# *Corrigés de la série 1 - CCINP*

## *Planche n° 1*

**I)** Déterminer, dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, la matrice de l'endomorphisme $f$ donné par $f(P)(X)=(X-a)P'(X)+P(X)-P(a)$.

Donner son noyau, son image, ses éléments propres.

**II)** Montrer la convergence simple et uniforme de la suite de fonction $f_n(x)=x^n\dfrac{e^x}{n!}$, puis étudier la convergence de la série $\sum f_n$.

I) On a $f(1)=0$ et $f(X^k)=(k+1)X^k-akX^{k-1}-a^k$ pour $k\geq 1$, donc :

$$M_{B_c}(f)=\begin{pmatrix} 0 & -2a & -a^2 & -a^3 & -a^4 & \cdots & -a^{n-1} & -a^n \\ 0 & 2 & -2a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3a & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & 0 & 4 & -4a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & n-1 & -a(n-1) & 0 \\ 0 & & & & & 0 & n & -an \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & n+1 \end{pmatrix}.$$

$f(P)(X)=\left[(X-a)P(X)\right]'-P(a)$

$f(P)(X)=0 \quad \Leftrightarrow \quad (X-a)P(X)=P(a)(X-a) \quad \Leftrightarrow \quad P(X)=P(a)$

$\boxed{\ker f=\mathbb{R}_0[X]}$

$f(P)(a)=0 \ + \ rg(f)=n \ \Rightarrow \ \boxed{\operatorname{Im} f=(X-a)\mathbb{R}_{n-1}[X]}$

La matrice de $f$ est triangulaire supérieure, donc $\boxed{Sp(f)=\{0,2,3,...,n,n+1\}}$.

Soit $\lambda=p+1\in[\![2,n+1]\!]$ et $P\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(P)(X)=\lambda P(X)=(p+1)P(X)$, qui donne

$$(X-a)P'(X)-pP(X)=0.$$

Ceci implique que $g:x\mapsto\dfrac{P(x)}{(x-a)^p}$, dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{a\}$, est de dérivée nulle, donc g est constante et $P=\alpha(X-a)^p$. Réciproquement, si $P=\alpha(X-a)^p$, on a $f(P)(X)=(p+1)P$.

Donc, pour tout $\lambda\in Sp(f)$, le sous-espace propre associé à $\lambda$ est $\operatorname{Vect}\left((X-a)^{\max(0,\lambda-1)}\right)$.

*******

**II)** Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=0$ donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n$ n'est pas majorée car $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.

Mais, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'étude de $f_n$ montre que :

$$\sup_{]-\infty,a]} |f_n| = \max\left(|f_n(-n)|, |f_n(a)|\right).$$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} |f_n(a)| = 0$ et $|f_n(-n)| = n^n \dfrac{e^{-n}}{n!} \sim n^n \dfrac{e^{-n}}{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}} \to 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{]-\infty,a]} |f_n| = 0$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout $]-\infty, a]$.

*******

La série $\sum f_n$ converge simplement vers la fonction $x \mapsto e^{2x}$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $|f_n(a)| = \underset{n \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}\right)$, donc apcr, $\sup\limits_{]-\infty,a]} |f_n| = |f_n(-n)| \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ et la série $\sum \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ diverge donc, $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $]-\infty, a]$.

Par contre, pour tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$, on a, apcr, $\sup\limits_{[a,b]} |f_n| = \max\left(|f_n(a)|, |f_n(b)|\right)$ et, comme $\sum |f_n(a)|$ et $\sum |f_n(b)|$ convergent, $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,b]$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0,a]$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, on a $f_n(x) = (-1)^n |x|^n \dfrac{e^x}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la suite $\left(|x|^n \dfrac{e^x}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ décroit apcr et tend vers 0, donc la série $\sum f_n(x)$ vérifie le critère spécial des série alternés (apcr).

Alors, on a apcr : $\left|\sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x) - \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\right| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \le |f_{n+1}(x)| \le \sup\limits_{]-\infty,0]} |f_{n+1}|$.

Et, comme $\sup\limits_{]-\infty,0]} |f_{n+1}| \to 0$, la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_-$.

Finalement, la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $]-\infty, a]$.

## *Planche n° 2*

**I)** Déterminer la limite de la suite de terme général $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \ge \dfrac{1}{n+1}$

Rayon de convergence et domaine de définition de $\sum\limits_{n\ge 0} a_n x^n$.

**II)** On note $f$ l'application qui à $P\in\mathbb{R}_6[X]$ associe le reste de la division euclidienne de $P$ par $D(X)=X^4+X^3+X^2+X+1$.

Montrer que $f$ est linéaire de $\mathbb{R}_6[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ et donner sa matrice dans les bases canoniques.

Donner la dimension et une base de $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$.

**I)** Posons $f_n(x)=\left(\dfrac{1+x^2}{2}\right)^n$ sur $I=[0,1]$.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n$ est continue, donc continue par morceaux, sur *I*.
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $I$ vers la fonction $f: x\mapsto\begin{cases}0 & \text{quand } 0\le x<1\\ 1 & \text{quand } x=1\end{cases}$ qui est continue par morceaux sur *I*.
- Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in I$, on a $|f_n(x)|\le 1$, et $x\mapsto 1$ est continue, donc continue par morceaux, et intégrable sur *I*.

D'après le théorème de convergence dominée, on a alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)dt=\int_0^1 f(t)dt=0.$$

Soit :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n=0.$$

*******

Pour tout $t\in[0,1]$, on a $0\le t\le\dfrac{1+t^2}{2}\le 1$ (car $(1-t)^2\ge 0$), donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$\int_0^1 t^n dt\le a_n\le\int_0^1 dt \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{n+1}\le a_n\le 1.$$

*******

L'encadrement ci-dessus permet de conclure immédiatement que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\ge0} a_n x^n$ est $R=1$.

Comme pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n\ge\dfrac{1}{n+1}$ et $\sum\dfrac{1}{n+1}$ diverge, $\sum a_n$ diverge.

Comme pour tout $t\in[0,1]$, on a $0\le\dfrac{1+t^2}{2}\le 1$, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\le\left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}\le\left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^n$, ce qui permet d'affirmer que la suite $(a_n)$ est décroissante. Ainsi, la série $\sum(-1)^n a_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées, et donc $\sum(-1)^n a_n$ converge.

Finalement, le domaine de définition de $\sum a_n x^n$ est $[-1,1[$.

*******

**II)** Par définition du reste de la division euclidienne par *D*, de degré 4, *f* est à images dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_6[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Ecrivons la division euclidienne de $P_i$ par *D*, $P_i = Q_i D + f(P_i)$.

On a alors $\lambda P_1 + \mu P_2 = (\lambda Q_1 + \mu Q_2)D + \lambda f(P_1) + \mu f(P_2)$ avec $\lambda f(P_1) + \mu f(P_2) \in \mathbb{R}_3[X]$. Par unicité de la division euclidienne, $\lambda f(P_1) + \mu f(P_2)$ est le reste de la division de $\lambda P_1 + \mu P_2$ par *D*, donc :

$$f(\lambda P_1 + \mu P_2) = \lambda f(P_1) + \mu f(P_2).$$

Et ainsi, *f* est linéaire.

On a :

- $f(X^k) = X^k$ pour tout $k \in [\![0,3]\!]$, car $k < \deg D$ ;
- $f(X^4) = -(X^3 + X^2 + X + 1)$, car $X^4 = D - (X^3 + X^2 + X + 1)$ ;
- $f(X^5) = 1$ car $X^5 = (X-1)D + 1$ ;
- $f(X^6) = X$ car $X^6 = (X-1)XD + X$.

Donc, la matrice de *f* dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_6[X]$ et $\mathbb{R}_3[X]$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*******

Pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X] \subset \mathbb{R}_6[X]$, $f(P) = P \in \operatorname{Im} f$, donc $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_3[X]$ (de dimension 4).

*******

Pour $P \in \mathbb{R}_6[X]$, on a $f(P) = 0$ si et seulement si $D \mid P$, soit $P = DQ$ avec $Q \in \mathbb{R}_2[X]$. Donc, $\ker f = \{QD, Q \in \mathbb{R}_2[X]\}$, de dimension 3. Une base de $\ker f$ est $(D, XD, X^2 D)$.

## *Planche n° 3*

**I)** Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, l'équation pour tout $e^x = nx$ admet deux solutions $x_n$ et $y_n$ telles que $0 \leq x_n < y_n$.

Etudier la monotonie des suites $(x_n)$ et $(y_n)$. En déduire que chacune des suites admet une limite que l'on déterminera.

Montrer qu'en $+\infty+1$, $x_n \sim \dfrac{1}{n}$. Trouver un équivalent de $x_n - \dfrac{1}{n}$ et en déduire un développement asymptotique à deux termes de $x_n$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $y_n \leq (1+\varepsilon)\ln n$.

**II)** On donne une famille $(f_1, \ldots, f_n)$ d'endomorphismes d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie, tels que $\sum_{k=1}^{n} f_k = Id$ et pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$, on a $f_i \circ f_j = 0$.

Montrer que les $f_k$ sont des projecteurs et que $E$ est somme directe de leurs images.

**I)** Pour un entier $n \geq 3$, posons $f_n(x) = e^x - nx$. L'étude de la fonction $f_n$ (de dérivée $x \mapsto e^x - e^{\ln n}$) montre qu'elle est strictement décroissante de $+\infty$ à $f_n(\ln n)$ sur $]-\infty, \ln n]$ et strictement croissante de $f_n(\ln n)$ à $+\infty$ sur $[\ln n, +\infty[$.

On a $f_n(\ln n) = n(1 - \ln n) < 0$ (car $n \geq 3 > e$) et $f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc le théorème de la bijection continue assure que $f_n$ s'annule exactement une fois sur $]-\infty, \ln n]$, en $x_n$ et exactement une fois sur $[\ln n, +\infty[$, en $y_n$.

*******

En notant de plus que pour tout $n \geq 3$, $0{,}1 \in ]-\infty, \ln n]$, $f_n(0) = 1 > 0$ et $f_n(1) = e - n < 0$, on a pour tout $n \geq 3$ :

$$0 < x_n < 1 < \ln n < y_n.$$

De plus, les variations de $f_n$ nous permettent de conclure pour tout $n \geq 3$, $f_n(x) < 0$ si et seulement si $x \in ]x_n, y_n[$ et :

- $f_n(x_{n+1}) = e^{x_{n+1}} - n x_{n+1} = e^{x_{n+1}} - (n+1) x_{n+1} + x_{n+1} = f_{n+1}(x_{n+1}) + x_{n+1} = x_{n+1} > 0$ donc $x_{n+1} \notin ]x_n, y_n[$, et comme $x_{n+1} < 1 < \ln n$, on a $x_{n+1} < x_n$ : la suite $(x_n)$ est strictement décroissante ;
- de même, $f_n(y_{n+1}) = y_{n+1} > 0$ donc $y_{n+1} \notin ]x_n, y_n[$, et comme $y_{n+1} > \ln(n+1) > \ln n$, on a $y_{n+1} > y_n$ : la suite $(y_n)$ est strictement croissante.

Comme $0 < x_n < 1$ et la suite $(x_n)$ décroit, elle converge vers un réel $\ell \in [0, 1[$. Mais si $\ell > 0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left[ e^{x_n} - n x_n \right] = -\infty$, ce qui est absurde car $f_n(x_n) = 0$ pour tout $n \geq 3$.

Ainsi : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$.

Comme $\ln n < y_n$, on a immédiatement : $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = +\infty$.

*******

On a pour tout $n \geq 3$, $e^{x_n} = n x_n$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} e^{x_n} = e^0 = 1$, ce qui prouve que : $x_n \sim \dfrac{1}{n}$.

*******

Posons $u_n = x_n - \dfrac{1}{n}$. On a alors : $x_n = \dfrac{1}{n} + u_n$ avec $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Comme $x_n \to 0$, on a : $e^{x_n} = 1 + x_n + \dfrac{1}{2} x_n^2 + o(x_n^2) = 1 + x_n + \dfrac{1}{2} x_n^2 + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Or, $x_n^2 = \frac{1}{n^2} + 2\frac{u_n}{n} + u_n^2 = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $e^{x_n} = nx_n$ se récrit :

$$1 + \frac{1}{n} + u_n + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + nu_n \quad \Rightarrow \quad (n-1)u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \Rightarrow \quad u_n \sim \frac{1}{n^2}.$$

Donc : $x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Remarquons que l'on a même : $u_n = \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{2n^2(n-1)} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{n^2} + \frac{3}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$, donc :

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{3}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

*******

Enfin, on a vu que pour tout $n \geq 3$, $0 < \ln n < y_n$ et que $y_n \to +\infty$. Avec $e^{y_n} = ny_n$, on a :

$$y_n = \ln n + \ln y_n \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{\ln y_n}{y_n} = \frac{\ln n}{y_n} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{y_n} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{\ln y_n}{y_n}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad y_n \sim \ln n.$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, on a bien apcr, $\frac{y_n}{\ln n} \leq 1 + \varepsilon$, soit : $y_n \leq (1+\varepsilon)\ln n$.

*******

**II)** Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On a $f_1 + \ldots + f_n = id_E$ et $f_i \circ f_j = 0$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $j \neq i$

Alors, pour tout $x \in E$ :

$$x = f_1(x) + \ldots + f_n(x) \quad \Rightarrow \quad f_i(x) = f_i \circ f_1(x) + \ldots + f_i \circ f_i(x) + \ldots + f_i \circ f_n(x) = f_i \circ f_i(x).$$

Ainsi, $f_i = f_i^2$ et comme $f_i$ est linéaire, c'est un projecteur.

On a de plus :

$$E = \mathrm{Im}\left(f_1 + \ldots + f_n\right) \subset \mathrm{Im}\, f_1 + \ldots + \mathrm{Im}\, f_n \subset E \quad \Rightarrow \quad E = \mathrm{Im}\, f_1 + \ldots + \mathrm{Im}\, f_n.$$

Soit $x \in E$ tel que $x = x_1 + \ldots + x_n$ avec $x_i \in \mathrm{Im}\, f_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, donc $x_i = f_i(x_i)$.

Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $x = f_1(x_1) + \ldots + f_i(x_i) + \ldots + f_n(x_n)$ et :

$$f_i(x) = f_i \circ f_1(x_1) + \ldots + f_i \circ f_i(x_i) + \ldots + f_i \circ f_n(x_n) = f_i \circ f_i(x_i) = f_i(x_i) = x_i$$

Ainsi, $x = f_1(x) + \ldots + f_n(x)$ et la décomposition dans $\mathrm{Im}\, f_1 + \ldots + \mathrm{Im}\, f_n$ est unique, donc :

$$E = \mathrm{Im}\, f_1 \oplus \ldots \oplus \mathrm{Im}\, f_n.$$

## *Planche n° 4*

**I)** Calculer le rang de $A=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, puis le rang de $A^2$.

Montrer que $\ker A$ et $\operatorname{Im} A$ sont supplémentaires.

En déduire que $A$ est semblable à $A'=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $B\in GL_2(\mathbb{R})$.

Donner le spectre de $B$ et en déduire que $A$ est diagonalisable.

**II)** On note $N$ la variable représentant le nombre $n$ de jetons tirés au cours d'un jeu. Elle vérifie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $P(N=n)=\dfrac{1}{2^n}$.

Si $N$ est pair, le joueur gagne $N$ jetons, sinon il en perd $N$.

Donner la probabilité de gagner, l'expression du gain algébrique $G$ et son espérance.

**I)** Notons $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On a alors $\operatorname{Im} A=\operatorname{Vect}(u_1,u_2)$ avec $u_1=e_2+\dots+e_n$ et $u_2=e_1+\dots+e_{n-1}$, donc $\underline{rg(A)=2}$. On a $A^2=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & (0) & 1 \\ 1 & (0) & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, donc $\operatorname{Im} A^2=\operatorname{Im} A$ et $\underline{rg(A^2)=2}$.

*******

On a, grâce au théorème du rang, $\dim(\ker A)+\dim(\operatorname{Im} A)=n$, donc $\dim(\ker A)=n-2$ et pour tout $k\in[\![2,n-1]\!]$, $Ae_k=0$, ce qui permet d'affirmer que $\ker A=\operatorname{Vect}(e_2,\dots,e_{n-1})$.

On prouve de même que $\ker A^2=\operatorname{Vect}(e_2,\dots,e_{n-1})=\ker A$.

Alors, $x\in\ker A\cap\operatorname{Im} A$, on a $Ax=0$ et $x=Az$ avec $z\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc $Ax=A^2z=0$, soit $z\in\ker A^2=\ker A$ et donc $x=Az=0$.

Ainsi, $\ker A\cap\operatorname{Im} A=\{0\}$ et comme $\dim(\ker A)+\dim(\operatorname{Im} A)=n$, on a bien :

$$\ker A\oplus\operatorname{Im} A=\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

*******

Remarquons que $Au_1=u_2$ et $Au_2=u_1$, donc dans la base $(e_2,\dots,e_{n-1},u_1,u_2)$ adaptée à la décomposition $\ker A\oplus\operatorname{Im} A=\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à $A$ est $A'=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\in GL_2(\mathbb{R})$ (car $\det B=-1\neq 0$) et $A$ est semblable $A'$.

*******

On a $\chi_B=X^2-1$ qui est scindé à racines simples, avec $Sp(B)=\{-1,1\}$. Ainsi, $B$ est diagonalisable, donc $A$ l'est aussi.

*******

**II)** On gagne quand $N$ est paire, donc si $p$ est la probabilité de gagner, on a :

$$p = \sum_{n=1, n \text{ pair}}^{+\infty} P(N=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=2n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

On a $\Omega(G) = \{-(2n-1), n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{2n, n \in \mathbb{N}^*\}$ avec $G = -(2n-1)$ quand $N = 2n-1$ et $G = 2n$ quand $N = 2n$. Alors :

$$E(G) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2nP(N=2n) - \sum_{n=1}^{+\infty} (2n-1)P(N=2n-1)$$

Soit :

$$E(G) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{1}{2^{2n}} - \sum_{n=1}^{+\infty}(2n-1)\frac{1}{2^{2n-1}} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{4}\right)^n - 4\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{4}\right)^n + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4^n} = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}$$

Or, pour $x \in \left]-1,1\right[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, ce qui donne en dérivant $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$, donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{16}{9} \quad \Rightarrow \quad E(G) = -\frac{1}{2}\frac{16}{9} + \frac{2}{3} = -\frac{2}{9}.$$