Chapitre 10 : Suites numériques

Programme officiel PCSI

b) Généralités sur les suites réelles	
Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone. Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.	Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $\left(\lvert u_n\rvert\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
c) Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite. Unicité de la limite.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Notations $u_n \longrightarrow \ell$, $\lim u_n$.
Suite convergente, divergente. Toute suite convergente est bornée.	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.	Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.
Passage à la limite d'une inégalité large. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.	
Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).	Utilisation d'une majoration de la forme $\lvert u_n - \ell\rvert \leqslant v_n$, où (v_n) converge vers 0.
d) Suites monotones	
Théorème de la limite monotone. Théorème des suites adjacentes.	
Approximations décimales d'un réel.	Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès. Tout réel est limite d'une suite de rationnels.
e) Suites extraites	
Suite extraite.	Tout développement théorique sur les suites extraites est hors programme.
Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite.	Utilisation pour montrer la divergence d'une suite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ, alors (u_n) tend vers ℓ. Le théorème de Bolzano-Weierstrass est hors programme.
f) Suites complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire.
g) Suites particulières	
Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.	Pour une relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$, recherche d'une solution constante, détermination des solutions.
Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.	
Présentation de l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ sur quelques exemples simples. Représentation géométrique. Si (u_n) converge vers un élément ℓ en lequel f est continue, alors $f(\ell) = \ell$.	Cette étude est l'occasion d'introduire la notion d'intervalle stable par une fonction. Pour l'étude de la monotonie de (u_n), on souligne l'intérêt, d'une part, de l'étude du signe de $f(x) - x$, et, d'autre part, de l'utilisation de la croissance éventuelle de f.

c) Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	
	Application à l'étude de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Plan du résumé

Résumé

I – Suites de nombres réels

1. Généralités

a. Définition :

Définitions :

Une suite réelle est une application de $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, le réel u_n est appelé terme général de la suite et n est le rang du terme u_n.

Une suite est constante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a$ avec a réel fixé.

La suite nulle, notée $0_{\mathbb{N}}$ (ou 0 si ce n'est pas ambigu) est la suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$.

Une suite est stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang (apcr).

Pratiquement, il y a plusieurs façons de définir une suite dont les principales sont :

- Suite définie de façon explicite, par une formule directe (ou un énoncé s'y ramenant) : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$;
- Suite définie par récurrence (ou un énoncé s'y ramenant) :
  - récurrence simple : u_0 et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$;
  - récurrence double : u_0, u_1 et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$;
  - récurrence triple, quadruple, … multiple ;
- Suites implicites (ou un énoncé s'y ramenant) : en général, le terme de rang n est défini comme la racine d'une équation paramétrée par n.

b. Opérations :

On définit les opérations suivantes pour toutes suites u, v de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- *Combinaison linéaire* : pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda u + \mu v$ est la suite de terme général $\lambda u_n + \mu v_n$.
- *Produit* : $u \times v$ (ou uv) est la suite de terme général $u_n v_n$.
- *Quotient* : si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$, $\dfrac{u}{v}$ est la suite de terme général $\dfrac{u_n}{v_n}$ (éventuellement apcr).

c. Suites majorées, minorées, bornées :

Définition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

On dit que u est majorée (*resp.* minorée) s'il existe un réel μ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \mu$ (*resp.* $u_n \geq \mu$). On dit alors que μ est un majorant (*resp.* minorant) de u.

On dit que u est bornée si elle est majorée et minorée.

Propriété :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

d. Monotonie :

Définitions :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

On dit que u est croissante (*resp.* strictement croissante) si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n \le u_{n+1}$ (*resp.* $u_n < u_{n+1}$).

On dit que u est décroissante (*resp.* strictement décroissante) si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} \le u_n$ (*resp.* $u_{n+1} < u_n$).

On dit que u est croissante (*resp.* strictement croissante, *resp.* décroissante, *resp.* strictement décroissante) à partir du rang n_o si pour tout entier $n \ge n_o$, $u_n \le u_{n+1}$ (*resp.* $u_{n+1} < u_n$, *resp.* $u_{n+1} \le u_n$, *resp.* $u_{n+1} < u_n$).

On dit que u est monotone (*resp.* strictement monotone) (à partir du rang n_o) si u est croissante ou décroissante (à partir du rang n_o).

2. Limite d'une suite

a. Suites convergentes, suites divergentes :

Définitions :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et un réel ℓ. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que pour tout entier $n \ge N$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

Lorsqu'un tel nombre ℓ existe, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (vers ℓ) ou qu'elle converge (vers ℓ) ou qu'elle admet une limite finie. Dans le cas contraire, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ (*resp.* $-\infty$) si pour tout réel $A > 0$, il existe un entier N tel que pour tout entier $n \ge N$, $u_n > A$ (*resp.* $u_n < -A$).

Propriété :

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors sa limite est unique, notée $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, $\lim u_n$ ou $\lim u$.

Si la limite est $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$, on note aussi $u_n \to \ell$.

Propriété :

Si $u_n = f(n)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ avec ℓ fini ou infini, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Propriété :

Toute suite convergente est bornée.

Propriété :

Toute suite de nombres réels convergeant vers un nombre réel strictement positif ou divergeant vers $+\infty$ est minorée, à partir d'un certain rang, par un nombre réel strictement positif.

b. Opérations sur les suites convergentes :

En conséquence immédiate de la définition de la convergence d'une suite, on a :

- $u_n \to 0 \iff |u_n| \to 0$.
- $u_n \to \ell$ (avec ℓ fini) $\iff u_n - \ell \to 0$.

Propriété :

L'ensemble des suites de limite nulle est stable par combinaisons linéaires.

Propriété :

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de limite nulle et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 0$.

Propriété :

Soient u et v deux suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$ avec ℓ et ℓ' finies.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$.
- $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda\ell + \mu\ell'$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = \ell\ell'$.
- Si $\ell' \neq 0$ alors $v_n \neq 0$ apcr, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{\ell'}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\ell}{\ell'}$.

c. Opérations sur les suites quelconques :

Propriétés :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

- Si u converge et v diverge alors $u+v$ diverge.
- Si u est bornée et v diverge vers $+\infty$ (*resp.* $-\infty$) alors $u+v$ diverge vers $+\infty$ (*resp.* $-\infty$).
- Si u et v divergent vers $+\infty$ (*resp.* $-\infty$) alors $u+v$ diverge vers $+\infty$ (*resp.* $-\infty$).

Propriétés :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

- Si $v_n \geq m > 0$ (*resp.* $v_n \leq m < 0$) apcr et u diverge vers $+\infty$ (*resp.* $-\infty$) alors uv diverge vers $+\infty$.
- Si $v_n \geq m > 0$ (*resp.* $v_n \leq m < 0$) apcr et u diverge vers $-\infty$ (*resp.* $+\infty$) alors uv diverge vers $-\infty$.
- Si u et v divergent vers $\pm\infty$ alors uv diverge vers $\pm\infty$, le signe étant donné par la règle des signes.

Propriétés :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

- Si $u_n > 0$ (*resp.* $u_n < 0$) apcr et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$ (*resp.* $-\infty$).
- Si u diverge vers l'infini, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$.

Propriété :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de limite a (finie ou infinie) et f une fonction telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.

d. Convergence et ordre :

Propriétés :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

- Si u et v convergent et $u_n \leq v_n$ apcr alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
- Si u converge et $u_n \leq M$ (*resp.* $u_n \geq m$) apcr alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq M$ (*resp.* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq m$).

3. Théorèmes d'existence de limites

a. Cas des suites monotones :

Théorème (*de la limite monotone*) :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Si u est croissante et majorée, elle converge vers $\ell = \sup\{u_n, n\in\mathbb{N}\}$, sinon elle diverge vers $+\infty$.

Si u est décroissante et minorée, elle converge vers $\ell = \inf\{u_n, n\in\mathbb{N}\}$, sinon elle diverge vers $-\infty$.

b. Théorème des gendarmes :

Théorème (*des gendarmes ou d'encadrement*) :

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont trois suites réelles telles que $\begin{cases} v_n \leq u_n \leq w_n \quad \text{apcr} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \end{cases}$, alors :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

Corollaire :

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles, avec v positive et de limite nulle, telles que $|u_n - \ell| \leq v_n$ apcr (avec $\ell \in \mathbb{R}$), alors la suite u converge vers ℓ.

Propriété :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

Si $\begin{cases} u_n \geq v_n \quad \text{apcr} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \end{cases}$ $\left(\textit{resp. } \begin{cases} u_n \leq v_n \quad \text{apcr} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{cases} \right)$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ $(\textit{resp. } -\infty)$.

c. Suites adjacentes :

Définition :

Deux suites u et v sont adjacentes si elles sont monotones de sens contraires et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Lemme :

Si u et v sont deux suites adjacentes avec u croissante et v décroissante, alors pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_p$.

Théorème :

Si u et v sont deux suites adjacentes, alors elles convergent vers la même limite.

d. Approximation décimale d'un nombre réel :

Théorème et définitions :

Pour tout réel x, les suites $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $d_n=\dfrac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n}$ et $D_n=\dfrac{\lfloor 10^n x\rfloor+1}{10^n}$ sont adjacentes et convergent vers x.

Pour un entier naturel n donné, les nombres décimaux d_n et D_n sont appelés valeur approchée (ou approximation) par défaut de x à la précision 10^{-n} et valeur approchée (ou approximation) par excès de x à la précision 10^{-n} respectivement.

Théorème :

Tout nombre réel x est limite d'une suite de rationnels. Autrement dit, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

4. Suites extraites

Lemme :

Soit $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ une fonction strictement croissante.

On a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\varphi(n)\geq n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi(n)=+\infty$ et $\tilde{\varphi}:\mathbb{N}\to\varphi(\mathbb{N})\,;n\mapsto\varphi(n)$ est une bijection.

Définition :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ une fonction strictement croissante. La suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée suite extraite de u.

Propriété :

Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.

Corollaires :

Si une suite extraite, ne converge pas, alors la suite non plus.
Si deux suites extraites convergent vers des limites différentes, alors la suite ne converge pas.

Propriété :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers cette limite.

Propriété : *Théorème de Bolzano-Weierstrass* (*explicitement hors programme !*)

De toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

II – Extension aux suites complexes

1. Extension du vocabulaire

Définitions :

Une suite complexe est une application de $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On a appelle partie réelle de u, notée $\text{Re}(u)$, la suite $\left(\text{Re}(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, partie imaginaire de u, notée $\text{Im}(u)$, la suite $\left(\text{Im}(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, suite conjuguée de u, notée $\bar{u}$, la suite $(\bar{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et module de u, notée $|u|$, la suite $\left(|u_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

On dit que u est bornée s'il existe un réel positif M tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_n|\le M$.

2. Limites

Définitions :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et ℓ un nombre complexe. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite ou converge vers ℓ si :

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,N\in\mathbb{N}\ \backslash\ \forall\,n\ge N,\ |u_n-\ell|<\varepsilon.$$

Dans le cas contraire, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Propriété :

Si une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors sa limite est unique et on la note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ou $\lim u$.

Propriété :

Toute suite complexe convergente est bornée.

Propriété :

Soit une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- u converge vers $\ell\in\mathbb{C}$ ssi $\text{Re}(u)$ et $\text{Im}(u)$ convergent respectivement vers $\text{Re}(\ell)$ et $\text{Im}(\ell)$.
- u converge vers $\ell\in\mathbb{C}$ si et seulement si $\bar{u}$ converge vers $\bar{\ell}$.

Propriété :

Si u est une suite complexe convergeant vers ℓ. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|=|\ell|$.

Propriétés :

Soient u et v deux suites complexes telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\ell'$ avec $\ell,\ell'\in\mathbb{C}$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=\ell+\ell'$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_nv_n)=\ell\ell'$.
- Si $\ell'\neq 0$ alors $v_n\neq 0$ apcr, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{v_n}=\dfrac{1}{\ell'}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\dfrac{\ell}{\ell'}$.

III – Suites usuelles

1. Suites arithmétiques

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $R\in\mathbb{C}$ si $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n+R$. Alors :

- $\forall\, n\in\mathbb{N}$:

$$u_n=u_0+nR$$
$$\sum_{k=0}^{n}u_k=u_0+u_1+\ldots+u_n=(n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$$

- $\forall\,(p,n)\in\mathbb{N}^2$:

$$u_n=u_p+(n-p)R$$
$$\sum_{k=p}^{n+p}u_k=u_p+u_{p+1}+\ldots+u_{n+p}=(n+1)\frac{u_p+u_{n+p}}{2}$$
$$=(\text{nb de termes})\times(\text{moyenne du }1^{\text{er}}\text{ et du dernier terme})$$

- Si la suite est *réelle* (c'est-à-dire $R\in\mathbb{R}$ <u>et</u> $u_0\in\mathbb{R}$), alors :
    - si $R>0$, u est croissante et diverge vers $+\infty$
    - si $R<0$, u est décroissante et diverge vers $-\infty$.

2. Suites géométriques

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q\in\mathbb{C}$ si $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=qu_n$. Alors :

- $\forall\, n\in\mathbb{N}$:

$$u_n=u_0q^n$$
$$\sum_{k=0}^{n}u_k=u_0+u_1+\ldots+u_n=\begin{cases}u_0\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{quand } q\neq 1\\ (n+1)u_0 & \text{quand } q=1\end{cases}$$

- $\forall\,(p,n)\in\mathbb{N}^2$:

$$u_n=u_pq^{n-p}$$
$$\sum_{k=p}^{n+p}u_k=u_p+u_{p+1}+\ldots+u_{n+p}=\begin{cases}u_p\dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}=(1^{\text{er}}\text{ terme})\times\dfrac{1-q^{(\text{nb de termes})}}{1-q} & \text{quand } q\neq 1\\ (n-p+1)u_0 & \text{quand } q=1\end{cases}$$

- Si la suite est *réelle* (c'est-à-dire $q\in\mathbb{R}$ <u>et</u> $u_0\in\mathbb{R}$), alors :
    - si q < 0, u n'est pas monotone ;
    - si q > 0, u est monotone (et son sens de variation dépend de la position de q par rapport à 1 <u>et</u> du signe de son premier terme).
- *Limite éventuelle* :
    - Si $|q|<1$, u converge vers 0.
    - Si $q=1$, u est constante.
    - Si $|q|>1$ ou $q=-1$, u diverge.
    - Si u est *réelle* $q>1$, u diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$ suivant le signe de son premier terme.

3. <u>Suites arithmético-géométriques</u>

Définition :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique s'il existe deux nombres réels ou complexes a et b tels que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=au_n+b$.

Quand $a=1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique ; quand $b=0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

Propriété :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=au_n+b$.

Quand $a\neq 1$, en notant $\ell=\dfrac{b}{1-a}$ le point fixe de $x\mapsto ax+b$, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_n=(u_0-\ell)a^n+\ell.$$

4. <u>Suites récurrentes linéaires doubles</u>

Définitions :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire double s'il existe deux nombres réels ou complexes a et b tels que $b\neq 0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$.

On a appelle équation caractéristique associée à u l'équation $r^2-ar-b=0$.

Théorème :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire double telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$ avec $b\neq 0$.

Si r_1 et r_2 sont les racines (complexes) de $r^2-ar-b=0$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_n=\begin{cases}\lambda r_1^n+\mu r_2^n & \text{si } r_1\neq r_2\\ (\lambda n+\mu)r_1^n & \text{si } r_1=r_2\end{cases}$$

avec λ et μ deux nombres fixés.

De plus, la donnée des deux premiers termes u_0 et u_1 définit la suite de manière unique.

Enfin, si u_0, u_1, a et b sont réels, la suite est réelle, et si $r^2-ar-b=0$ admet deux racines complexes distinctes conjuguées $\rho e^{i\theta}$ et $\overline{\rho e^{i\theta}}=\rho e^{-i\theta}$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_n=\rho^n(\lambda\cos n\theta+\mu\sin n\theta)$$

avec λ et μ deux réels fixés.

5. <u>Suites récurrentes d'ordre 1</u>

Définition :

Une suite récurrente d'ordre 1 est une suite définie par $u_0\in A$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$, où f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Propriété :

Soit f une fonction définie sur $A \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans A, autrement dit $f(A) \subset A$ (A est stable par f).

Pour tout $u_0 \in A$, la suite récurrente vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie et tous ses termes appartiennent à A.

Propriété (*pas vraiment au programme : à reprouver systématiquement*) :

Si A est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f est croissante sur A, alors u est monotone.

Plus précisément, si $u_0 \le u_1$, u est croissante et si $u_0 \ge u_1$, u est décroissante.

Remarques méthodologiques :

- Si f est bornée, u l'est aussi.
- La méthode classique pour étudier le sens de variation de u est d'étudier le signe du taux de variation $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$, donc d'étudier le signe de $f(x) - x$ quand x décrit A.
- Si $u_0 \in A$ n'est pas précisé, alors comparer u_0 et $u_1 = f(u_0)$ revient à étudier le signe de $f(u_0) - u_0$, donc de $f(x) - x$ quand x décrit A et la propriété précédente ne sert plus à grand-chose…

Propriété :

Si u converge vers $\ell \in I$ et f est continue en ℓ, alors ℓ est un point fixe de f, soit $f(\ell) = \ell$.

Propriété :

Soit une fonction f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ telle que $f\big([a,b]\big) \subset [a,b]$ et $|f'| \le k < 1$

Si u est une suite définie par $u_0 \in [a,b]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, alors :

- f admet un unique point fixe $\ell \in [a,b]$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \le k^n |u_0 - \ell|$.
- La suite u converge vers ℓ.