Corrigés de la série 4 - CCINP

Planche n° 14

I) Pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$, on cherche à déterminer les matrices A symétriques réelles de taille n telles que $A^3 + 4A^2 + 5A = 0_n$. Montrer que A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont racines d'un polynôme de degré 3. Conclure.

II) Montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+x^3+t^3}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

Trouver *a*, *b* et *c* réels tels que $\frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$.

En déduire $f(0)$ et calculer la limite de *f* en + ∞.

I) Soit A une solution. A est symétrique réelle, donc diagonalisable.

$P = X^3 + 4X^2 + 5X$ est annulateur de A, donc les valeurs propres de A sont racines de P.

Or, les valeurs propres de A sont toutes réelles et la seule racine réelle de P est 0, donc la seule valeur propre de A est 0 et comme A est diagonalisable, elle est nulle.

Réciproquement, la matrice nulle est bien solution, et ainsi, la seule solution est la matrice nulle.

****

II) Si on pose $g(x,t) = \frac{1}{1+x^3+t^3}$, on a :

- $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, $0 \leq g(x,t) \leq \frac{1}{1+t^3}$ et $t \mapsto \frac{1}{1+t^3}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (car continue sur $\mathbb{R}_+$ et équivalente à $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ en + ∞.

Ainsi, *f* est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

****

On a : $\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\right)$.

****

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t+1} - \frac{t-2}{t^2-t+1}\right)dt = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{2}\frac{2t-1}{t^2-t+1}\right)dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2-t+1}$$

$$= \left[\ln\left(\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+1}}\right)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{2dt}{(2t-1)^2+3} \underset{u=2t-1}{=} \int_{-1}^{+\infty}\frac{du}{u^2+3} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

****

On a vu que $\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^3}$ converge. Alors, pour tout $x>0$:

$$|f(x)| = f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+x^3+t^3} \underset{t=xu}{=} \int_0^{+\infty} \frac{x\,du}{1+x^3+x^3u^3} \leq \int_0^{+\infty} \frac{x\,du}{x^3+x^3u^3} = \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^3}.$$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^3} = 0$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Planche n° 15

I) Donner le domaine de convergence D de la série de fonctions $\sum u_n$ telle que $u_n(x) = \frac{\ln x}{x^n \ln n}$.

Converge-t-elle normalement sur D ? On note S sa somme et R_n le reste d'ordre n.

Montrer que $|R_n(x)| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$ et en déduire que S est continue. S est-elle intégrable ?

II) Déterminer un polynôme annulateur de A réelle, non nulle, carrée de taille 2 et telle que $A^2 = {}^tA$.

Déterminer les valeurs propres de A si on suppose que 0 en est une.

Montrer que A est orthogonalement semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

I) Pour tout $n \geq 2$, u_n est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

- Si $0<x<1$, on a $\frac{1}{x} > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = +\infty$ et $\sum\limits_{n\geq 2} u_n(x)$ diverge grossièrement.
- Si $x=1$, on a $u_n(1) = 0$ donc $\sum\limits_{n\geq 2} u_n(1)$ converge.
- Si $x>1$, on a $\frac{1}{x} < 1$, donc $u_n(x) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum\limits_{n\geq 2} u_n(x)$ converge.

Ainsi, $D = [1,+\infty[$.

****

Soient $n\geq 2$ et $x \in]1,+\infty[$. On a :

$$|R_n(x)| = R_n(x) = \sum_{k\geq n+1} u_k(x) = \sum_{k\geq n+1} \frac{\ln x}{x^k \ln k} \leq \sum_{k\geq n+1} \frac{\ln x}{x^k \ln(n+1)}.$$

Et :

$$\sum_{k\geq n+1} \frac{\ln x}{x^k \ln(n+1)} = \frac{\ln x}{\ln(n+1)} \sum_{k\geq n+1} \left(\frac{1}{x}\right)^k = \frac{\ln x}{\ln(n+1)} \frac{\frac{1}{x^{n+1}}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{\ln(n+1)} \frac{1}{x^n} \frac{\ln x}{x-1}.$$

L'étude de $x \mapsto \frac{\ln x}{x-1}$, montre que cette fonction est strictement décroissante de $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ à $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x-1} = 0$, donc pour tout $x \in]1,+\infty[$, $0 < \frac{\ln x}{x-1} < 1$.

Comme $0<\dfrac{1}{x^n}<1$, on obtient bien :

$$\left|R_n(x)\right|\leq\frac{1}{\ln(n+1)}$$

Ceci reste vrai quand $x=1$, car $\left|R_n(1)\right|=0$.

****

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)}=0$, l'inégalité ci-dessous prouve la convergence uniforme de $\sum u_n$ sur *D*.

Comme toutes les fonctions u_n sont continues sur *D*, la fonction *S* est continue sur *D*.

****

On vient de voir que $\sum u_n$ converge sur *D* et que la somme *S* est continue sur *D*.

De plus, u_n est continue et intégrable sur *D*, car $u_n(x)=\underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^{1,5}}\right)$ et :

$$\int_1^{+\infty}\left|u_n(x)\right|dx=\int_1^{+\infty}u_n(x)dx=\frac{1}{\ln n}\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^n}dx.$$

Or, par parties :

$$\int_1^A x^{-n}\ln x dx=\left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\ln x\right]_1^A-\int_1^A\frac{x^{-n}}{-n+1}dx=\left[-\frac{\ln x}{(n-1)x^{n-1}}-\frac{1}{(n-1)^2x^{n-1}}\right]_1^A.$$

Et en faisant tendre *A* vers $+\infty$, on obtient, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^n}dx=\frac{1}{(n-1)^2}$, et :

$$\int_1^{+\infty}\left|u_n(x)\right|dx=\frac{1}{(n-1)^2\ln n}.$$

On a $\dfrac{1}{(n-1)^2\ln n}=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, donc $\displaystyle\sum\int_1^{+\infty}\left|u_n(x)\right|dx$ converge.

Ceci permet de conclure que *S* est intégrable sur *D*, avec :

$$\int_1^{+\infty}S(x)dx=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)^2\ln n}.$$

****

II) On a $A^2={}^tA$, donc $A^4=({}^tA)^2={}^t(A^2)={}^t({}^tA)=A$, ainsi X^4-X est un polynôme annulateur de *A*.

Comme *A* est 2×2, elle admet au plus deux valeurs propres (réelles ou complexes).

Si 0 (réel) est valeur propre, alors ses deux valeurs propres sont réelles et ce sont des racines de X^4-X (qui est annulateur de *A*). Ainsi, les valeurs propres possibles de *A* sont 0 et 1.

Enfin, si 0 est la seule valeur propre de *A*, alors son polynôme caractéristique est X^2 et $A^2=0_2$

d'après le théorème de Cayley-Hamilton. Mais alors, ${}^tA = A^2 = 0_2$ et donc A est nulle, ce qui n'est pas. Ainsi, les valeurs propres de A sont 0 et 1.

Comme A est 2×2 et possède deux valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable et donc, il existe $P\in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A = P\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}P^{-1}$. Alors, ${}^tA = A^2 = P\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}P^{-1} = A$.

Finalement, A est symétrique réelle, de valeurs propres 1 et 0, donc d'après le théorème spectral, A est orthogonalement semblable à $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

Planche n° 16

I) Trouver a, b et c tels que $\dfrac{2x+1}{x(x+1)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2}$.

On admet que $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 tE\left(\dfrac{1}{t}\right)dt$ converge et la calculer.

II) Pour un entier n pair tel que $n\geq 2$, déterminer le rang de $A_n = \begin{pmatrix}1 & n & 1 & \cdots & n\\ 2 & n-1 & 2 & \cdots & n-1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & 1 & n & \cdots & 1\end{pmatrix}$.

Montrer qu'une matrice et sa transposée ont même spectre.

Montrer que A_n est diagonalisable, donner ses éléments propres.

I) On a :

$$\frac{2x+1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}.$$

****

Pour tout $t\in\,]0,1]$, $\dfrac{1}{t}\geq 1$ donc $E\left(\dfrac{1}{t}\right)\in\mathbb{N}^*$.

De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $E\left(\dfrac{1}{t}\right) = n$ pour $\dfrac{1}{n+1} < t \leq \dfrac{1}{n}$ et :

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} tE\left(\frac{1}{t}\right)dt = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} nt\,dt = \frac{n}{2}\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] = \frac{1}{2}\frac{2n+1}{n(n+1)^2} \sim \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série $\sum\dfrac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} tE\left(\dfrac{1}{t}\right)dt$ converge aussi.

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} tE\left(\dfrac{1}{t}\right)dt = \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} tE\left(\dfrac{1}{t}\right)dt$ et $t\mapsto tE\left(\dfrac{1}{t}\right)$ est positive sur $]0,1]$, donc l'intégrale $\int_0^1 tE\left(\dfrac{1}{t}\right)dt$ converge, avec : $\int_0^1 tE\left(\dfrac{1}{t}\right)dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} tE\left(\dfrac{1}{t}\right)dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{2}\dfrac{2n+1}{n(n+1)^2}$.

Avec la question préliminaire, on obtient :

$$\int_0^1 tE\left(\frac{1}{t}\right)dt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}\right] = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Soit :

$$\int_0^1 tE\left(\frac{1}{t}\right)dt = \frac{\pi^2}{12}.$$

****

II) Comme $n \geq 2$, A possède au moins deux colonnes distinctes, $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, et toutes les autres colonnes valent soit C_1, soit C_2. De plus, C_1 et C_2 ne sont pas proportionnelles (sinon on aurait $\begin{vmatrix} 1 & n \\ 2 & n-1 \end{vmatrix} = -(n+1) = 0$, qui est faux), donc pour tout entier $n \geq 2$:

$$rg(A_n) = 2.$$

****

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$\chi_{{}^tM} = \det\left(XI_n - {}^tM\right) = \det\left({}^t(XI_n - M)\right) = \det\left(XI_n - M\right) = \chi_M.$$

****

Comme $rg(A_n) = 2$, on a $\dim\left(\ker A_n\right) = n-2$.

Comme $n \geq 2$ est pair, on peut poser $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et si on note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A, on a, pour tout $k \in [\![2, p]\!]$ $u(e_{2k-1} - e_1) = 0$ et $u(e_{2k} - e_2) = 0$, donc $(e_3 - e_1, \ldots, e_{2p-1} - e_1, e_4 - e_2, \ldots, e_{2p} - e_2)$ est une famille libre de $n-2$ vecteurs du noyau, donc une base de $\ker A_n$.

On remarque de plus que :

$$\begin{aligned} u\left(e_1 + e_2 \ldots + e_{n-1} + e_n\right) &= (p + pn)e_1 + \left(2p + p(n-1)\right)e_2 \ldots + (p + pn)e_{n-1} + \left(2p + p(n-1)\right)e_n \\ &= \frac{n(n+1)}{2}\left(e_1 + e_2 \ldots + e_{n-1} + e_n\right) \end{aligned}$$

Donc, $\frac{n(n+1)}{2} \in Sp\left(A_n\right)$ et $e_1 + e_2 \ldots + e_{n-1} + e_n \in \ker\left(A_n - \frac{n(n+1)}{2} I_n\right)$.

Par ailleurs, $^tA_n\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\\vdots\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n\\n&n-1&n-2&\cdots&1\\1&2&3&\cdots&n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n-1&n-2&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\\vdots\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2+3-...+(n-1)-n\\n-(n-1)+...-3+2-1\\1-2+3-...+(n-1)-n\\\vdots\\n-(n-1)+...-3+2-1\end{pmatrix}=-\frac{n}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\\vdots\\-1\end{pmatrix}$.

Donc, $-\frac{n}{2}\in Sp\left({}^tA_n\right)=Sp\left(A_n\right)$ et la résolution de $A_nX=-\frac{n}{2}X$ donne :

$$\ker\left(A_n+\frac{n}{2}I_n\right)=\mathrm{Vect}\left(-ne_1+2e_2...-ne_{n-1}+2e_n\right).$$

On a $\dim\left(\ker A_n\right)=n-2$, $\dim\left(\ker\left(A_n+\frac{n}{2}I_n\right)\right)=1$ et $\dim\left(\ker\left(A_n-\frac{n(n+1)}{2}I_n\right)\right)\geq 1$. Comme la somme de ces trois dimensions ne doit pas dépasser *n*, on a $\dim\left(\ker\left(A_n-\frac{n(n+1)}{2}I_n\right)\right)=1$.

Finalement, A_n est diagonalisable et :

$$Sp\left(A_n\right)=\left\{0,-\frac{n}{2},\frac{n(n+1)}{2}\right\}\text{ avec }\begin{cases}\ker A_n=\mathrm{Vect}\left(e_3-e_1,\dots,e_{2p-1}-e_1,e_4-e_2,\dots,e_{2p}-e_2\right)\\\ker\left(A_n+\frac{n}{2}I_n\right)=\mathrm{Vect}\left(-ne_1+2e_2...-ne_{n-1}+2e_n\right)\\\ker\left(A_n-\frac{n(n+1)}{2}I_n\right)=\mathrm{Vect}\left(e_1+e_2...+e_{n-1}+e_n\right)\end{cases}$$

Planche n° 17

I) Montrer que la série de terme général $u_n=\ln\left(2n+(-1)^n\right)-\ln\left(2n\right)$ est semi-convergente.

II) Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que *A* est symétrique à valeurs propres positives, si et seulement s'il existe une matrice $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A={}^tBB$.

I) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n=\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2n}\right)=\frac{(-1)^n}{2n}-\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Alors, si $v_n=u_n-\frac{(-1)^n}{2n}$, on a $v_n\sim-\frac{1}{8n^2}$ donc $\sum v_n$ converge et $\sum\frac{(-1)^n}{2n}$ vérifie le critère spécial des séries alternées, donc converge. Comme $u_n=\frac{(-1)^n}{2n}+v_n$, la série $\sum u_n$ est convergente.

Par contre, $|u_n|\sim\frac{1}{2n}$ et $\sum\frac{1}{2n}$ diverge, donc $\sum|u_n|$ diverge, ce qui prouve que la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente, donc est semi-convergente.

****

II) ($\Rightarrow$) On suppose que A est symétrique à valeurs propres positives.

Comme A est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée, autrement dit, il existe $P \in O(n)$ et $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ telles que $A = {}^tPDP$.

Or, $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}_+$, donc si on pose $\Delta = {}^t\Delta = diag(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, on a ${}^t\Delta\Delta = \Delta^2 = D$ et :

$$A = {}^tP\,{}^t\Delta\Delta P = {}^t(\Delta P)\Delta P = {}^tBB \quad \text{avec } B = \Delta P.$$

($\Leftarrow$) On suppose qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tBB$.

On a alors ${}^tA = {}^t({}^tBB) = {}^tB\,{}^t({}^tB) = {}^tBB = A$, donc A est symétrique et, pour tout $\lambda \in Sp(A)$, si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$ est un vecteur propre associé à λ, on a $AX = {}^tBBX = \lambda X$, donc :

$${}^tXAX = {}^tX\,{}^tBBX = {}^t(BX)BX = \|BX\|^2 = \lambda\,{}^tXX = \lambda\|X\|^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\|BX\|^2}{\|X\|^2} \geq 0 \text{ (car } \|X\| \neq 0\text{)}.$$

Ainsi, A est symétrique à valeurs propres positives.

Planche n° 18

I) Soient n variables aléatoire indépendantes $X_1, X_2, \dots, X_n$ suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètres respectifs $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}$. Soit la variable aléatoire N qui vaut 0 si $X_1 = X_2 = \dots = X_n = 1$ et $\min\{k \in [\![1,n]\!], X_k = 0\}$ sinon. Déterminer la loi de N.

II) Montrer que H, plan de E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3, est stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\operatorname{Im}(u - \lambda id) \subset H$.

Trouver les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

I) On a $N(\Omega) = [\![0,n]\!]$ avec :

$$N = \begin{cases} 0 & \text{si } X_1 = X_2 = \dots = X_n = 1 \\ \min\{k \in [\![1,n]\!], X_k = 0\} & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } X_1 = X_2 = \dots = X_n = 1 \\ 1 & \text{si } X_1 = 0 \\ k & \text{si } X_1 = \dots = X_{k-1} = 1 \text{ et } X_k = 0 \quad \forall k \in [\![2,n]\!] \end{cases}$$

Alors, pour $k \in [\![0,n]\!]$:

$$P(N = k) = \begin{cases} P(X_1 = X_2 = \dots = X_n = 1) & \text{pour } k = 0 \\ P(X_1 = 1) & \text{pour } k = 1 \\ P(X_1 = \dots = X_{k-1} = 1, X_k = 0) & \text{pour } k \in [\![2,n]\!] \end{cases}$$

Et comme les X_k sont indépendantes, on a :

$$P(N=k)=\begin{cases} P(X_1=1)P(X_2=1)\ldots P(X_n=1)=\dfrac{1}{n!} & \text{pour } k=0 \\ P(X_1=1)=0 & \text{pour } k=1 \\ P(X_1=1)\ldots P(X_{k-1}=1)P(X_k=0)=\dfrac{1}{(k-1)!}\left(1-\dfrac{1}{k}\right)=\dfrac{k-1}{k!} & \text{pour } k\in[\![2,n]\!] \end{cases}$$

Soit :

$$P(N=k)=\begin{cases} \dfrac{1}{n!} & \text{pour } k=0 \\ \dfrac{k-1}{k!} & \text{pour } k\in[\![1,n]\!] \end{cases}$$

Remarquons que l'on a $\sum_{k=0}^{n} P(N=k)=\dfrac{1}{n!}+\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k-1}{k!}=\dfrac{1}{n!}+\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{(k-1)!}-\dfrac{1}{k!}\right)=\dfrac{1}{n!}+1-\dfrac{1}{n!}=1$.

****

II) Soit H un plan de E, $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $u\in\mathcal{L}(E)$. On veut :

$$u(H)\subset H \quad\Leftrightarrow\quad \exists\,\lambda\in\mathbb{K},\ \mathrm{Im}(u-\lambda id)\subset H.$$

($\Rightarrow$) On suppose que $u(H)\subset H$.

Soit (e_1,e_2) une base H, complétée en une base de E, $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$.

Comme $u(H)\subset H$, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ a la forme suivante : $M_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}\times & \times & \times\\ \times & \times & \times\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$.

Alors, $M_{\mathcal{B}}(u-\lambda id)=\begin{pmatrix}\times & \times & \times\\ \times & \times & \times\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, ce qui montre que $\mathrm{Im}(u-\lambda id)\subset H=\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$.

Ainsi, il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $\mathrm{Im}(u-\lambda id)\subset H$.

($\Leftarrow$) On suppose qu'il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $\mathrm{Im}(u-\lambda id)\subset H$.

On a :

$$H\subset E \quad\Rightarrow\quad (u-\lambda id)(H)\subset(u-\lambda id)(E)=\mathrm{Im}(u-\lambda id)\subset H.$$

Donc, $(u-\lambda id)(H)\subset H$ et pour tout $x\in H$:

$$u(x)=\underbrace{(u-\lambda id)(x)}_{\in H}+\underbrace{\lambda x}_{\in H}\in H.$$

Et ainsi, $u(H)\subset H$.

****

On a $\chi_A = X^3 - 4X^2 - 14X + 41$ et l'étude de $x \mapsto x^3 - 4x^2 - 14x + 41$ sur $\mathbb{R}$ montre que χ_A admet trois racines réelles distinctes : *a*, *b* et *c*. Ainsi, $Sp(A) = \{a,b,c\}$. Si on note $D_\lambda = \ker(A - \lambda I_3)$, alors D_a, D_b et D_c sont des droites et ce sont les sous-espaces propres de *A*.

La dimension d'un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ stable par *A* est comprise entre 0 et 3.

- $\{0\}$ et $\mathbb{R}^3$ sont stables par *A* (*dimensions 0 et 3*).
- Toute droite stable par *A* est incluse dans un sous-espace propre, donc il y a trois droites stables par *A* : D_a, D_b, D_c (*dimension 1*).
- Soit *H* un plan stable par *A*. D'après ce qui précède, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Im}(A - \lambda I_3) \subset H$. Ceci implique que $\dim \mathrm{Im}(A - \lambda I_3) \leq 2$, que $\dim \ker(A - \lambda I_3) \geq 1$ (d'après le théorème du rang). Ainsi, $\ker(A - \lambda I_3)$ n'est pas réduit à 0, donc $\lambda \in Sp(A)$.

  Alors, $\ker(A - \lambda I_3)$ est une droite, donc $\dim \mathrm{Im}(A - \lambda I_3) = 2$ et $\mathrm{Im}(A - \lambda I_3) = H$.

  Ainsi, les plans stables par *u* sont $\mathrm{Im}(A - aI_3)$, $\mathrm{Im}(A - bI_3)$ et $\mathrm{Im}(A - cI_3)$ (*dimension 2*).

Finalement, on a $Sp(A) = \{a,b,c\}$ et les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par *A* sont :

$$\{0\},\ \ker(A - aI_3),\ \ker(A - bI_3),\ \ker(A - cI_3),\ \mathrm{Im}(A - aI_3),\ \mathrm{Im}(A - bI_3),\ \mathrm{Im}(A - cI_3) \text{ et } \mathbb{R}^3.$$