

Corrigés de la série 1 - Mines-Ponts

Planche n° 1

I) Donner la définition d'un projecteur orthogonal d'un espace E euclidien.

Soient p et q deux projecteurs orthogonaux de E .

Montrer que le polynôme caractéristique de $u = p + q$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Montrer que toutes les valeurs propres de u sont dans $[0;2]$.

Déterminer $\ker u$ et $\ker(u - 2id)$

II) Si R est le rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$, quel est le mode de convergence de f sur $] -R; R[$?

On note p_n le nombre de partitions de $\llbracket 1, n \rrbracket$ (on rappelle que (U_1, \dots, U_p) est une partition de $\llbracket 1, n \rrbracket$ si et seulement si les U_k sont deux à deux disjointes et si leur réunion vaut $\llbracket 1, n \rrbracket$).

Montrer que $p_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k$.

On pose $p_0 = 1$. Montrer que $f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{p_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence $R \geq 1$, puis calculer $f(x)$.

I) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, posons $J_k = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (où le 1 apparaît r fois).

Il existe une base orthonormée \mathcal{B} (resp. \mathcal{B}') dans laquelle la matrice de p (resp. q) est J_r avec $r = \text{rg}(p)$ (resp. J_s avec $s = \text{rg}(q)$). Avec $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ $\in O_n(\mathbb{R})$, on a $M_{\mathcal{B}}(q) = PJ_s^t P$ et donc :

$$A = M_{\mathcal{B}}(u) = J_r + PJ_s^t P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

De plus :

$${}^t A = {}^t J_r + {}^t ({}^t P)^t J_s {}^t P = J_r + PJ_s^t P = A.$$

Ainsi, A est une matrice symétrique réelle, donc diagonalisable : le polynôme caractéristique de A , donc de u , est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Pour tout $x \in E$, $(p(x) | x - p(x)) = 0$ donc $(p(x) | x) = \|p(x)\|^2$ et de même, $(q(x) | x) = \|q(x)\|^2$.

Soit $\lambda \in Sp(u)$ et x un vecteur propre associé (non nul).

- D'après l'inégalité de Bessel, $\|p(x)\| \leq \|x\|$ et $\|q(x)\| \leq \|x\|$, donc :

$$|\lambda| \cdot \|x\| = \|\lambda x\| = \|u(x)\| = \|p(x) + q(x)\| \leq \|p(x)\| + \|q(x)\| \leq 2\|x\|.$$

Donc $|\lambda| \leq 2$.

$$\bullet \quad (u(x) | x) = (\lambda x | x) = \lambda \|x\|^2 = (p(x) + q(x) | x) = (p(x) | x) + (q(x) | x) = \|p(x)\|^2 + \|q(x)\|^2.$$

Donc $\lambda \geq 0$.

Finalement, on a bien $\lambda \in [0; 2]$.

Pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$ avec égalité ssi $p(x) = x$ (car $\|p(x)\| + \|x - p(x)\| = \|x\|$).

Si $x \in \ker(u - 2id)$, on a :

$$2\|x\| = \|2x\| = \|u(x)\| = \|p(x) + q(x)\| \leq \|p(x)\| + \|q(x)\| \leq 2\|x\| \Rightarrow \|p(x)\| + \|q(x)\| = 2\|x\|.$$

Si $p(x) \neq x$ ou $q(x) \neq x$, on a $\|p(x)\| + \|q(x)\| < 2\|x\|$, donc $p(x) = q(x) = x$, soit $x \in \text{Im } p \cap \text{Im } q$.

Réciproquement, si $x \in \text{Im } p \cap \text{Im } q$, on a $u(x) = 2x$. Ainsi :

$$\ker(u - 2id) = \text{Im } p \cap \text{Im } q.$$

Si $x \in \ker u$, on a $p(x) + q(x) = 0$, donc $(p(x) + q(x) | x) = \|p(x)\|^2 + \|q(x)\|^2 = 0$, ce qui implique que $p(x) = q(x) = 0$. Réciproquement, si $x \in \ker p \cap \ker q$, on a $u(x) = 0$. Ainsi :

$$\ker u = \ker p \cap \ker q.$$

II) La série $f(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$ converge normalement sur tout segment inclus dans $] -R; R[$.

Remarquons déjà que le nombre de partitions de n'importe quel ensemble de cardinal n est p_n .

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons $q_{n,k}$ le nombre de partitions de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ pour lesquelles $n+1$ appartient à une partie à $k+1$ éléments. On a alors $p_{n+1} = \sum_{k=0}^n q_{n,k}$.

Une partie à $k+1$ éléments de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ contenant $n+1$ est la réunion d'une partie à k éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et de $\{n+1\}$: il y en a $\binom{n}{k}$. Une telle partie étant fixée, pour construire une partition de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$, il faut effectuer une partition de l'ensemble des $n-k$ entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$ restants : il y en a

$$p_{n-k}. \text{ Ainsi, } q_{n,k} = \binom{n}{k} p_{n-k} \text{ et } p_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} p_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k.$$

On a $p_1 = 1 = p_0 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} p_k$, donc la relation ci-dessus reste vraie pour $n=0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{p_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)! k!} p_k.$$

On a $\frac{p_0}{0!} = 1 \leq 1$ et si $\frac{p_k}{k!} \leq 1$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $\frac{1}{(n-k)!} \frac{p_k}{k!} \leq 1$ et :

$$\frac{p_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \frac{p_k}{k!} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n 1 = 1.$$

Ceci prouve par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{p_n}{n!} \leq 1$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left| \frac{p_n}{n!} x^n \right| \leq |x|^n$.

Comme le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} x^n$ est 1, que f a un rayon de convergence $R \geq 1$.

Pour tout $x \in]-R; R[$, on a :

$$f'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{p_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n \geq 0} \frac{p_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k \right) x^n = \sum_{n \geq 0} \left[\sum_{k=0}^n \left(\frac{x^k}{k!} p_k \right) \left(\frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \right) \right].$$

Les séries $\sum \frac{x^n}{n!} p_n$ et $\sum \frac{x^n}{n!}$ sont absolument convergentes de somme respectives $f(x)$ et e^x ,

donc le produit de Cauchy $\sum \left[\sum_{k=0}^n \left(\frac{x^k}{k!} p_k \right) \left(\frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \right) \right]$ converge vers $f(x)e^x$.

Ainsi, $f'(x) = f(x)e^x$, ce qui donne $f(x) = Ke^{e^x}$ et $f(0) = 1 = Ke$, donc :

$$f(x) = e^{e^x - 1}.$$

Planche n° 2

I) Résoudre dans \mathbb{R} , $\arctan(x-1) + \arctan x + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}$.

II) Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^3$.

I) Posons $f(x) = \arctan(x-1) + \arctan x + \arctan(x+1)$.

Comme les fonctions $x \mapsto x-1$, $x \mapsto x+1$ et arctangente sont continues et strictement croissantes sur \mathbb{R} , la fonction f est aussi continue et strictement croissante sur \mathbb{R} .

De plus, $f(0) = \arctan(-1) + \arctan 1 = 0 < \frac{\pi}{2}$ et $f(1) = \arctan 1 + \arctan 2 > \frac{\pi}{2}$, donc d'après le théorème de la bijection continue, $f(x) = \frac{\pi}{2}$ admet exactement une solution a dans \mathbb{R} et $0 < a < 1$.

On a $\arctan(a-1) + \arctan(a+1) = \frac{\pi}{2} - \arctan a$, donc :

$$\tan(\arctan(a-1) + \arctan(a+1)) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan a\right) \Leftrightarrow \frac{a-1+a+1}{1-(a-1)(a+1)} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a^2 = \frac{2}{3}.$$

Et comme $a > 0$, $\arctan(x-1) + \arctan x + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}$ admet $\sqrt{\frac{2}{3}}$ pour unique solution.

II) Posons $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^3$. On a $S_0 = 0$, $S_1 = 1$ et $S_2 = 10$. On prend $n \geq 3$.

On a $S_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^3$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$.

En dérivant et en multipliant par x , on obtient : $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k x^k = nx(1+x)^{n-1}$.

En dérivant et en multipliant par x , on obtient : $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^2 x^k = n(x+nx^2)(1+x)^{n-2}$.

En dérivant, on obtient : $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^3 x^{k-1} = n(1+2nx)(1+x)^{n-2} + n(x+nx^2)(n-2)(1+x)^{n-3}$.

En évaluant en 1, on obtient : $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^3 = n(1+2n)2^{n-2} + n(1+n)(n-2)2^{n-3} = 2^{n-3} n^2 (n+3)$.

La formule reste valable pour $n = 0, 1$ et 2 , donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^3 = 2^{n-3} n^2 (n+3).$$

Planche n° 3

I) On note $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et on donne $p \in \mathbb{R}$.

Trouver les fonctions $g \in C^2(U, \mathbb{R})$ telles qu'il existe $f \in C^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ vérifiant pour tout $(x, y) \in U$:

$$g(x, y) = f(x^2 + y^2) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = p(x^2 + y^2).$$

II) Montrer que u , endomorphisme d'un espace vectoriel E , est une homothétie si et seulement s'il commute avec tout automorphisme orthogonal de E .

Existe-t-il toujours une base canonique dans un espace vectoriel ? Si oui, y en a-t-il une seule ? Plusieurs ? Une infinité ?

Si u commute avec toutes les symétries orthogonales par rapport à un hyperplan de E , qu'en déduit-on pour u ?

I) Avec $g(x, y) = f(x^2 + y^2)$, on a pour tout $(x, y) \in U$:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = 4f'(x^2 + y^2) + 4(x^2 + y^2)f''(x^2 + y^2).$$

Donc, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = p(x^2 + y^2)$ devient pour tout $(x, y) \in U$:

$$4f'(x^2 + y^2) + 4(x^2 + y^2)f''(x^2 + y^2) = p(x^2 + y^2).$$

Soit pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(t) + t f''(t) = \frac{p}{4}t$ donc f' est solution sur \mathbb{R}_+^* de $ty' + y = \frac{p}{4}t$.

On a donc $f'(t) = \frac{p}{8}t + \frac{a}{t}$ avec $a \in \mathbb{R}$, donc $f(t) = \frac{p}{16}t^2 + a \ln t + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et :

$$g(x, y) = \frac{p}{16}(x^2 + y^2)^2 + a \ln(x^2 + y^2) + b.$$

II) Soit $x \in E \setminus \{0\}$ et s la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Vect}(x)$.

On a $s \in O(E)$, donc $su = us$. On a alors, $s(u(x)) = u(s(x)) = u(x)$, donc $u(x) \in \text{Vect}(x)$, soit $u(x) = \lambda_x x$ avec $\lambda_x \in \mathbb{K}$.

Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$u(\alpha x) = \lambda_{\alpha x} \alpha x = \alpha u(x) = \alpha \lambda_x x \Rightarrow \lambda_{\alpha x} = \lambda_x.$$

Alors, pour tous $x, y \in E$ tels que (x, y) est libre, on a :

$$u(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y \Rightarrow \lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y.$$

Et $u(0) = 0 = \lambda_x 0$. Ainsi, pour tout $y \in E$, $u(y) = \lambda_x y$ donc u est une homothétie.

La réciproque est immédiate car les homothéties commutent avec tous les endomorphismes de E .

Définition (la plus fréquente) : Dans un espace vectoriel, une base canonique est une base qui se présente de manière naturelle d'après la manière dont l'espace vectoriel est présenté.

Remarque : Si un espace possède une base canonique, on peut définir un produit scalaire canonique : le produit scalaire pour lequel la base canonique est orthonormée.

Réciproque, si E est un espace euclidien, on pourrait éventuellement définir une base canonique comme une base orthonormée...

Cette question est donc fort vaseuse !

La preuve que l'on a faite plus haut n'utilise que la commutativité de u avec des symétries orthogonales par rapport à des droites. Or, si s est symétrie orthogonale par rapport à une droite D qui commute avec u , $-s$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan D^\perp et commute avec u .

Réciproquement, si s est symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan H qui commute avec u , $-s$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite H^\perp et commute avec u .

Donc, si u commute avec toutes les symétries orthogonales par rapport à un hyperplan de E , il commute avec toutes les symétries orthogonales par rapport à une droite de E , donc c'est une homothétie.

Planche n° 4

I) Justifier que $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1-x\sin^2 t} dt$ est définie sur $] -\infty, 1[$, puis développer f en série entière.

II) Déterminer le polynôme caractéristique de $B = \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$ en fonction de celui de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que si A est diagonalisable, B l'est aussi.

I) Pour tout $x \in] -\infty, 1[$ et tout $t \in [0, 1]$, on a :

- $1 - x \sin^2 t \geq 1$ donc $1 - x \sin^2 t \neq 0$ quand $x \leq 0$;
- $0 \leq x \sin^2 t < \sin^2 t < 1$ donc $1 - x \sin^2 t \neq 0$ quand $0 < x < 1$.

Donc, pour tout $x \in] -\infty, 1[$, $t \mapsto \frac{e^{-t}}{1-x\sin^2 t}$ est définie et continue sur $[0, 1]$, donc f est bien définie sur $] -\infty, 1[$.

Pour tout $x \in] -1, 1[$ et tout $t \in [0, 1]$, on a $|x \sin^2 t| \leq |x| < 1$, donc $\frac{1}{1-x\sin^2 t} = \sum_{n \geq 0} (x \sin^2 t)^n$ et :

$$f(x) = \int_0^1 \left(\sum_{n \geq 0} e^{-t} x^n \sin^{2n} t \right) dt.$$

Soit $x \in] -1, 1[$ fixé et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto e^{-t} x^n \sin^{2n} t$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- f_n est continue sur $[0, 1]$;
- pour tout $t \in [0, 1]$, $|e^{-t} x^n \sin^{2n} t| \leq |x|^n$ et $\sum |x|^n$ converge ; ainsi, la série $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément sur $[0, 1]$.

On peut alors conclure que $\int_0^1 \left(\sum_{n \geq 0} f_n(t) \right) dt = \sum_{n \geq 0} \left(\int_0^1 f_n(t) dt \right)$, soit pour tout $x \in] -1, 1[$:

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \left(\int_0^1 e^{-t} x^n \sin^{2n} t dt \right) = \sum_{n \geq 0} \left(\int_0^1 e^{-t} \sin^{2n} t dt \right) x^n = \sum_{n \geq 0} I_n x^n.$$

Et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 e^{-t} \sin^{2n} t dt = \int_0^1 e^{-t} \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^{2n} dt = \frac{1}{2^{2n}} \int_0^1 \left(e^{-t} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} e^{ikt} e^{-i(2n-k)t} \right) dt \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \int_0^1 e^{-(1+2i(n-k))t} dt = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \left[-\frac{e^{-(1+2i(n-k))t}}{1+2i(n-k)} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \left(\sum_{k=0}^n \binom{2n}{k} \left[-\frac{e^{-(1+2i(n-k))t}}{1+2i(n-k)} \right]_0^1 + \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} \left[-\frac{e^{-(1+2i(n-k))t}}{1+2i(n-k)} \right]_0^1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_n &= -\frac{1}{2^{2n}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \left[\frac{e^{-(1+2i(n-k))t}}{1+2i(n-k)} \right]_0^1 + \binom{2n}{n} [e^{-t}]_0^1 + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \left[\frac{e^{-(1-2i(n-k))t}}{1-2i(n-k)} \right]_0^1 \right) \\
&= -\frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \operatorname{Re} \left(\left[\frac{e^{-(1+2i(n-k))t}}{1+2i(n-k)} \right]_0^1 \right) - \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} [e^{-t}]_0^1 \\
&= \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=1}^n \binom{2n}{n-k} \frac{e^{-1} (-\cos(2k) + 2k \sin(2k)) + 1}{1+4k^2} - \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} (e^{-1} - 1)
\end{aligned}$$

II) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\chi_B(x) = \det \begin{pmatrix} xI_n - A & -I_n \\ -I_n & xI_n \end{pmatrix}_{\substack{C_j \leftarrow C_j + \frac{1}{x} C_{j+n} \\ \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket}} = \det \begin{pmatrix} xI_n - A - \frac{1}{x} I_n & -I_n \\ 0_n & xI_n \end{pmatrix} = \det \left(xI_n - A - \frac{1}{x} I_n \right) \det(xI_n).$$

Donc pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\chi_B(x) = x^n \chi_A \left(x - \frac{1}{x} \right)$ et :

$$\chi_B(0) = \det \begin{pmatrix} -A & -I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}_{\substack{C_j \leftrightarrow C_{j+n} \\ \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket}} = (-1)^n \det \begin{pmatrix} I_n & A \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = (-1)^n.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de B et $X = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ avec $Y, Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé. On a $\chi_B(0) = (-1)^n \neq 0$, donc $\lambda \neq 0$ et :

$$BX = \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AY + Z \\ Y \end{pmatrix} = \lambda X = \lambda \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} AY + Z = \lambda Y \\ Y = \lambda Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AY = \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right) Y \\ Z = \frac{1}{\lambda} Y \end{cases}$$

Or, $X \neq 0$, donc $Y \neq 0$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\mu = \lambda - \frac{1}{\lambda}$ de A .

Si $\left(\begin{pmatrix} Y_1 \\ \lambda^{-1} Y_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} Y_r \\ \lambda^{-1} Y_r \end{pmatrix} \right)$ est une base de F_λ , le sous-espace propre de B associé à λ (avec $r = \dim F_\lambda$), la famille (Y_1, \dots, Y_r) est une famille libre de E_μ , le sous-espace propre de A associé à μ , et ainsi, on a :

$$\dim F_\lambda \leq \dim E_\mu.$$

Soit $\mu \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A . On a :

$$\lambda - \frac{1}{\lambda} = \mu \Leftrightarrow \lambda^2 - \mu\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 4}}{2} \neq 0.$$

Donc, il existe deux valeurs distinctes $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^*$ tel que $\lambda_i - \frac{1}{\lambda_i} = \mu$ et si Y est un vecteur propre de A associé à la valeur propre μ , on a $AY = \mu Y = \left(\lambda_i - \frac{1}{\lambda_i}\right)Y$, on a $B \begin{pmatrix} Y \\ \lambda_i^{-1}Y \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} Y \\ \lambda_i^{-1}Y \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} Y \\ \lambda_i^{-1}Y \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B associé à λ_i .

Si (Y_1, \dots, Y_p) est une base de E_μ le sous-espace propre de A associé à μ , la famille $\left(\begin{pmatrix} Y_1 \\ \lambda_i^{-1}Y_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} Y_p \\ \lambda_i^{-1}Y_p \end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de F_{λ_i} le sous-espace propre de B associé à λ_i , donc :

$$\dim F_{\lambda_i} \geq \dim E_\mu.$$

Ainsi, on a $\dim F_{\lambda_1} = \dim F_{\lambda_2} = \dim E_\mu$, et $\sum_{\lambda \in Sp(B)} \dim F_\lambda = 2 \sum_{\mu \in Sp(A)} \dim E_\mu$.

Alors :

$$A \text{ diagonalisable} \Leftrightarrow \sum_{\mu \in Sp(A)} \dim E_\mu = n \Leftrightarrow \sum_{\lambda \in Sp(B)} \dim F_\lambda = 2 \sum_{\mu \in Sp(A)} \dim E_\mu = 2n \Leftrightarrow B \text{ diagonalisable}.$$