Corrigés de la série 3 - CCINP

Planche n° 9

I) Nature et somme de la série $\sum n^{(-1)^n} x^n$.

II) Montrer que *f*, défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f(P)(x) = \int_x^{x+1} P(t)dt$ est un endomorphisme et donner sa trace.

I) On a $n^{(-1)^n} x^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ quand $|x| < 1$ et $\left(n^{(-1)^n} x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 quand $|x| \geq 1$, donc la série $\sum n^{(-1)^n} x^n$ converge si et seulement si $|x| < 1$ (et diverge grossièrement sinon).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$, on a en posant $f(x) = \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$:

$$\sum_{n\geq 0} n^{(-1)^n} x^n = \sum_{n\geq 0} 2nx^{2n} + \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = 2x^2 \sum_{n\geq 1} n(x^2)^{n-1} + \sum_{n\geq 0}\left(\int_0^x t^{2n} dt\right)$$

On a $\sum_{n\geq 0}\left(\int_0^x t^{2n} dt\right) = \int_0^x \left(\sum_{n\geq 0} t^{2n}\right) dt = \int_0^x f(t^2)dt$ car $x \in \left]-1,1\right[$, intervalle de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} x^{2n}$. Alors :

$$\sum_{n\geq 0} n^{(-1)^n} x^n = 2x^2 f'(x^2) + \int_0^x f(t^2)dt .$$

Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$:

$$\sum_{n\geq 0} n^{(-1)^n} x^n = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

****

II) L'application *f* est définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ et linéaire par linéarité de l'intégrale.

De plus, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$:

$$f(X^k) = \frac{1}{k+1}\left[(X+1)^{k+1} - X^{k+1}\right] = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i} X^i \in \mathbb{R}_n[X].$$

Ainsi, *f* est à images dans $\mathbb{R}_n[X]$, donc *f* est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

On a $f(1) = 1$ et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $f(X^k) = X^k + \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k+1}{i} X^i$, donc la matrice de *f* dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure et tous ses coefficients diagonaux valent 1.

Ainsi, $Tr(f) = n+1$.

Planche n° 10

I) Convergence simple de la suite de fonctions données par $f_n(x)=\cos\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)x\right)$.

Y a-t-il convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{R}$?

II) On munit $E=C^1([0,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle f,g\rangle=\int_0^1[f(t)g(t)+f'(t)g'(t)]dt$.

Montrer que $(\mathrm{ch},\mathrm{sh})$ est une base de $A=\{f\in C^2([0,1],\mathbb{R})\setminus f''=f\}$.

Montrer que si $f\in A$, alors pour tout $g\in E$, $\langle f,g\rangle=f'(1)g(1)-f'(0)g(0)$.

Calculer $\langle \mathrm{ch},\mathrm{sh}\rangle$, $\|\mathrm{ch}\|^2$, $\|s\mathrm{h}\|^2$.

Montrer que si $f\in A$ et $g\in B=\{h\in E\setminus h(0)=h(1)=0\}$, $\langle f,g\rangle=0$.

Pour $f\in H=\{h\in E\setminus h(0)=\mathrm{ch}1,h(1)=1\}$, calculer $\langle f,\mathrm{ch}\rangle$ et $\langle f,\mathrm{sh}\rangle$. Donner les coordonnées dans la base $(\mathrm{ch},\mathrm{sh})$ de la projection orthogonale de $f\in H$ sur A.

Calculer $\inf\limits_{f\in H}\int_0^1\left[f(t)^2+f'(t)^2\right]dt$.

I) On a pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\cos x$, donc (f_n) converge simplement vers la fonction cosinus. Pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$|f_n(x)-\cos x|=\left|\cos\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)x\right)-\cos x\right|=2\left|\sin\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)x\right)\right|\left|\sin\left(\frac{x}{2n}\right)\right|\le 2\left|\frac{x}{2n}\right|=\frac{|x|}{n}.$$

Donc, sur tout segment $[a,b]\subset\mathbb{R}$, on a $|f_n(x)-\cos x|\le\dfrac{\max(|a|,|b|)}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\max(|a|,|b|)}{n}=0$, et ainsi, (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$.

Par contre, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $|f_n(n)-\cos n|=2\sin\left(\frac{1}{2}\right)\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\right|$ et $\left(2\sin\left(\frac{1}{2}\right)\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\right|\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite, donc la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

****

II) $A=\{f\in C^2([0,1],\mathbb{R})\setminus f''=f\}$ est l'ensemble des solutions sur [0,1] de $y''-y=0$, qui est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2, donc c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et, comme ch et sh sont deux solutions non proportionnelles de cette équation, $(\mathrm{ch},\mathrm{sh})$ est bien une base *A*.

****

Soient $f\in A$ et $g\in E$. On a $f''=f$ et :

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle&=\int_0^1[f(t)g(t)+f'(t)g'(t)]dt=\int_0^1 f(t)g(t)dt+\int_0^1 f'(t)g'(t)dt\\&=\int_0^1 f''(t)g(t)dt+\int_0^1 f'(t)g'(t)dt=[f'(t)g(t)]_0^1-\int_0^1 f'(t)g'(t)dt+\int_0^1 f'(t)g'(t)dt\\&=f'(1)g(1)-f'(0)g(0)\end{aligned}$$

****

Comme $\operatorname{ch}, \operatorname{sh} \in A$, on a :

$$\langle \operatorname{ch}, \operatorname{sh} \rangle = \operatorname{ch}'(1)\operatorname{sh}(1) - \operatorname{ch}'(0)\operatorname{sh}(0) = \operatorname{sh}^2(1)$$
$$\|s\,\mathrm{h}\|^2 = \langle \operatorname{sh}, \operatorname{sh} \rangle = \operatorname{sh}'(1)\operatorname{sh}(1) - \operatorname{sh}'(0)\operatorname{sh}(0) = \operatorname{ch}(1)\operatorname{sh}(1) = \langle \operatorname{ch}, \operatorname{ch} \rangle = \|\operatorname{ch}\|^2$$

****

Soient $f \in A$ et $g \in B = \{h \in E \setminus h(0) = h(1) = 0\}$. On a :

$$\langle f, g \rangle = f'(1)g(1) - f'(0)g(0) = f'(1)\times 0 - f'(0)\times 0 = 0.$$

****

Soit $f \in H = \{h \in E \setminus h(0) = \operatorname{ch} 1, h(1) = 1\}$. On a :

$$\langle f, \operatorname{ch} \rangle = \left[(\operatorname{ch}' t) f(t)\right]_0^1 = (\operatorname{sh} 1) f(1) - \operatorname{sh}(0) f(0) = \operatorname{sh} 1$$
$$\langle f, \operatorname{sh} \rangle = \left[(\operatorname{sh}' t) f(t)\right]_0^1 = (\operatorname{ch} 1) f(1) - \operatorname{ch}(0) f(0) = 0$$

****

Pours $f \in H$, posons g la projection orthogonale de f sur A. On a $g \in A$, donc $g = a\operatorname{ch} + b\operatorname{sh}$ et :

$$f - g \in A^\perp \iff \begin{cases} f - g \perp \operatorname{ch} \\ f - g \perp \operatorname{sh} \end{cases} \iff \begin{cases} \langle f, \operatorname{ch} \rangle = \langle g, \operatorname{ch} \rangle = \langle a\operatorname{ch} + b\operatorname{sh}, \operatorname{ch} \rangle \\ \langle f, \operatorname{sh} \rangle = \langle g, \operatorname{sh} \rangle = \langle a\operatorname{ch} + b\operatorname{sh}, \operatorname{sh} \rangle \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a\langle \operatorname{ch}, \operatorname{ch} \rangle + b\langle \operatorname{sh}, \operatorname{ch} \rangle = \operatorname{sh} 1 \\ a\langle \operatorname{ch}, \operatorname{sh} \rangle + b\langle \operatorname{sh}, \operatorname{sh} \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a\operatorname{ch}(1)\operatorname{sh}(1) + b\operatorname{sh}^2(1) = \operatorname{sh} 1 \\ a\operatorname{sh}^2(1) + b\operatorname{ch}(1)\operatorname{sh}(1) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a\operatorname{ch} 1 + b\operatorname{sh} 1 = 1 \\ a\operatorname{sh} 1 + b\operatorname{ch} 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \operatorname{ch} 1 \\ b = -\operatorname{sh} 1 \end{cases}$$

Donc, la projection orthogonale de $f \in H$ sur A est $x \mapsto \operatorname{ch} 1 \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} 1 \operatorname{sh} x = \operatorname{ch}(x - 1)$.

****

Posons $\mu = \inf\limits_{f \in H} \int_0^1 \left[f(t)^2 + f'(t)^2\right] dt = \inf\limits_{f \in H} \|f\|^2$. On a :

$$\inf_{f \in H} \|f\|^2 = \inf_{f \in H} \|f - g + g\|^2 = \inf_{f \in H} \left(\|f - g\|^2 + \|g\|^2\right) = \inf_{f \in H} \|f - g\|^2 + \|g\|^2 = \|g\|^2$$
$$= \int_0^1 \left[g(t)^2 + g'(t)^2\right] dt = \int_0^1 \left[\operatorname{ch}^2(1 - t) + \operatorname{sh}^2(1 - t)\right] dt$$
$$= \int_0^1 \left[\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t\right] dt = \int_0^1 \operatorname{ch}(2t)\, dt = \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2$$

Planche n° 11

I) Reconnaître l'endomorphisme représenté par $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale.

II) n variables aléatoires indépendantes $X_1,\dots,X_n$ suivent chacune une loi de Bernoulli de paramètre $p_n\in\,]0,1[$ et vérifient $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=p$.

Montrer que pour tout $\varepsilon>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left(\left|\frac{X_1+\dots+X_n}{n}-p\right|>\varepsilon\right)=0$.

I) Les colonnes de A sont orthonormées, donc A est orthogonale, c'est la matrice d'une isométrie. On a $\ker(A-I_3)=\mathrm{Vect}\big((3,1,-1)\big)=D$ est une droite, donc A est une matrice de rotation, d'axe D et d'angle α tel que $Tr(A)=1+2\cos\alpha=-\frac{2}{3}$, soit $\alpha=\pm\arccos(-5/6)$. On a $X=(0,1,1)\in D^\perp$ et $X\wedge AX=(3,1,-1)$, donc $\alpha=\arccos(-5/6)$ avec D orienté par $(3,1,-1)$.

****

II) Posons $S_n=X_1+\dots+X_n$ et $Y_n=\left(\frac{S_n}{n}-p\right)^2$. On a :

$$E(Y_n)=\frac{1}{n^2}E(S_n{}^2)+p^2-2\frac{p}{n}E(S_n)=\frac{1}{n^2}V(S_n)+\frac{1}{n^2}E(S_n)^2+p^2-2\frac{p}{n}E(S_n).$$

Or, $E(S_n)=\sum\limits_{k=1}^{n}E(X_k)=\sum\limits_{i=1}^{n}p_i$, et, comme les X_k sont indépendantes :

$$V(S_n)=\sum_{k=1}^{n}V(X_k)=\sum_{i=1}^{n}p_i(1-p_i).$$

Ainsi :

$$E(Y_n)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}p_i(1-p_i)+\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i\right)^2+p^2-2p\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i.$$

Et, avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=p$, on a :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\right)^2+p^2-2p\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\right]=p^2+p^2-2p^2=0\\ 0\le\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}p_i(1-p_i)\le\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\right)\ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}p_i(1-p_i)=0\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty}E(Y_n)=0.$$

Alors, pour tout $\varepsilon>0$, l'inégalité de Markov donne :

$$0\le P\left(\left|\frac{X_1+\dots+X_n}{n}-p\right|>\varepsilon\right)=P(Y_n>\varepsilon^2)\le P(Y_n\ge\varepsilon^2)\le\frac{E(Y_n)}{\varepsilon^2}.$$

Avec $\lim\limits_{n\to+\infty}E(Y_n)=0$, on obtient bien $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left(\left|\frac{X_1+\dots+X_n}{n}-p\right|>\varepsilon\right)=0$.

Planche n° 12

I) Montrer que si $M \in GL_k(\mathbb{C})$ est de carré diagonalisable, alors elle est diagonalisable (on pourra montrer qu'il existe un polynôme scindé à racines simples annulant *M*).

Soit $N = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ A & 0_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ avec $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$. En calculant N^{-1}, montrer que $N \in GL_{2n}(\mathbb{C})$.

Calculer N^2, puis $P(N^2)$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$.

On suppose *N* diagonalisable. Montrer que le produit AB est diagonalisable. Qu'en est-il de la réciproque ?

II) Soient, pour $\alpha > 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Montrer que $R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ au voisinage de $+\infty$.

Etudier la convergence de $\sum \frac{R_n}{S_n}$ suivant la valeur de α.

I) Soit $M \in GL_k(\mathbb{C})$ tel que M^2 est diagonalisable. On note $Sp(M^2) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$, les λ_i étant distincts deux à deux et non nuls car *M*, donc M^2, sont inversibles.

On a alors $\prod_{i=1}^{r} \left(M^2 - \lambda_i I_k\right) = 0_k$.

On note $\delta_i \in \mathbb{C}$ tel que $\delta_i^2 = \lambda_i$ et $\delta_{i+r} = -\delta_i$. Les δ_i pour $i \in [\![1, 2r]\!]$ sont deux à deux distincts, car $\delta_{i+r} = -\delta_i \neq \delta_i$ (car $\delta_i^2 = \lambda_i \neq 0$) et pour $j \neq i+r$ et $j \neq i-r$, $\delta_i \neq \delta_j$ (car sinon, $\delta_i^2 = \lambda_i = \delta_j^2 = \lambda_j$).

On a alors $P(M) = \prod_{i=1}^{2r} \left(M - \delta_i I_k\right) = 0_k$, donc $P = \prod_{i=1}^{2r} \left(X - \delta_i\right)$ est un polynôme annulateur de *M*, scindé à racines simples, donc *M* est diagonalisable.

****

On a $N = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ A & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_n & A^{-1} \\ B^{-1} & 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$, donc $N \in GL_{2n}(\mathbb{C})$ avec $N^{-1} = \begin{pmatrix} 0_n & A^{-1} \\ B^{-1} & 0_n \end{pmatrix}$.

****

On a $N^2 = \begin{pmatrix} BA & 0_n \\ 0_n & AB \end{pmatrix}$ et comme N^2 est diagonale par blocs, $P(N^2) = \begin{pmatrix} P(BA) & 0_n \\ 0_n & P(AB) \end{pmatrix}$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$.

****

Si *N* est diagonalisable, N^2 l'est aussi, donc il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines simples tels que $P(N^2) = \begin{pmatrix} P(BA) & 0_n \\ 0_n & P(AB) \end{pmatrix} = 0_{2n}$. On a alors $P(BA) = P(AB) = 0_n$, P est annulateur de AB et BA, et comme il est scindé à racines simples AB et BA sont diagonalisables.

****

Pour que la réciproque soit vraie, il faudrait que AB diagonalisable implique BA diagonalisable.

Ceci est vrai ici, car *A* et *B* sont inversibles.

Comme AB est diagonalisable, il existe un polynôme *P* scindé à racines simples annulateur de AB.

Posons $P=\sum_{k=0}^{q} a_k X^k$. On a alors :

$$BP(AB)A = B\sum_{k=0}^{q} a_k (AB)^k A = \sum_{k=0}^{q} a_k B(AB)^k A = \sum_{k=0}^{q} a_k (BA)^{k+1} = (BA)\sum_{k=0}^{q} a_k (BA)^k = (BA)P(BA).$$

Comme $P(AB)=0_n$, on a $(BA)P(BA)=0_n$ et comme *A* et *B* sont inversibles, on a :

$$P(BA) = A^{-1}B^{-1}\left[(BA)P(BA)\right] = 0_n .$$

Ainsi, *P*, polynôme *P* scindé à racines simples est annulateur de BA, donc est diagonalisable.

On a alors avec le même polynôme *P*, $P(N^2)=\begin{pmatrix} P(BA) & 0_n \\ 0_n & P(AB)\end{pmatrix}=0_{2n}$ donc *P* (scindé à racines simples) est annulateur de N^2 et N^2 est diagonalisable. D'après la première question, *N* l'est aussi.

****

II) Par comparaison série-intégrale ($t\mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue, positive et décroissante sur $[1,+\infty[$), on obtient $R_n \le \int_n^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}=\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\le \frac{1}{n^\alpha}+R_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit :

$$1-\frac{\alpha-1}{n}\le(\alpha-1)n^{\alpha-1}R_n\le 1 \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to+\infty}(\alpha-1)n^{\alpha-1}R_n=1 \quad\Rightarrow\quad R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

On a alors en posant $S=\lim_{n\to+\infty} S_n=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}>0$:

$$\frac{R_n}{S_n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{R_n}{S}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{S(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

Alors, $\sum \frac{R_n}{S_n}$ converge si et seulement si $\alpha-1>1$, soit $\alpha>2$.

Planche n° 13

I) Donner les éléments propres de $A(t)=\begin{pmatrix}1-3t & 4t\\ -2t & 1+3t\end{pmatrix}$.

Si *A* est diagonalisable, donner la matrice de passage *P*.

Résoudre le système différentiel $Y'(t)=A(t)Y(t)$.

II) Une variable aléatoire *X* suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$.

Calculer l'espérance de $Y=X^2+1$. Calculer $P(2X<Y)$.

Calculer la probabilité que *X* soit pair ; y a-t-il plus de chances que *X* soit impair ?

I) On a $\chi_{A(t)}=(X-1+t)(X-1-t)$, donc $Sp\big(A(t)\big)=\{1-t\,,1+t\}$, avec $1-t\neq 1+t$ quand $t\neq 0$ (et dans ce cas, $A(t)$ est diagonalisable). Et $A(0)=I_2$, donc $A(t)$ est diagonalisable pour tout $t\in\mathbb{R}$.

En résolvant $A(t)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(1-t)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $A(t)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(1+t)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, on trouve une matrice de passage indépendante de t : $P=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$.

****

On a alors pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\begin{pmatrix}1-t&0\\0&1+t\end{pmatrix}=P^{-1}A(t)P$, et :

$$Y'(t)=A(t)Y(t)\quad\Leftrightarrow\quad P^{-1}Y'(t)=\begin{pmatrix}1-t&0\\0&1+t\end{pmatrix}P^{-1}Y(t)\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}a'(t)=(1-t)a(t)\\b'(t)=(1+t)b(t)\end{cases}$$

avec $P^{-1}Y(t)=\begin{pmatrix}a(t)\\b(t)\end{pmatrix}$.

On a enfin $a(t)=K_1\exp\left(t-\frac{1}{2}t^2\right)$ et $b(t)=K_2\exp\left(t+\frac{1}{2}t^2\right)$ avec $K_1,K_2\in\mathbb{R}$, d'où :

$$Y(t)=P\begin{pmatrix}a(t)\\b(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a(t)+b(t)\\a(t)+b(t)\end{pmatrix}=K_1e^{t-\frac{1}{2}t^2}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+K_2e^{t+\frac{1}{2}t^2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

****

II) On a :

$$E(Y)=E(X^2+1)=E(X^2)+1=V(X)+E(X)+1=\lambda^2+\lambda+1.$$

****

Et :

$$\begin{aligned}P(2X<Y)&=P(Y-2X>0)=P\big(X^2+1-2X>0\big)=P\big((X-1)^2>0\big)\\&=1-P\big((X-1)^2=0\big)=1-P\big(X=1\big)=1-\lambda e^{-\lambda}\end{aligned}$$

****

Enfin :

$$P\big(X\in 2\mathbb{N}\big)=\sum_{n\geq 0}P\big(X=2n\big)=\sum_{n\geq 0}e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^{2n}}{(2n)!}=e^{-\lambda}\operatorname{ch}\lambda=\frac{1}{2}(1+e^{-2\lambda}).$$

Donc :

$$P\big(X\in 2\mathbb{N}+1\big)=1-P\big(X\in 2\mathbb{N}\big)=1-\frac{1}{2}(1+e^{-2\lambda})=\frac{1}{2}(1-e^{-2\lambda}).$$

Et :

$$P\big(X\in 2\mathbb{N}\big)-P\big(X\in 2\mathbb{N}+1\big)=\frac{1}{2}(1+e^{-2\lambda})-\frac{1}{2}(1-e^{-2\lambda})=e^{-2\lambda}>0.$$

Ainsi, il y a plus de chances que *X* soit pair.