Corrigés de la série 5 - CCINP

Planche n° 19

I) Donner un équivalent de $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ quand n tend vers $+\infty$.

II) Montrer que $(P \mid Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Montrer que $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = 0\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$, donner sa dimension et calculer $d(1, E)$.

I) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} = \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

avec $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t}}$, continue sur $[0,1]$. Comme l'expression $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ est une somme de Riemann de *f*, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = 2(\sqrt{2}-1).$$

Alors :

$$u_n \sim 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}.$$

****

II) L'application $(P,Q) \mapsto (P \mid Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$ est définie sur $\mathbb{R}_n[X]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, clairement symétrique et bilinéaire (par linéarité de la dérivation et du Σ).

De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $(P \mid P) = \sum_{k=0}^{n} \left(P^{(k)}(1)\right)^2 \geq 0$ et, avec la formule de Taylor :

$$(P \mid P) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, k \in [\![0,n]\!],\ P^{(k)}(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k = 0.$$

Finalement, $(P,Q) \mapsto (P \mid Q)$ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, symétrique, définie, positive, donc c'est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

****

On a $0 \in E$ et, toute combinaison linéaire de polynômes s'annulant en 1 s'annule aussi en 1, donc $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = 0\}$ est bien un sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$.

De plus, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ appartient à *E* si et seulement si 1 est racine de *P*, donc si et seulement s'il se factorise par $X-1$, donc :

$E=\{(X-1)Q, Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X]\}=\mathrm{Vect}\left(X-1, X(X-1), X^2(X-1), \dots, X^{n-1}(X-1)\right)$.

On a $\left(X-1, X(X-1), X^2(X-1), \dots, X^{n-1}(X-1)\right)=\left(X-1, X^2-X, X^3-X^2, \dots, X^n-X^{n-1}\right)$, donc cette famille est libre car échelonnée en degrés. Comme elle est génératrice, c'est une base de E et comme elle contient $n-1$ polynômes :

$$\dim E=n-1.$$

****

Remarquons que pour tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$, on a $(P\,|\,1)=P(1)$. Donc, $E=(1)^\perp$, soit $E^\perp=\mathrm{Vect}(1)$.

Si p_E est la projection orthogonale sur E, on a $d(1,E)=\|1-p_E(1)\|$ et comme $1\in E^\perp$, on obtient :

$$d(1,E)=\|1\|=1.$$

Planche n° 20

I) Ecrire la matrice de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x-2y+z=0$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

II) On lance n fois un dé et on note X_k le chiffre obtenu au $k^{\text{ième}}$ lancer.

Donner la loi et la fonction de répartition F de X_k.

Donner, en fonction de F, la fonction de répartition F_n du maximum M_n atteint au cours des n lancers. La suite (F_n) converge-t-elle ? Uniformément ?

Mêmes questions pour le minimum m_n.

I) Posons :

$$H=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x-2y+z=0\right\}=\left\{(x,y,-x+2y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}=\mathrm{Vect}(u,v)$$

avec $u=(1,0,-1)$ et $v=(0,1,2)$.

Le vecteur $w=(1,-2,1)$ est normal à H et (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Soient $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et p la projection orthogonale sur H.

On a, pour tout $j\in\{1,2,3\}$, $e_j=a_{1,j}u+a_{2,j}v+a_{3,j}w$, donc :

$$p(e_j)=a_{1,j}u+a_{2,j}v=e_j-a_{3,j}w.$$

De plus, $(e_j\,|\,w)=a_{3,j}\,(w\,|\,w)=a_{3,j}\|w\|^2$, donc :

$$p(e_j)=e_j-\frac{(e_j\,|\,w)}{\|w\|^2}w=e_j-\frac{1}{6}(e_j\,|\,w)(e_1-2e_2+e_3).$$

Soit :

$$\left.\begin{array}{l} p(e_1)=e_1-\frac{1}{6}(e_1-2e_2+e_3)=\frac{1}{6}(5e_1+2e_2-e_3) \\ p(e_2)=e_2+\frac{1}{3}(e_1-2e_2+e_3)=\frac{1}{3}(e+e_2+e_3) \\ p(e_3)=e_3-\frac{1}{6}(e_1-2e_2+e_3)=\frac{1}{6}(-e_1+2e_2+5e_3) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad M_{\mathcal{B}}(p)=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

****

II) Remarquons que les lancers sont indépendants, donc les variables X_k sont indépendantes.

Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $X_k(\Omega)=[\![1,6]\!]$ et les faces du dé sont équiprobables, donc pour tout $i\in[\![1,6]\!]$:

$$P\left(X_k=i\right)=\frac{1}{6}.$$

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F(x)=P\left(X_k\le x\right)$ (les X_k suivant toutes la même loi, elles ont toutes la même fonction de répartition *F*) et :

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{quand } x<0 \\ \dfrac{E(x)}{6} & \text{quand } 0\le x<6 \\ 1 & \text{quand } x\ge 6 \end{cases}.$$

****

On a $M_n(\Omega)=[\![1,6]\!]$ et pour tout $i\in[\![1,6]\!]$, $P\left(M_n\le i\right)=P\left(X_1\le i, X_2\le i,\dots,X_n\le i\right)$. Comme les X_k sont indépendantes, on obtient $P\left(M_n\le i\right)=P\left(X_1\le i\right)P\left(X_2\le i\right)\dots P\left(X_n\le i\right)$, et comme les X_k suivent toutes la même loi, $P\left(M_n\le i\right)=\left[P\left(X_1\le i\right)\right]^n$. Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$F_n(x)=\left(F(x)\right)^n.$$

Pour tout $x\in\,]-\infty,6[$, on a $0\le F(x)<1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(F(x)\right)^n=0$ et pour tout $x\in[6,+\infty[$, on a $F(x)=1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(F(x)\right)^n=1$. Ainsi, (F_n) converge simplement vers *f* telle que :

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{quand } x<6 \\ 1 & \text{quand } x\ge 6 \end{cases}$$

On a de plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$F_n(x)-f(x)=\begin{cases} 0 & \text{quand } x<0 \\ \left(\dfrac{E(x)}{6}\right)^n & \text{quand } 0\le x<6 \\ 0 & \text{quand } x\ge 6 \end{cases}$$

Donc, $\left|F_n(x)-f(x)\right|\le\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{5}{6}\right)^n=0$, la convergence est uniforme.

****

Pour $x \in \mathbb{R}$, l'évènement $(m_n \leq x)$ est réalisé si et seulement s'il existe $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $(X_k \leq x)$, autrement dit $(X_1 \leq x)$ ou $(X_k \leq x)$ ou … ou $(X_n \leq x)$ est réalisé. On a donc :

$$(m_n \leq x) = \bigcup_{k \in [\![1,n]\!]} (X_k \leq x).$$

Alors, $\overline{(m_n \leq x)} = \bigcap_{k \in [\![1,n]\!]} \overline{(X_k \leq x)}$, donc, avec l'indépendance des X_k, donc des $\overline{(X_k \leq x)}$:

$$P\left(\overline{(m_n \leq x)}\right) = P\left(\bigcap_{k \in [\![1,n]\!]} \overline{(X_k \leq x)}\right) = \prod_{k \in [\![1,n]\!]} P\left(\overline{(X_k \leq x)}\right).$$

Comme les X_k suivent toutes la même loi, on a $P\left(\overline{(X_k \leq x)}\right) = P\left(\overline{(X_1 \leq x)}\right)$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ et :

$$P\left(\overline{(m_n \leq x)}\right) = \left[P\left(\overline{(X_1 \leq x)}\right)\right]^n = \left[1 - P(X_1 \leq x)\right]^n = (1 - F(x))^n.$$

Finalement, si G_n est la fonction de répartition F_n de m_n, on obtient :

$$G_n(x) = P(m_n \leq x) = 1 - P\left(\overline{(m_n \leq x)}\right) = 1 - (1 - F(x))^n.$$

On a :

$$1 - F(x) = \begin{cases} 1 & \text{quand } x < 1 \\ 1 - \dfrac{E(x)}{6} & \text{quand } 1 \leq x < 6, \\ 0 & \text{quand } x \geq 6 \end{cases}$$

donc $(1 - F(x))^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{quand } x < 1 \\ 0 & \text{quand } x \geq 1 \end{cases}$ et ainsi, (G_n) converge simplement vers g telle que :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{quand } x < 1 \\ 1 & \text{quand } x \geq 1 \end{cases}$$

On a de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|G_n(x) - g(x)| = \begin{cases} 0 & \text{quand } x < 1 \\ \left(1 - \dfrac{E(x)}{6}\right)^n & \text{quand } 1 \leq x < 6 \\ 0 & \text{quand } x \geq 6 \end{cases}$$

Alors, $|G_n(x) - g(x)| \leq \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{5}{6}\right)^n = 0$, donc, là encore, la convergence est uniforme.

Planche n° 21

I) Une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie $M^2 + 4I_2 = 0_2$ et $S = {}^tMM = M\,{}^tM$.

Trouver un polynôme annulateur de degré 2 de *S*. En déduire que $\dfrac{1}{2}M$ est orthogonale.

Déterminer toutes les matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2+4I_2=0_2$ et ${}^tMM=M\,{}^tM$.

II) Etude de l'arc paramétré $\left(x(t)=\dfrac{1}{t}+\ln(2+t)\ ,\ y(t)=t+\dfrac{1}{t}\right)$. On précisera en particulier les tangentes parallèles aux axes du repère, les branches infinies, les points particuliers de l'arc.

I) On a $S^2=({}^tMM)(M\,{}^tM)={}^tMM^2\,{}^tM$ et $M^2+4I_2=0_2$, donc $M^2=-4I_2$ et ainsi :

$$S^2=-4({}^tM)^2=-4\,{}^t(M^2)=-4\,{}^t(-4I_2)=16I_2 \quad\Rightarrow\quad S^2-16I_2=0_2.$$

Donc, X^2-16 est un polynôme de degré 2 annulateur de S.

Comme $X^2-16=(X-4)(X+4)$, on a $Sp(S)\subset\{-4,4\}$.

De plus, si $\lambda\in\mathbb{R}$ est une valeur propre de S, et X (non nul) un vecteur propre associé, on a :

$${}^tXSX={}^tX(\lambda X)=\lambda\|X\|^2={}^tX\,{}^tMMX={}^t(MX)MX=\|MX\|^2 \quad\Rightarrow\quad \lambda\geq 0.$$

Donc, $Sp(S)\subset\{4\}$.

Enfin, ${}^tS={}^t({}^tMM)={}^tM\,{}^t({}^tM)={}^tMM=S$, donc S est une matrice symétrique réelle : elle est diagonalisable. Et comme sa seule valeur propre possible est 4, S est semblable à $4I_2$, donc :

$$S=4I_2.$$

On a donc ${}^tMM=M\,{}^tM=4I_2$, d'où ${}^tNN=N\,{}^tN=I_2$ avec $N=\dfrac{1}{2}M$ et ainsi, $\dfrac{1}{2}M$ est orthogonale.

****

Soit $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2+4I_2=0_2$ et $S={}^tMM=M\,{}^tM$ (s'il y en a).

On vient de voir que $N=\dfrac{1}{2}M$ est orthogonale (donc inversible) et on a $M^2+4I_2=0_2$, soit $N^2=-I_2=-\,{}^tNN$. Ceci donne ${}^tN=-N$, donc N est antisymétrique. Comme elle est 2×2 :

$$N=a\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}.$$

Alors, $N^2=-a^2I_2$ et comme $N^2=-I_2$, on obtient $a^2=-1$ et ainsi, $N=\pm\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, donc :

$$M=2N=\pm 2\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}.$$

Réciproquement, $M=\pm\begin{pmatrix}0&2\\-2&0\end{pmatrix}$, on a ${}^tM=-M$, donc commute avec M et $M^2+4I_2=0_2$, donc les solutions du problème sont : $\begin{pmatrix}0&2\\-2&0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0&-2\\2&0\end{pmatrix}$.

****

II) Notons $\mathscr{C}$ la courbe recherchée. On a :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t} + \ln(2+t) \\[2mm] y(t) = t + \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

L'ensemble de définition est $D =]-2,0[\cup]0,+\infty[$.

Les fonctions x et y sont C^∞ sur D et $\begin{cases} x'(t) = -\dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{2+t} = \dfrac{(t+1)(t-2)}{t^2(2+t)} \\[2mm] y'(t) = 1 - \dfrac{1}{t^2} = \dfrac{(t+1)(t-1)}{t^2} \end{cases}$. On obtient le tableau :

t	-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
x	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$1+\ln 3$	$\searrow$	$1/2+\ln 4$	$\nearrow$	$+\infty$
y	$-5/2$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$5/2$	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$		$+$	

- $\underline{t \to -2}$: Asymptote horizontale Δ_1 d'équation $y = -\dfrac{5}{2}$. $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ_1.

- $\underline{t = -1}$: Point stationnaire, tangente dirigée par $\vec{u}\,(3,2)$.

- $\underline{t \to 0}$: $\dfrac{y(t)}{x(t)} \to 1$ et $y(t) - x(t) \to -\ln 2$, donc asymptote oblique Δ_2 d'équation $y = x - \ln 2$.

  Et $y(t) - x(t) + \ln 2 \underset{0}{\sim} \dfrac{t}{2}$, donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ_2 en 0^+ et en dessous en 0^-.

- $\underline{t = 1}$: Tangente horizontale.

- $\underline{t = 2}$: Tangente verticale.

- $\underline{t \to +\infty}$: $\dfrac{y(t)}{x(t)} \to +\infty$, donc branche parabolique.

On obtient la courbe suivante.

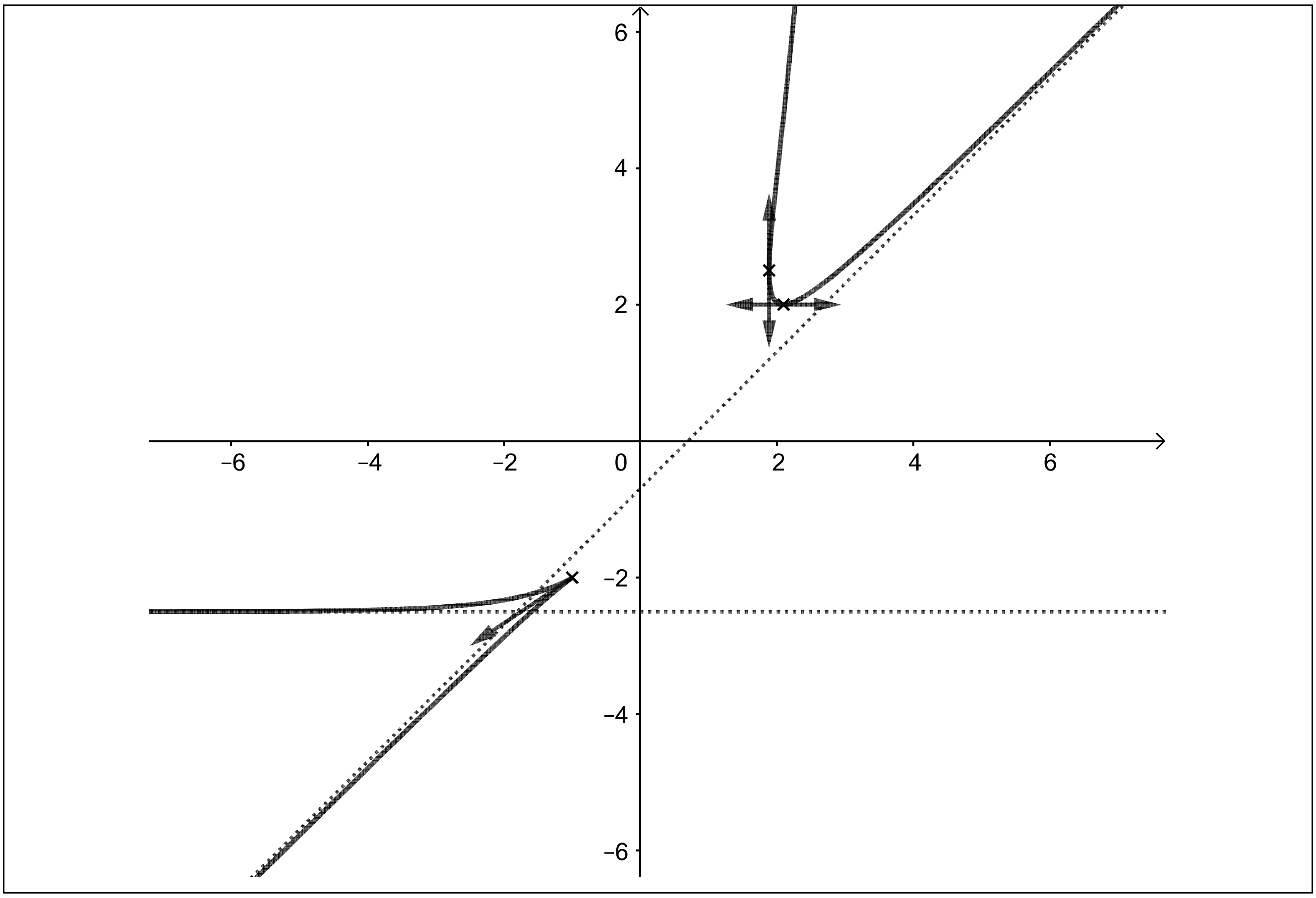

Planche n° 22 (ENSAM)

I) Montrer que *f*, donnée par $f(x)=\int_1^{+\infty}\frac{t^{-x}}{1+t}dt$, est continue et décroissante sur $]0,+\infty[$.

Calculer $f(1)$.

Montrer que pour tout réel $x>0$, $f(x+1)+f(x)=\frac{1}{x}$ et trouver un équivalent de *f* en 0.

Trouver la limite et un équivalent de *f* en + ∞.

II) Montrer que *f*, défini par $f(M)=M+Tr(M)I_n$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et déterminer les dimensions de $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.

Déterminer un polynôme annulateur de *f* de degré 2.

L'endomorphisme *f* est-il diagonalisable ? Bijectif ? Si oui, calculer f^{-1}.

I) Soit $x\in\,]0,+\infty[$. La fonction $t\mapsto\frac{t^{-x}}{1+t}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$.

De plus, $\frac{t^{-x}}{1+t}\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{1}{t^{x+1}}$ et $\int^{+\infty}\frac{dt}{t^{x+1}}$ converge car $x+1>1$, donc, *f* est définie sur $]0,+\infty[$.

Pour tout $t\in[1,+\infty[$, la fonction $x\mapsto\frac{t^{-x}}{1+t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et pour tout $a\in\,]0,+\infty[$, on a pour tous $(x,t)\in[a,+\infty[\times[1,+\infty[$ $0<\dfrac{t^{-x}}{1+t}\leq\dfrac{t^{-a}}{1+t}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{t^{-a}}{1+t}dt$ converge. Alors, la fonction *f* est continue sur $]0,+\infty[$.

Pour tout $(a,b)\in\,]0,+\infty[^2$ tel que $a\leq b$, on a $\dfrac{t^{-b}}{1+t}\leq\dfrac{t^{-a}}{1+t}$ pour tout $t\in[1,+\infty[$, donc par croissance de l'intégrale, on obtient $f(b)\leq f(a)$ et ainsi, *f* est décroissante sur $]0,+\infty[$.

****

On a :

$$f(1)=\int_1^{+\infty}\frac{t^{-1}}{1+t}dt=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t(1+t)}dt=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)dt=\left[\ln\left(\frac{t}{1+t}\right)\right]_1^{+\infty}=\ln 2.$$

****

Pour tout réel $x>0$:

$$f(x+1)+f(x)=\int_1^{+\infty}\frac{t^{-x-1}}{1+t}dt+\int_1^{+\infty}\frac{t^{-x}}{1+t}dt=\int_1^{+\infty}\frac{t^{-x-1}}{1+t}(1+t)\,dt=\int_1^{+\infty}t^{-x-1}dt=\left[\frac{t^{-x}}{-x}\right]_1^{+\infty}=\frac{1}{x}.$$

Alors, $f(x)=\dfrac{1}{x}-f(x+1)$ et comme *f* est continue en 1, on a $\lim\limits_{x\to 0}f(x+1)=f(1)=\ln 2$, donc :

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-f(x+1)\right)=+\infty\quad\text{et}\quad f(x)\underset{x\to 0^+}{\sim}\frac{1}{x}.$$

****

Soit $x\in\,]0,+\infty[$. Dans l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{t^{-x}}{1+t}dt$, posons $u=t^{-x}$, soit $t=u^{-\frac{1}{x}}$ et $-\dfrac{1}{x}u^{-\frac{1}{x}}du=t^{-x}dt$.
Alors :

$$f(x)=\frac{1}{x}\int_0^1\frac{u^{-1/x}}{1+u^{-1/x}}du=\frac{1}{x}\int_0^1\frac{1}{1+u^{1/x}}du.$$

Quand $x\to+\infty$, on a $u^{1/x}\to 1$, d'où l'idée de poser :

$$f(x)-\frac{1}{2x}=\frac{1}{x}\int_0^1\frac{1}{1+u^{1/x}}du-\frac{1}{x}\int_0^1\frac{1}{2}du=\frac{1}{x}\int_0^1\left(\frac{1}{1+u^{1/x}}-\frac{1}{2}\right)du=\frac{1}{2x}\int_0^1\frac{1-u^{1/x}}{1+u^{1/x}}du.$$

Et, pour tout $u\in\,]0,1]$:

$$0\leq\frac{1-u^{1/x}}{1+u^{1/x}}=\frac{1-e^{-\frac{-\ln u}{x}}}{1+u^{1/x}}\leq 1-e^{-\frac{-\ln u}{x}}\leq-\frac{\ln u}{x}.$$

Donc :

$$0\leq f(x)-\frac{1}{2x}\leq-\frac{1}{2x^2}\int_0^1\ln u\,du=\frac{1}{2x^2}.$$

Ainsi, $f(x)=\dfrac{1}{2x}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, soit :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0\quad\text{et}\quad f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2x}.$$

****

II) Comme la trace est linaire, $M \mapsto Tr(M)\, I_n$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc *f* aussi.

Soit $M \in \ker f$.

On a $f(M) = M + Tr(M)\, I_n = 0_n$ et en prenant la trace, ceci donne $(n+1)Tr(M) = 0$. Ainsi, $Tr(M) = 0$ et donc $M + Tr(M)\, I_n = M = 0_n$. Alors, $\ker f = \{0_n\}$ et $f \in GL\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\right)$, soit :

$$\ker f = \{0_n\} \text{ (de dimension 0) et } \operatorname{Im} f = \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ (de dimension } n^2\text{)}.$$

****

Prenons $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et posons $N = f(M) = M + Tr(M)\, I_n$. On a :

$$Tr(N) = Tr(M) + Tr(M) \times n = (n+1)Tr(M).$$

Donc :

$$f^2(M) = f(N) = N + Tr(N)\, I_n = M + Tr(M)\, I_n + (n+1)Tr(M)\, I_n = M + (n+2)Tr(M)\, I_n.$$

Ainsi :

$$Tr(M)\, I_n = f(M) - M = \frac{1}{n+2}\left(f^2(M) - M\right) \quad \Rightarrow \quad f^2(M) - (n+2) f(M) + (n+1)M = 0_n.$$

Ceci étant vrai pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, un polynôme annulateur de *f* est :

$$P = X^2 - (n+2)X + n + 1 = (X-1)\left(X - (n+1)\right).$$

****

Comme P est scindé à racines simples ($n+1 \neq 1$), *f* est diagonalisable.

On a vu plus haut que *f* est bijectif et pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, si $N = f(M)$, on a :

$$\left.\begin{array}{l} N = M + Tr(M)\, I_n \\ Tr(N) = (n+1)Tr(M) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad M = N - \frac{1}{n+1} Tr(N)\, I_n.$$

Donc, $f^{-1} : N \mapsto N - \dfrac{Tr(N)}{n+1} I_n$.

Planche n° 23

I) Des variables aléatoires mutuellement indépendantes $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in \,]0,1[$. Déterminer la loi de $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

On se donne une variable aléatoire *N* à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $N+1$ suive la loi géométrique de paramètre *p*.

Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \,]-1,1[$, la valeur de $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$.

Déterminer $P\left(S_N = k\right)$ pour tout entier naturel *k*.

II) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2 + {}^tM = I_n$.

Montrer que si *P* est un polynôme annulateur de *M*, toute valeur propre de *M* est racine de *P*.

Montrer, sans utiliser le théorème spectral, que si M est symétrique, alors elle est diagonalisable et que $Tr(M)\times\det M\neq 0$.

Dans le cas général, montrer que M est diagonalisable et symétrique si et seulement si 1 n'en est pas valeur propre.

I) S_n suit la loi binomiale de paramètres n et p (c'est une cours).

****

On a, sous réserve de convergence :

$$\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^{n-k}=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^{n-k}=\frac{1}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}n(n-1)...(n-k+1)x^{n-k}\ .$$

Si on pose $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$, f est de classe C^∞ sur $]-1,1[$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$ et $x\in\,]-1,1[$:

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{+\infty}n(n-1)...(n-k+1)x^{n-k}=\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}\,.$$

Donc, pour tout $k\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\,]-1,1[$:

$$\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^{n-k}=\frac{1}{(1-x)^{k+1}}\,.$$

****

Pour que $\left(S_N=k\right)$ soit possible il faut que $N\geq k$ et avec la loi de probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}P\left(S_N=k\right)&=\sum_{n=k}^{+\infty}P\left(N=n\right)P_{(N=n)}\left(S_N=k\right)=\sum_{n=k}^{+\infty}P\left(N+1=n+1\right)P\left(S_n=k\right)\\&=\sum_{n=k}^{+\infty}(1-p)^n p\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=p^{k+1}(1-p)^k\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left[(1-p)^2\right]^{n-k}\end{aligned}$$

Comme $p\in\,]0,1[$, $(1-p)^2\in\,]0,1[$ donc $\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left[(1-p)^2\right]^{n-k}=\frac{1}{\left[1-(1-p)^2\right]^{k+1}}$ et ainsi :

$$P\left(S_N=k\right)=\frac{p^{k+1}(1-p)^k}{\left[1-(1-p)^2\right]^{k+1}}=\frac{(1-p)^k}{(2-p)^{k+1}}\,.$$

****

II) Si P est un polynôme annulateur de M, toute valeur propre de M est racine de P : c'est du cours.

****

Si M est symétrique, alors la relation $M^2+{}^tM=I_n$ se récrit $M^2+M=I_n$, soit $P(M)=0_n$ avec $P=X^2+X-1$. Or, P est scindé à racines simples ($-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ et $-\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$) dans $\mathbb{C}[X]$, donc M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

****

Montrer que $Tr(M)\times\det M\neq 0$ revient à montrer que $\det M\neq 0$ et $Tr(M)\neq 0$.

Comme $Sp(M) \subset \left\{ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\,, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \right\}$, $0 \notin Sp(M)$, donc $M \in GL_n(\mathbb{C})$ et $\det M \neq 0$.

De plus, $Tr(M) = k\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \right) + (n-k)\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \right)$ avec $k = \dim\ker\left[M - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \right) I_n \right]$.

Alors, $Tr(M) = -n\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-2k)\sqrt{5} \neq 0$.

****

On veut : (M diagonalisable et symétrique) $\Leftrightarrow$ $1 \notin Sp(M)$.

Or, on vient de voir que si M est symétrique, alors elle est diagonalisable, donc il faut prouver :

(M symétrique) $\Leftrightarrow$ $1 \notin Sp(M)$.

On vient aussi de prouver que le sens direct est vrai. Montrons alors le sens réciproque.
On suppose que $1 \notin Sp(M)$.

Remarquons qu'ne transposant $M^2 + {}^tM = I_n$, on obtient $({}^tM)^2 + M = I_n$, soit $({}^tM)^2 = I_n - M$ et :

$$M^2 + {}^tM = I_n \quad \Rightarrow \quad ({}^tM)^2 = (I_n - M^2)^2 = I_n - M\ .$$

Donc, $P = (X^2 - 1)^2 + X - 1 = (X-1)X(X^2 + X - 1)$ est annulateur de M et comme $1 \notin Sp(M)$, $X(X^2 + X - 1)$ est annulateur de M.

Si $0 \in Sp(M)$, alors M est n'pas inversible, donc ${}^tM$ non plus et il existe un vecteur X non nul tel que ${}^tMX = 0$. Alors, $({}^tM)^2 X + MX = MX = I_n X = X$, donc $1 \in Sp(M)$, ce qui est absurde, donc $0 \notin Sp(M)$ et $X^2 + X - 1$ est annulateur de M (car $X(X^2 + X - 1)$ l'est).

Ainsi, $M^2 + M = I_n = M^2 + {}^tM$, donc $M = {}^tM$ et M est symétrique.