 1]$, f_n est continue et strictement décroissante de $f_n(0) = 1 > 0$ à $f_n(1) = 2 - n < 0$ (car $n \geq 3$). D'après le théorème de la bijection continue, f_n s'annule exactement une fois dans $]0, 1[$ et ainsi, $P = X^n - nX + 1$ admet une unique racine $x_n \in]0, 1[$.

On a :

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - (n+1)x_n + 1 = x_n^{n+1} - nx_n - x_n + 1 = x_n^{n+1} - x_n^n + f_n(x_n) - x_n = (x_n - 1)x_n^n - x_n < 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$$

Et comme f_{n+1} est strictement décroissante sur $[0, 1]$, on obtient $x_n > x_{n+1}$, donc la suite $(x_n)_{n \geq 3}$ est strictement décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge vers un réel $\ell \in [0, 1]$.

Or, pour tout entier $n \geq 3$, $f_n(x_n) = x_n^n - nx_n + 1 = 0$, donc $nx_n = x_n^n + 1$. Avec $\ell \in [0, 1]$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n^n + 1) = 1 \text{ et donc : } \underline{x_n \sim \frac{1}{n}}.$$

Posons alors $\varepsilon_n = nx_n - 1 = n\left(x_n - \frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$ car $x_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. La relation $x_n^n - nx_n + 1 = 0$ se réécrit :

$$\varepsilon_n n^n = (1 + \varepsilon_n)^n.$$

Avec la stricte décroissance de f_n sur $[0, 1]$, on a par ailleurs :

- $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^n} > 0 = f_n(x_n) \Rightarrow \frac{1}{n} < x_n$;

$$\bullet \text{ apcr : } f_n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right) = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right)^n - \frac{1}{n^2} < 0 = f_n(x_n) \Rightarrow x_n < \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}.$$

Donc $\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}$, soit : $0 < n\varepsilon_n < \frac{1}{n}$. Ainsi, $n\varepsilon_n \rightarrow 0$ et comme $\varepsilon_n \rightarrow 0$:

$$n^n \varepsilon_n = (1 + \varepsilon_n)^n = e^{n \ln(1 + \varepsilon_n)} = e^{n\varepsilon_n + o(n\varepsilon_n)} \rightarrow 1 \Rightarrow \varepsilon_n \sim \frac{1}{n^n}.$$

$$\text{Ainsi, } x_n = \frac{1}{n}(1 + \varepsilon_n) = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n^n} + o\left(\frac{1}{n^n}\right)\right), \text{ soit : } x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{n+1}} + o\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right).$$

Planche n° 13

Soit $p \in]0, 1[$. On se donne une pièce qui tombe sur pile avec la probabilité p . On la lance jusqu'à obtenir deux fois pile et on appelle X le nombre de faces obtenus.

- Donner la loi de X .
- Montrer l'existence et donner la valeur de l'espérance de X .
- Si $X = n$, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne. On pioche une boule au hasard et Y désigne le numéro de la boule piochée. Donner la loi de Y et son espérance.

a. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour que $(X = n)$ se réalise, il faut avoir fait $n+2$ lancers et obtenu exactement une fois pile lors des $n+1$ premiers lancers et pile au $(n+2)^{\text{ième}}$ lancer.

Si, pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on note $(P_1 = k)$ l'évènement : « on a obtenu pile aux $k^{\text{ième}}$ et $(n+2)^{\text{ième}}$ lancers et face sinon », on a $P(P_1 = k) = p^2(1-p)^n$ et :

$$P(X = n) = \sum_{k=1}^{n+1} P(P_1 = k) = (n+1)p^2(1-p)^n.$$

b. Sous réserve de convergence, on a :

$$E(X) = \sum_{n \geq 0} nP(X = n) = \sum_{n \geq 1} n(n+1)p^2(1-p)^n = p^2(1-p) \sum_{n \geq 1} n(n+1)(1-p)^{n-1}.$$

Or, si on pose $f(x) = \sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$, f est C^∞ sur $] -1, 1[$ et pour tout $x \in] -1, 1[$:

$$f'(x) = \sum_{n \geq 1} nx^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ et } f''(x) = \sum_{n \geq 1} n(n+1)x^{n-1} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Ainsi, $\sum_{n \geq 1} n(n+1)(1-p)^{n-1} = \frac{2}{p^3}$ et donc, X admet une espérance qui est :

$$E(X) = 2 \frac{1-p}{p}.$$

c. On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$.

Pour pouvoir avoir $Y = k$, il faut que $X \geq k$ et dans ce cas, pour $X = n \geq k$, les $n+1$ numéros sont équiprobables, donc $P_{(X=n)}(Y = k) = \frac{1}{n+1}$. On a alors, avec la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \sum_{n \geq k} P(X = n) P_{(X=n)}(Y = k) = \sum_{n \geq k} (n+1) p^2 (1-p)^n \frac{1}{n+1} \\ &= p^2 \sum_{n \geq k} (1-p)^n = p^2 (1-p)^k \frac{1}{1-(1-p)} = p(1-p)^k \end{aligned}$$

Et :

$$E(Y) = \sum_{k \geq 0} k P(Y = k) = \sum_{n \geq 1} k p(1-p)^k = p(1-p) \sum_{n \geq 1} k(1-p)^{k-1} = \frac{p(1-p)}{(1-(1-p))^2} = \frac{1-p}{p}.$$

Planche n° 14

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre

$p \in]0, 1[$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $T_n = \frac{1}{S_n}$ et $m_n = E(T_n)$ si elle existe.

a. Calculer $E(X_1)$ et $E(S_n)$.

b. Montrer que $m_n \leq \frac{1}{n}$.

c. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $E\left(\frac{X_k}{S_n}\right) = \frac{1}{n}$.

d. Montrer que $E\left(\frac{S_k}{S_n}\right)$ vaut $1 + \frac{k-n}{p} m_n$ quand $k > n$ et $\frac{k}{n}$ sinon.

a. On a $E(X_1) = \frac{1}{p} = E(X_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $E(S_n) = \sum_{k=1}^n E(X_k) = \frac{n}{p}$.

b. On a $S_n(\Omega) = \{k \in \mathbb{N}^* \mid k \geq n\}$, donc $\sum_{k \geq n} P(S_n = k) = 1$ et :

$$m_n = \sum_{k \geq n} \frac{1}{k} P(S_n = k) \leq \sum_{k \geq n} \frac{1}{n} P(S_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{k \geq n} P(S_n = k) = \frac{1}{n}.$$

c. Comme les X_k suivent toutes la même loi, les $\frac{X_k}{S_n}$ aussi et $E\left(\frac{X_1}{S_n}\right) = E\left(\frac{X_2}{S_n}\right) = \dots = E\left(\frac{X_n}{S_n}\right)$.

Alors, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$nE\left(\frac{X_k}{S_n}\right) = E\left(\frac{X_1}{S_n}\right) + \dots + E\left(\frac{X_n}{S_n}\right) = E\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{S_n}\right) = E\left(\frac{S_n}{S_n}\right) = E(1) = 1 \Rightarrow E\left(\frac{X_k}{S_n}\right) = \frac{1}{n}.$$

d. Si $k \leq n$, on a :

$$E\left(\frac{S_k}{S_n}\right) = E\left(\frac{X_1 + \dots + X_k}{S_n}\right) = E\left(\frac{X_1}{S_n}\right) + \dots + E\left(\frac{X_k}{S_n}\right) = k E\left(\frac{X_k}{S_n}\right) = \frac{k}{n}.$$

Si $k > n$, on a :

$$E\left(\frac{S_k}{S_n}\right) = E\left(\frac{X_1 + \dots + X_n + X_{n+1} + \dots + X_k}{S_n}\right) = E\left(1 + \frac{X_{n+1} + \dots + X_k}{S_n}\right) = 1 + E\left(\frac{X_{n+1}}{S_n}\right) + \dots + E\left(\frac{X_k}{S_n}\right).$$

Comme, plus haut, on a $E\left(\frac{X_{n+1}}{S_n}\right) = \dots = E\left(\frac{X_k}{S_n}\right)$. De plus, comme $k \notin \llbracket 1, n \rrbracket$, les variables X_k et

$S_n = X_1 + \dots + X_n$ sont indépendantes, donc X_k et $\frac{1}{S_n}$ aussi, donc :

$$E\left(\frac{X_k}{S_n}\right) = E\left(X_k \frac{1}{S_n}\right) = E(X_k) E\left(\frac{1}{S_n}\right) = E(X_k) E(T_n) = \frac{m_n}{p}.$$

Et ainsi :

$$E\left(\frac{S_k}{S_n}\right) = 1 + \sum_{i=n+1}^k E\left(\frac{X_i}{S_n}\right) = 1 + (k-n) E\left(\frac{X_k}{S_n}\right) = 1 + (k-n) \frac{m_n}{p}.$$

Ainsi, on a bien :

$$E\left(\frac{S_k}{S_n}\right) = \begin{cases} \frac{k}{n} & \text{quand } k \leq n \\ 1 + \frac{k-n}{p} m_n & \text{quand } k > n \end{cases}$$

Planche n° 15

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{1+x^2} & \text{quand } y \geq 0 \\ 0 & \text{quand } y < 0 \end{cases}$$

- La fonction f est-elle continue ? de classe C^1 ? Déterminer ses lignes de niveau.
- On considère une droite D_α de \mathbb{R}^2 , de pente α et passant par le point $P = (1, 1)$. Soient S la surface de \mathbb{R}^3 d'équation $z = f(x, y)$ et C la courbe tracée sur S et dont la projection orthogonale sur le plan d'équation $z = 0$ est D_α . Soit M un point de C . Déterminer la tangente à C en M .

a. La fonction $(x, y) \mapsto \frac{y}{1+x^2}$, définie sur \mathbb{R}^2 , est rationnelle, donc elle est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Alors, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ avec $\Delta = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,0)} \frac{y}{1+x^2} = 0 = f(a,0) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,0^+)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,0^-)} f(x,y).$$

Donc, f est continue sur Δ .

Par contre, on a $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,0^+)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+x^2} \neq \lim_{(x,y) \rightarrow (a,0^-)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$, donc f n'est pas C^1 en $(a,0)$.

Ainsi, f est continue sur \mathbb{R}^2 et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$.

Soit $k \in \mathbb{R}$. Appelons \mathcal{L}_k la ligne de niveau $\mathcal{L}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = k\}$.

On a déjà $\mathcal{L}_k = \emptyset$ quand $k < 0$ et $\mathcal{L}_0 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-$.

Pour $k > 0$, on a :

$$(x,y) \in \mathcal{L}_k \Leftrightarrow f(x,y) = \frac{y}{1+x^2} = k \Leftrightarrow y = k(1+x^2).$$

Donc, quand $k > 0$, \mathcal{L}_k est la parabole d'équation $y = k(1+x^2)$.

b. L'équation réduite de D_α est $y = \alpha(x-1)+1$, donc la courbe C peut être paramétrée par :

$$C : \begin{cases} x \\ \alpha(x-1)+1 \\ f(x, \alpha(x-1)+1) \end{cases}$$

Si elle existe, la tangente à C en un point $M(x, \alpha(x-1)+1, f(x, \alpha(x-1)+1))$ de C passe par M et est dirigée par $\vec{t}(1, \alpha, g'(x))$ avec $g(x) = f(x, \alpha(x-1)+1)$.

- Si $\alpha = 0$, on a $g(x) = f(x,1) = \frac{1}{1+x^2}$ et $\vec{t}\left(1, 0, -\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha > 0$, on a $\alpha(x-1)+1 \leq 0$ quand $x \leq 1 - \frac{1}{\alpha}$, donc $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{quand } x \leq 1 - \frac{1}{\alpha} \\ \frac{\alpha(x-1)+1}{1+x^2} & \text{quand } x > 1 - \frac{1}{\alpha} \end{cases}$.

Alors, $\vec{t}(1, \alpha, 0)$ pour tout $x < 1 - \frac{1}{\alpha}$ (la tangente est D_α), $\vec{t}\left(1, \alpha, \frac{-\alpha x^2 + 2(\alpha-1)x + \alpha}{(1+x^2)^2}\right)$ pour

tout $x > 1 - \frac{1}{\alpha}$ et il n'y a pas de tangente quand $x = 1 - \frac{1}{\alpha}$ (il y a deux demi-tangentes).

- Si $\alpha < 0$, on a $\alpha(x-1)+1 \leq 0$ quand $x \geq 1 - \frac{1}{\alpha}$, et c'est le contraire de ci-dessus (et toujours pas de tangente quand $x = 1 - \frac{1}{\alpha}$).

Voici l'allure de S :

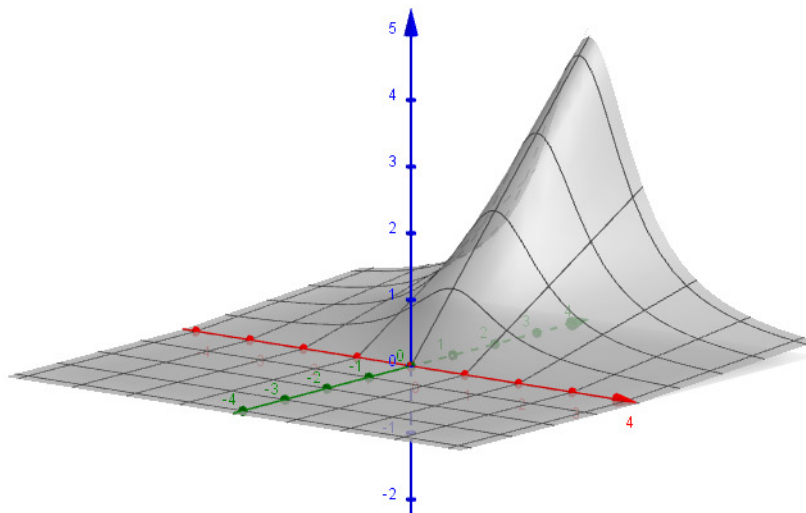


Planche n° 16

On cherche à résoudre $2xy'(x) - 2y(-x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

Montrer que toute fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Montrer que le problème, sous certaines conditions supplémentaires que l'on précisera, se ramène à deux équations différentielles d'ordre 1 et résoudre.

La première question est du cours : pour tout $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f_p + f_i$ avec $f_p : x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2}$

paire et $f_i : x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ impaire.

Soit f une éventuelle solution du problème sur \mathbb{R} . La fonction f est alors dérivable sur \mathbb{R} et, avec les notations ci-dessus, f_p et f_i le sont aussi avec f_p' impaire et f_i' paire.

On alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 2xf'(x) - 2f(-x) = \frac{x}{x^2 + 1} &\Leftrightarrow xf_p'(x) + xf_i'(x) - f_p(-x) - f_i(-x) = \frac{1}{2} \frac{x}{x^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow xf_p'(x) + xf_i'(x) - f_p(x) + f_i(x) = \frac{1}{2} \frac{x}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Or, f_p' et f_i' sont respectivement impaire et paire, donc $x \mapsto xf_p'(x)$ et $x \mapsto xf_i'(x)$ est sont respectivement paire et impaire.

Ainsi :

$$2xf'(x) - 2f(-x) = \frac{x}{x^2 + 1} \Leftrightarrow \underbrace{[xf_p'(x) - f_p(x)]}_{\text{paire}} + \underbrace{[xf_i'(x) + f_i(x)]}_{\text{impaire}} = \frac{1}{2} \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Comme $x \mapsto \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1}$ est impaire, on obtient, grâce à l'unicité de sa décomposition en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire :

$$2xf'(x) - 2f(-x) = \frac{x}{x^2+1} \Leftrightarrow \begin{cases} xf_p'(x) - f_p(x) = 0 \\ xf_i'(x) + f_i(x) = \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} \end{cases}$$

Donc, f_p est solution paire sur \mathbb{R} de (E_1) : $xy' - y = 0$ et f_i est solution impaire sur \mathbb{R} de (E_2) : $xy' + y = \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1}$.

Les solutions de (E_1) , sont les fonctions $x \mapsto kx$ avec k constante. La seule solution paire est donc la fonction nulle.

En remarquant que $x \mapsto xf_i'(x) + f_i(x)$ est la dérivée de $x \mapsto xf_i(x)$ (qui s'annule en 0), on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$xf_i(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{t}{t^2+1} dt = \frac{1}{4} \ln(x^2+1).$$

Remarquons que la fonction $g : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{4} \frac{\ln(x^2+1)}{x} & \text{quand } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{quand } x = 0 \end{cases}$ est définie et impaire sur \mathbb{R} , et

dérivable sur \mathbb{R}^* .

De plus, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\frac{\ln(x^2+1)}{x} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{2n+1}$, donc g est développable en série entière au voisinage de 0, donc entre autres dérivable en 0 et donc, g est dérivable sur \mathbb{R} , donc est l'unique solution impaire sur \mathbb{R} de (E_2) .

Finalement, la seule solution est $g : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{4} \frac{\ln(x^2+1)}{x} & \text{quand } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{quand } x = 0 \end{cases}$.