Corrigés de la série 2 - CCINP

Planche n° 5

I) Montrer que la suite des fonctions f_n, définies sur $[0,1]$ par $f_n(0)=0$ et, pour $x>0$, $f_n(x)=x\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{2n}$ converge simplement mais pas uniformément vers une fonction *f* que l'on précisera.

II) On donne un endomorphisme *u* d'un espace vectoriel *E* de dimension $n\geq 1$.

On suppose *u* injectif : déterminer $K_m=\ker u^m$ et $I_m=\operatorname{Im} u^m$.

Montrer que pour tout entier $m\geq 1$: $K_m\subset K_{m+1}$ et $I_{m+1}\subset I_m$.

On suppose *u* non injectif : montrer qu'il existe $p\in[\![0,n]\!]$ tel que $K_p=K_{p+1}$ et $I_p=I_{p+1}$.

Montrer alors que pour tout $q\in\mathbb{N}$, $K_p=K_{p+q}$, $I_p=I_{p+q}$ et $E=K_p\oplus I_p$.

I) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0)=0$ et pour tout $x\in\,]0,1]$ tel que $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|<1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=0$.

Et $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|=1$ quand $x=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+k\pi}$ avec $k\in\mathbb{N}$, et, dans ce cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=x$.

Ainsi, la suite (f_n) converge simplement vers :

$$f: x\mapsto\begin{cases} 0 & \text{quand } x\in[0,1]\setminus\left\{\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^{-1}, k\in\mathbb{N}\right\} \\ \left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^{-1} & \text{quand } x\in\left\{\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^{-1}, k\in\mathbb{N}\right\}\end{cases}$$

Comme la fonction *f* n'est pas continue sur $[0,1]$ et toutes les fonctions f_n le sont (même en 0 car pour tout $x\in[0,1]$, $|f_n(x)|\leq x$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x)=0=f_n(0)$), la convergence n'est pas uniforme.

****

II) Comme *u* est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, s'il est injectif il est bijectif. Alors, pour tout entier naturel *m*, u^m est aussi bijectif et donc :

$$K_m=\ker u^m=\{0\} \text{ et } I_m=\operatorname{Im} u^m=E.$$

****

Soit un entier $m\geq 1$.

- Pour tout $x\in K_m=\ker u^m$, $u^{m+1}(x)=u\left(u^m(x)\right)=u(0)=0$, donc $x\in K_{m+1}$ et ainsi : $K_m\subset K_{m+1}$.

- On a $\operatorname{Im} u \subset E$, donc $\operatorname{Im} u^{m+1} = u^m(\operatorname{Im} u) \subset u^m(E) = \operatorname{Im} u^m$, soit : $I_{m+1} \subset I_m$.

****

Comme tout $m \in \mathbb{N}$, $I_{m+1} \subset I_m \subset E$, on a $rg\,(u^{m+1}) \leq rg\,(u^m) \leq n$, donc la suite $\left(rg\,(u^m)\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'entier naturels décroissante, donc stationnaire. Notons p le plus petit entier tel que $I_p = I_{p+1}$. On a alors $0 \leq rg\,(u^{p+1}) = rg\,(u^p) < rg\,(u^{p-1}) < ... < rg\,(u) < rg\,(u^0) = rg\,(id_E) = n$ et si $p > n$, alors on aurait $p+1 > n+1$ entiers compris entre 0 et n, ce qui est absurde, donc $p \in [\![0,n]\!]$.

****

Comme $rg\,(u^{p+1}) = rg\,(u^p)$, on a $\dim\left(\ker u^{p+1}\right) = \dim\left(\ker u^p\right)$ par le théorème du rang et, comme $\ker u^p \subset \ker u^{p+1}$, on obtient $K_p = K_{p+1}$.

Pour $q = 0$, on a $I_p = I_{p+q}$ et, si, pour $q \in \mathbb{N}$, on a $I_p = I_{p+q}$, alors on a :

$$I_{p+q+1} = \operatorname{Im} u^{q+p+1} = u^q(\operatorname{Im} u^{p+1}) \underset{I_p=I_{p+1}}{=} u^q(\operatorname{Im} u^p) = \operatorname{Im} u^{q+p} = I_{p+q}.$$

Ceci prouve par récurrence sur q que pour tout $q \in \mathbb{N}$: $\underline{I_p = I_{p+q}}$.

Alors, comme plus haut, $rg\,(u^{p+1}) = rg\,(u^p)$, donc $\dim\left(K_p\right) = \dim\left(K_{p+q}\right)$, ce qui, avec $K_p \subset K_{p+q}$, implique que pour tout $q \in \mathbb{N}$: $\underline{K_p = K_{p+q}}$.

Enfin, on a toujours grâce au théorème du rang $\dim K_p + \dim I_p = \dim E$.

Si $x \in K_p \cap I_p$, alors, $u^p(x) = 0$ et il existe $z \in E$ tel que $x = u^p(z)$, donc $u^{2p}(z) = 0$, soit $z \in K_{2p} = K_p$ et $x = u^p(z) = 0$. Ainsi, $K_p \cap I_p = \{0\}$

Finalement, on a bien : $\underline{E = K_p \oplus I_p}$.

Planche n° 6

I) Soit la suite (u_n), définie par $u_0 \in [0,\pi]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - \cos u_n$.

Montrer que (u_n) converge vers 0, puis déterminer la nature de la série de terme général u_n.

II) Pour a donné non nul dans un espace euclidien E, déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $u : x \mapsto \alpha(x\,|\,a)a - x$ est une isométrie.

I) On a $u_0 \in [0,\pi]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \in [0,2] \subset [0,\pi]$, donc $u_n \in [0,\pi]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Posons $f(x) = 1 - \cos x - x$. La fonction f est définie, dérivable (donc continue), avec $f'(x) = \sin x - 1 \leq 0$ (qui ne s'annule qu'une fois), donc strictement décroissante sur $[0,\pi]$. Comme $f(0) = 0$, on a $f(x) < 0$ sur $]0,\pi]$ (donc la seule solution de $f(x) = 0$ est 0).

Alors, si $u_0 = 0$, (u_n) est constante nulle (donc converge vers 0) et si $u_0 \in]0,\pi]$, alors $u_n \in]0,\pi]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $f(u_n) = u_{n+1} - u_n < 0$, donc (u_n) est strictement décroissante, minorée par 0, donc converge vers le point d'annulation de f (car f est continue) soit 0.

****

Si $u_0 = 0$, la série $\sum u_n$ est nulle donc converge.

Si $u_0 \in]0,\pi]$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1-\cos u_n}{u_n} \to 0$ car $u_n \to 0$. D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum u_n$ converge.

****

II) Remarquons déjà que quel que soit le réel α, u est un endomorphisme de *E* (par bilinéarité du produit scalaire). De plus, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $x \in E$, on a :

$$\|u(x)\|^2 = \|\alpha(x \mid a)a - x\|^2 = \|\alpha(x \mid a)a\|^2 - 2\alpha(x \mid a)(a \mid x) + \|x\|^2 = \left(\alpha^2\|a\|^2 - 2\alpha\right)(x \mid a)^2 + \|x\|^2.$$

Alors, *u* est une isométrie si et seulement si pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|^2 = \|x\|^2$, soit :

$$\left(\alpha^2\|a\|^2 - 2\alpha\right)(x \mid a)^2 = 0.$$

Comme $(x \mid a)$ n'est pas toujours nul (par exemple pour $x = a$), ceci revient à $\alpha^2\|a\|^2 - 2\alpha = 0$ et ainsi, les valeurs de α pour lesquelles *u* est une isométrie sont 0 (et dans ce cas, $u = -id_E$) et $\frac{2}{\|a\|^2}$.

Planche n° 7

I) Nature de $I = \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t} dt$ et $J = \int_0^{+\infty} \sin t \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$.

II) Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et une matrice diagonale *D* semblable à *A*.

Montrer que si *M* commute avec *D*, elle est diagonale.

Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^7 + M + I_3 = A$.

I) On a pour tout $t \in [1,+\infty[$, $\frac{e^{\sin t}}{t} \geq \frac{e^{-1}}{t}$ et $I = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-1}}{t} dt$ diverge, donc $I = \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t} dt$ diverge.

****

On a pour tout $t \in]0,+\infty[$, $\left|\sin t \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right| \leq |\sin t|$ et $\lim_{t \to 0} |\sin t| = 0$, donc $t \mapsto \sin t \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ se prolonge par continuité en 0 et $\int_0 \sin t \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$ converge.

Par ailleurs, pour tout $a \in [1,+\infty[$, on a par IPP/

$$\int_1^a \sin t \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt = \left[-\cos t \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right]_1^a - \int_1^a \frac{1}{t^2} \cos t \cos\left(\frac{1}{t}\right) dt.$$

- Comme plus haut, on a $\left|\cos t \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right| \leq \left|\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right|$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{t}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \cos t \sin\left(\frac{1}{t}\right) = 0$.

- Pour tout $t \in [1,+\infty[$, $\left|\frac{1}{t^2}\cos t \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right| \leq \frac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge, donc $\int_1^{a} \frac{1}{t^2}\cos t \cos\left(\frac{1}{t}\right)dt$ est absolument convergente donc convergente.

Ainsi, $\int_1^{+\infty} \sin t \sin\left(\frac{1}{t}\right)dt$ converge et donc $J = \int_0^{+\infty} \sin t \sin\left(\frac{1}{t}\right)dt$ converge.

****

II) On a $\chi_A = (X-1)(X-3)(X+1)$, donc A admet trois valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable. On a $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ -1 & 3/4 & 1 \end{pmatrix}$.

****

Si $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, on a :

$$MD = DM \iff \begin{pmatrix} a & 3b & -c \\ d & 3e & -f \\ g & 3h & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} \iff b=c=d=f=g=h=0 \iff M \text{ diagonale}.$$

****

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $N = P^{-1}MP$. On a alors $N^7 = P^{-1}M^7P$ et :

$$M^7 + M + I_3 = A \iff N^7 + N + I_3 = D.$$

Or, N commute avec $N^7 + N + I_3$, donc ici avec D et ainsi, N est diagonale.

Alors, si $N = diag(x,y,z)$, on a $N^7 + N + I_3 = diag(Q(x),Q(y),Q(z))$ avec $Q = X^7 + X + 1$.

Remarquons que $Q'(x) = 7x^6 + 1 > 0$, donc la fonction polynôme Q est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante de $\lim\limits_{-\infty} Q = -\infty$ à $\lim\limits_{+\infty} Q = +\infty$: elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Alors :

$$N^7 + N + I_3 = D \iff \begin{pmatrix} Q(x) & 0 & 0 \\ 0 & Q(y) & 0 \\ 0 & 0 & Q(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} Q(x) = 1 \\ Q(y) = 3 \\ Q(z) = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = Q^{-1}(1) = 0 \\ y = Q^{-1}(3) = 1 \\ z = Q^{-1}(-1) = -1 \end{cases}$$

Ainsi, $N = diag(0,1,-1)$ et $M = PNP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}$ est la seule solution (dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$) de l'équation $M^7 + M + I_3 = A$.

Planche n° 8

I) Montrer que $\sum \dfrac{2n^2+3n+1}{2^{n+1}}$ converge et calculer sa somme.

II) Calculer le polynôme caractéristique de $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2-n & n-2 & n \end{pmatrix}$.

Déterminer les sous-espaces propres de A_3. Les matrices A_1 et A_2 sont-elles diagonalisables ?

I) On a $\dfrac{2n^2+3n+1}{2^{n+1}} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, donc $\sum \dfrac{2n^2+3n+1}{2^{n+1}}$ converge et, comme les séries $\sum \dfrac{n(n+1)}{2^{n+1}}$ et $\sum \dfrac{n+1}{2^{n+1}}$ convergent aussi (pour la même raison), on peut écrire :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{2n^2+3n+1}{2^{n+1}} = \sum_{n\geq 0} n(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

Pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, si $f(x) = \sum_{n\geq 0} x^n = \dfrac{1}{1-x}$, on a :

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n\geq 1} nx^{n-1} = \sum_{n\geq 0}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \\ x f''(x) &= \sum_{n\geq 1} n(n+1)x^n = \frac{2x}{(1-x)^3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &\sum_{n\geq 0}(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n = 4 \\ &\sum_{n\geq 0} n(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n = 8 \end{aligned}\right.$$

Et ainsi :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{2n^2+3n+1}{2^{n+1}} = 10 .$$

****

II) En développant par rapport à la première ligne, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\chi_{A_n} = X^3 - nX^2 - X + 4n - 6 = (X-2)\left(X^2 - (n-2)X - 2n + 3\right).$$

****

On a $\chi_{A_3} = (X-2)(X^2 - X - 3)$, donc $Sp(A_3) = \left\{2, \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right\}$, et :

$$\begin{aligned} &\ker(A - 2I_3) = \mathrm{Vect}\left[(1,0,1)\right] \\ &\ker\left(A - \frac{1+\sqrt{13}}{2} I_3\right) = \mathrm{Vect}\left[\left(1, \frac{11-3\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)\right] \\ &\ker\left(A - \frac{1-\sqrt{13}}{2} I_3\right) = \mathrm{Vect}\left[\left(1, \frac{11+3\sqrt{13}}{2}, \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

****

- $\chi_{A_1} = (X-2)(X^2+X+1)$ possède une racine réelle (2) et deux racines complexes (j et $\overline{j}$), donc A_1 n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$, mais l'est dans $\mathbb{C}$.
- $\chi_{A_2} = (X-2)(X^2-1) = (X-2)(X-1)(X+1)$ possède trois racines réelles (2, 1 et – 1), donc A_2 est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.