Corrigés de la série 1 - Centrale-Supélec

Planche n° 1

Montrer que *f*, définie pour réel $x>0$ par $f(x)=\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-xt}}{1+t^2}dt$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Trouver un équivalent de *f* en + ∞, puis en 0.

Soit $g:(x,t)\mapsto\frac{1-e^{-xt}}{1+t^2}$, définie sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+$.

- Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $x\mapsto g(x,t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, avec :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)=t\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\quad\text{et}\quad\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)=-t^2\frac{e^{-xt}}{1+t^2}.$$

- Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $t\mapsto g(x,t)$ et $t\mapsto\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+$ (car, comme $x>0$, on a $g(x,t)=\underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)=\underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$).
- Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $t\mapsto\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$ et tout $x\in[a,+\infty[$, $\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right|=\left|t^2\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\right|\le e^{-at}$ avec $t\mapsto e^{-at}$ positive, continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Alors, la fonction $x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-xt}}{1+t^2}dt$ est de classe C^2, sur tout $[a,+\infty[$ avec $a\in\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$ et ainsi $f:x\mapsto\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-xt}}{1+t^2}dt$ l'est aussi, en tant que produit de telles fonctions.

******

On a $f(x)=\frac{1}{x}\left(\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt\right)=\frac{\pi}{2x}-\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$ et pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$0\le\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt\le\int_0^{+\infty}e^{-xt}dt=\frac{1}{x}.$$

Donc, $\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt=\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$ et $f(x)=\frac{\pi}{2x}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$, donc :

$$\underline{f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\pi}{2x}}.$$

******

Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a $f(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1-e^{-xt}}{1+t^2}\,dt+\frac{1}{x}\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{1-e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$ et :

- Pour tout $u\in\mathbb{R}_+$, on a $u-\dfrac{u^2}{2}\le 1-e^{-u}\le u$, donc pour tout $t\in\mathbb{R}_+$:

$$\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{t}{1+t^2}\,dt-\frac{x}{2}\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{t^2}{1+t^2}\,dt\le\frac{1}{x}\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1-e^{-xt}}{1+t^2}\,dt\le\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{t}{1+t^2}\,dt.$$

Or :

$$\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{t}{1+t^2}\,dt=\frac{1}{2}\Big[\ln(1+t^2)\Big]_0^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\ln x$$

$$\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{t^2}{1+t^2}\,dt=\int_0^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=\big[t-\arctan t\big]_0^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc :

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\ln x-\frac{1}{2}-\frac{x}{2}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\le\frac{1}{x}\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1-e^{-xt}}{1+t^2}\,dt\le\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\ln x.$$

Or, $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]=0$, $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\left[-\frac{1}{2}-\frac{x}{2}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right]=-\frac{1}{2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\big[-\ln x\big]=+\infty$, donc :

$$\frac{1}{x}\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1-e^{-xt}}{1+t^2}\,dt\underset{x\to0^+}{\sim}-\ln x.$$

- On a :

$$0\le\frac{1}{x}\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{1-e^{-xt}}{1+t^2}\,dt\le\frac{1}{x}\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{x}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{\arctan x}{x}.$$

Et, $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x}{x}=1$, donc $x\mapsto\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{1-e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$ est bornée au voisinage de 0^+ et :

$$\frac{1}{x}\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1-e^{-xt}}{1+t^2}\,dt=\underset{x\to0^+}{o}\big(-\ln x\big).$$

Finalement, on obtient $f(x)=-\ln x+\underset{x\to0^+}{o}\big(-\ln x\big)$, soit :

$$\underline{f(x)\underset{x\to0^+}{\sim}-\ln x.}$$

Planche n° 2

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On cherche la dimension de $E=\left\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\setminus AMA=0_n\right\}$.

On suppose A diagonalisable. Montrer que $\dim E=\dim\left\{N\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\setminus DND=0_n\right\}$ où D est une matrice diagonale à définir. Donner alors la dimension de E en fonction du rang de A.

Peut-on généraliser au cas où A n'est pas diagonalisable ?

Si A est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ telles que $A = PDP^{-1}$.

Alors :

$$E = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus PDP^{-1}MPDP^{-1} = 0_n \right\} = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus D(P^{-1}MP)D = 0_n \right\}.$$

Et comme l'application $M \mapsto N = P^{-1}MP$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\dim E = \dim \left\{ N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus DND = 0_n \right\}.$$

******

Si $rg(A) = rg(D) = r$, on peut numéroter les valeurs propres de A de manière à ce que l'on ait $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0) = \begin{pmatrix} \Delta & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$.

On a $\Delta = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in GL_r(\mathbb{R})$ et pour tout $N = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & N_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $N_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, on a $DND = \begin{pmatrix} \Delta N_1 \Delta & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ et :

$$DND = 0_n \quad \Leftrightarrow \quad \Delta N_1 \Delta = 0_r \quad \Leftrightarrow \quad N_1 = 0_r \quad (\text{car } \Delta \in GL_r(\mathbb{R})) \quad \Leftrightarrow \quad N = \begin{pmatrix} 0_r & N_2 \\ N_3 & N_4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\dim E$ est la dimension du sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0_r & N_2 \\ N_3 & N_4 \end{pmatrix}$, soit :

$$\dim E = n^2 - r^2.$$

******

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r. Il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $M = PJ_rQ$ où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$.

Comme l'application $M \mapsto P^{-1}MQ^{-1}$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le raisonnement tenu plus haut persiste et donc on peut généraliser au cas où A n'est pas diagonalisable.

Planche n° 3

Montrer que $y'' = (x^4 + 1)y$ admet une unique solution f telle que $f'(0) = f(0) = 1$.

On admet que $\dfrac{1}{f^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $g : x \mapsto f(x)\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{dt}{f(t)^2}$ est solution de l'équation différentielle.

Montrer que $\dfrac{1}{f^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Si on admet que $\dfrac{1}{f^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on a admet aussi implicitement que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_+^*$ a priori, mais $f(0) = 1 \neq 0$).

Par ailleurs, si *f* est solution de $(E): \ y''=(x^4+1)y$, elle est au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$, donc $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{dt}{f(t)^2}$ l'est aussi. Alors, *g* est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$g'(x)=f'(x)\int_x^{+\infty}\frac{dt}{f(t)^2}-\frac{1}{f(x)} \quad \text{et} \quad g''(x)=f''(x)\int_x^{+\infty}\frac{dt}{f(t)^2}.$$

Donc :

$$g''(x)-(x^4+1)g(x)=f''(x)\int_x^{+\infty}\frac{dt}{f(t)^2}-(x^4+1)f(x)\int_x^{+\infty}\frac{dt}{f(t)^2}=0.$$

Ainsi, $g : x \mapsto f(x)\int_x^{+\infty}\frac{dt}{f(t)^2}$ est bien solution de l'équation différentielle (*E*).

******

On pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f''(x)=(x^4+1)f(x)$ donc f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$. Alors, f' est continue sur $\mathbb{R}_+$ et comme $f'(0)=1>0$, il existe $\alpha>0$ tel que $f'(x)>0$ pour tout $x \in [0,\alpha[$.

Supposons que $\mu=\sup\{\alpha>0 \backslash \forall x \in [0,\alpha[, f'(x)>0\}<+\infty$. Alors, $f'(x)>0$ pour tout $x \in [0,\mu[$ et $f'(\mu)=0$, par continuité de f'.

Ainsi, *f* est strictement croissante sur $[0,\mu[$ et comme $f(0)=1>0$, elle est strictement positive sur cet intervalle. Mais, $f''(x)=(x^4+1)f(x)>0$ pour tout $x \in [0,\mu[$, donc f' est strictement croissante sur $[0,\mu[$ et $f'(\mu)>f'(0)>0$.

Ceci est absurde, donc $\{\alpha>0 \backslash \forall x \in [0,\alpha[, f'(x)>0\}$ n'est pas majoré, ce qui implique que $f'>0$ sur $\mathbb{R}_+$. Avec le même raisonnement que ci-dessus, on obtient que *f* et f'' sont strictement positives sur $\mathbb{R}_+$, donc que f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et ainsi, que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x)\geq 1$. Alors, $f(x)-f(0)\geq x-0$, soit $f(x)\geq x+1$ et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$0 \leq \frac{1}{f(x)^2} \leq \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Comme $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, $\frac{1}{f^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Planche n° 4

Une famille $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toute une même loi, d'espérance nulle, prend un nombre fini de valeurs.

Montrer que pour tout réel $\varepsilon>0$, $h_+(\varepsilon)=\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+}\left(t\varepsilon-\ln\left(E(e^{tX_1})\right)\right)>0$.

On pose $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$. Montrer que $P\left(\frac{1}{n}S_n\geq\varepsilon\right)\leq e^{-nh_+(\varepsilon)}$, puis que pour tout $(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2$, $P\left(S_n\geq n\varepsilon\right)P\left(\sum\limits_{k=1}^{m}X_{n+k}\geq m\varepsilon\right)\leq P\left(S_{n+m}\geq(n+m)\varepsilon\right)$.

Posons $f(t) = t\varepsilon - \ln\left(E(e^{tX_1})\right)$.

Notons $X_1(\Omega) = X_n(\Omega) = \left\{x_1, \dots, x_q\right\}$ (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) avec $x_1 < \dots < x_q$ et, pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, $P\left(X_n = x_i\right) = P\left(X_1 = x_i\right) = p_i$.

Par hypothèse, on a $E(X_n) = E(X_1) = \sum_{i=1}^{q} p_i x_i = 0$, ce qui veut dire que $q \geq 2$ et qu'il existe $r \in [\![1, q-1]\!]$ tel que $x_1 < \dots < x_r < 0 \leq x_{r+1} < \dots < x_q$.

Par ailleurs, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = t\varepsilon - \ln\left(\sum_{i=1}^{q} p_i e^{tx_i}\right).$$

La fonction *f* est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = \varepsilon - \dfrac{\sum_{i=1}^{q} p_i x_i e^{tx_i}}{\sum_{i=1}^{q} p_i e^{tx_i}}$.

Donc, $f'(0) = \varepsilon - \dfrac{\sum_{i=1}^{q} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{q} p_i} = \varepsilon > 0$ et $f(0) = -\ln\left(\sum_{i=1}^{q} p_i\right) = 0$.

Comme f' est continue au voisinage de 0, elle reste strictement positive au voisinage de 0, donc *f* y est strictement croissante et ainsi, il existe $\alpha > 0$ tel que $f(x) > f(0) = 0$ pour tout $x \in \left]0, \alpha\right[$.

Ceci implique que *s'il existe*, $h_+(\varepsilon) = \sup_{t \in \mathbb{R}_+}\left(t\varepsilon - \ln\left(E(e^{tX_1})\right)\right) > 0$.

******

On suppose que $h_+(\varepsilon)$ existe. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a pour tout $t > 0$:

$$P\left(\frac{1}{n}S_n \geq \varepsilon\right) = P\left(tS_n \geq nt\varepsilon\right) = P\left(e^{tS_n} \geq e^{nt\varepsilon}\right).$$

Comme la variable e^{tS_n} est positive, on peut utiliser l'inégalité de Markov : $P\left(e^{tS_n} \geq e^{nt\varepsilon}\right) \leq \dfrac{E(e^{tS_n})}{e^{nt\varepsilon}}$.

Ainsi :

$$P\left(\frac{1}{n}S_n \geq \varepsilon\right) \leq \frac{E(e^{tS_n})}{e^{nt\varepsilon}} = e^{-nt\varepsilon}E(e^{t\sum_{k=1}^{n} X_k}) = e^{-nt\varepsilon}E\left(\prod_{k=1}^{n} e^{tX_k}\right) = e^{-nt\varepsilon}\prod_{k=1}^{n} E(e^{tX_k}).$$

La dernière inégalité est vraie car les variables X_k, donc les e^{tX_k}, sont indépendantes. Comme de plus elles suivent la même loi, on a $E(e^{tX_k}) = E(e^{tX_1})$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et ainsi :

$$P\left(\frac{1}{n}S_n \geq \varepsilon\right) \leq e^{-nt\varepsilon}\left(E(e^{tX_1})\right)^n = e^{-n\,f(t)}.$$

Avec $P\left(\frac{1}{n}S_n \geq \varepsilon\right) \leq 1$ et $e^{-n\,f(0)} = e^0 = 1$, l'inégalité ci-dessus reste vraie pour $t=0$ et ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $P\left(\frac{1}{n}S_n \geq \varepsilon\right) \leq e^{-n\,f(t)}$. En prenant le sup de *f*, on obtient :

$$P\left(\frac{1}{n}S_n \geq \varepsilon\right) \leq e^{-nh_+(\varepsilon)}.$$

******

Posons $Y = \sum_{k=1}^{m} X_{n+k} = \sum_{k=n+1}^{n+m} X_k$. Comme les X_k sont indépendantes et $[\![1,n]\!] \cap [\![n+1,n+m]\!] = \varnothing$, S_n et Y sont indépendantes, donc $P(S_n \geq n\varepsilon)P(Y \geq m\varepsilon) = P\left[(S_n \geq n\varepsilon) \cap (Y \geq m\varepsilon)\right]$.

On a alors $S_n + Y = S_{n+m}$ et $(S_n \geq n\varepsilon) \cap (Y \geq m\varepsilon) \subset (S_{n+m} \geq (n+m)\varepsilon)$, donc :

$$P(S_n \geq n\varepsilon)P\left(\sum_{k=1}^{m} X_{n+k} \geq m\varepsilon\right) = P(S_n \geq n\varepsilon)P(Y \geq m\varepsilon) = P\left[(S_n \geq n\varepsilon) \cap (Y \geq m\varepsilon)\right] \leq P(S_{n+m} \geq (n+m)\varepsilon).$$

Planche n° 5

Etudier la convergence simple sur $\mathbb{R}_+$ de la série de fonctions $u_n(t) = \frac{1}{n^2}e^{-nt}$.

On pose $f(x,y) = \sum_{n\geq 1} u_n(x^2+y^2)$. Montrer que *f* est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Montrer que *f* admet des dérivées partielles d'ordre 1, puis qu'elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $|u_n(t)| = u_n(t) \leq \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement vers une fonction *u*, continue sur $\mathbb{R}_+$ (car toutes les fonctions u_n le sont.

Ainsi, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = u(x^2+y^2)$ avec $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ polynômiale donc continue (et même de classe C^1) sur $\mathbb{R}^2$ et à images dans $\mathbb{R}_+$, et *u* continue sur $\mathbb{R}_+$. Ceci permet de conclure que *f* est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ avec $u_n'(t) = -\frac{1}{n}e^{-nt}$.

Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\sup_{t\in[a,+\infty[} |u_n'(t)| = \frac{1}{n}e^{-na} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $\sum_{n\geq 1} u_n'$ converge normalement sur $[a,+\infty[$ et ainsi, *u* est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et strictement positive sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, *f* admet des dérivées partielles d'ordre 1, puis qu'elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Planche n° 6

Soient $A\in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B\in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB=\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.

a) La matrice AB est-elle inversible ? Quelles sont les valeurs possibles de x ?

b) La matrice BA est-elle diagonalisable ?

c) Montrer que $\mathbb{R}^3=\operatorname{Im}A\oplus\ker B$.

d) Montrer qu'il existe une infinité de couples de matrices (A,B) vérifiant l'hypothèse de l'énoncé.

a) On a $\operatorname{Im}AB\subset\operatorname{Im}A$, donc $rg\,(AB)\le rg\,(A)$ et comme $A\in\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $rg\,(A)\le\min(2,3)=2$, donc $rg\,(AB)\le 2$ et $AB\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc AB n'est pas inversible.

On a $\det AB=1-x=0$ (car AB n'est pas inversible), donc $x=1$.

b) On a $AB=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$. Alors, $\chi_{AB}=X(X-1)(X-2)$ et $Sp\,(AB)=\{0,1,2\}$.

Soit $\lambda\in Sp\,(AB)\backslash\{0\}=\{1,2\}$ et X un vecteur propre (non nul) associé à λ. On a :

$$ABX=\lambda X\quad\Rightarrow\quad BA(BX)=\lambda(BX).$$

Et $BX\neq 0$, car sinon $ABX=0=\lambda X$ impliquerait $X=0$, car $\lambda\neq 0$.

Donc, λ est valeur propre de BA. Ainsi, $\{1,2\}\subset Sp\,(BA)$ et comme $BA\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, BA admet au plus deux valeurs propres distinctes. Finalement, $Sp\,(BA)=\{1,2\}$ et $BA\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admet valeurs propres distinctes, donc BA est diagonalisable.

c) Remarquons déjà que $\operatorname{Im}A\subset\mathbb{R}^3$ et $\ker B\subset\mathbb{R}^3$.

On a $AB=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ donc $rg\,(AB)=2$ (les deux premières colonnes de AB ne sont pas proportionnelles). Or, on a vu que $rg\,(AB)\le rg\,(A)\le 2$, donc : $\underline{rg\,(A)=rg\,(AB)=2}$.

De plus, on a $\ker B\subset\ker AB$ donc $\dim(\ker B)\le\dim(\ker AB)=3-rg\,(AB)=1$. Or, $B\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, donc $rg\,(B)\le\min(2,3)=2$ et donc $\dim(\ker B)=3-rg\,(B)\ge 1$. Ainsi : $\underline{\dim(\ker B)=1}$.

Soit maintenant, $X\in\operatorname{Im}A\cap\ker B$. On a $X=AZ$ avec $Z\in\mathbb{R}^2$ et $BX=0$, donc $BAZ=0$.
Or, on a vu que les valeurs propres de BA sont 1 et 2, donc BA est inversible et $Z=0$, donc $X=0$. Ainsi, $\operatorname{Im}A\cap\ker B=\{0\}$

Finalement, $\operatorname{Im}A\subset\mathbb{R}^3$, $\ker B\subset\mathbb{R}^3$, $\operatorname{Im}A\cap\ker B=\{0\}$ et $\dim(\operatorname{Im}A)+\dim(\ker B)=3=\dim\mathbb{R}^3$, donc $\mathbb{R}^3=\operatorname{Im}A\oplus\ker B$.

d) Remarquons qu'avec $A_0=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $B_0=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, on a $A_0B_0=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$. Donc, il existe au moins un couple de matrices vérifiant l'hypothèse désirée. Mais alors, pour toute $P\in GL_2(\mathbb{R})$, sin on pose $A = A_0 P$ et $B = P^{-1} B_0$, on a $AB = A_0 P P^{-1} B_0 = A_0 B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, il existe bien une infinité de couples de matrices (A, B) vérifiant l'hypothèse de l'énoncé.

Planche n° 7

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux une même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Déterminer les lois de $Z = \min(X, Y)$ et $T = X - Y$.

Les variables aléatoires T et Z sont-elles indépendantes ?

On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, donc $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= P(\min(X, Y) = k) = P(X = k, Y \geq k) + P(X \geq k+1, Y = k) \\ &= \sum_{i=k}^{+\infty} P(X = k, Y = i) + \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(X = i, Y = k) \\ &= \sum_{i=k}^{+\infty} P(X = k) P(Y = i) + \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(X = i) P(Y = k) \\ &= \sum_{i=k}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p (1-p)^{i-1} p + \sum_{i=k+1}^{+\infty} (1-p)^{i-1} p (1-p)^{k-1} p \\ &= (1-p)^{k-1} p^2 \left[(1-p)^{k-1} + 2 \sum_{i=k+1}^{+\infty} (1-p)^{i-1} \right] \\ &= (1-p)^{k-1} p^2 \left[(1-p)^{k-1} + 2(1-p)^k \frac{1}{1-(1-p)} \right] \\ &= (2-p)(1-p)^{2(k-1)} p \end{aligned}$$

****

On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, donc $T(\Omega) = \mathbb{Z}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} P(T = k) &= P(X - Y = k) = P(X = Y + k) = \sum_{i=\max(1-k,1)}^{+\infty} P(X = i + k, Y = i) \\ &= \sum_{i=\max(1-k,1)}^{+\infty} P(X = i + k) P(Y = i) = \sum_{i=\max(1-k,1)}^{+\infty} (1-p)^{i+k-1} p (1-p)^{i-1} p \\ &= p^2 (1-p)^{k-2} \sum_{i=\max(1-k,1)}^{+\infty} \left[(1-p)^2 \right]^i = \frac{p}{2-p} (1-p)^{k-2+2\max(1-k,1)} = \frac{p}{2-p} (1-p)^{|k|} \end{aligned}$$

****

Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$. On a :

$$P(Z = i, T = j) = P(\min(X, Y) = i, X - Y = j) = P(\min(Y + j, Y) = i, X = Y + j).$$

Si $j \geq 0$, $\min(Y + j, Y) = Y$, donc :

$$P(Z = i, T = j) = P(Y = i, X = i + j) = P(Y = i) P(X = i + j) = p^2 (1-p)^{2i+j-2}.$$

Si $j<0$, $\min(Y+j,Y)=Y+j$, donc :

$$P(Z=i,T=j)=P(Y=i-j,X=i)=P(Y=i-j)P(X=i)=p^2(1-p)^{2i-j-2}.$$

Donc :

$$P(Z=i,T=j)=p^2(1-p)^{2i+|j|-2}=P(Z=i)P(W=j).$$

Ainsi, pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{Z}$, on a $P(Z=i,T=j)=P(Z=i)P(T=j)$, donc les variables T et Z sont indépendantes.

Planche n° 8 (PC)

Pour $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée, résoudre l'équation $X+{}^tX=tr(X)A$.

Soit $X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une éventuelle solution. On a alors $X+{}^tX=tr(X)A$ et :

$$tr(X+{}^tX)=tr(X)tr(A) \quad\Leftrightarrow\quad [2-tr(A)]tr(X)=0 \quad\Leftrightarrow\quad tr(X)=0 \text{ ou } tr(A)=2.$$

Il y a donc deux cas.

- Si $tr(A)\neq 2$, alors $tr(X)=0$ et $X+{}^tX=0$, donc X est antisymétrique.

  Réciproquement, toute matrice X antisymétrique est bien solution (car tous les coefficients diagonaux et donc la trace de X sont nuls).

- Si $tr(A)=2$, alors la condition sur la trace de X est vérifiée pour toute matrice X.

  Remarquons que $X+{}^tX$ est symétrique, donc si A ne l'est pas, la seule possibilité est d'avoir à nouveau $tr(X)=0$ et donc X antisymétrique.

  Si A est symétrique, on peut écrire de manière unique $X=X_s+X_a$ avec X_s symétrique et X_a antisymétrique. On a alors $X+{}^tX=2X_s=tr(X)A$ donc $X_s=\lambda A$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.

  Réciproquement, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$ et toute matrice $X_a\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique, on a, en posant $X=\lambda A+X_a$:

$$\left.\begin{array}{l} X+{}^tX=2\lambda A \\ tr(X)=\lambda Tr(A)=2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \quad X+{}^tX=tr(X)A.$$

  Donc, X est solution.

Finalement, les solutions sont les matrices antisymétriques quand $tr(A)\neq 2$ ou $A\notin\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et les matrices de la forme $X=\lambda A+X_a$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$ et $X_a\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ quand $tr(A)=2$ et $A\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.